

БАШИРОВА АНАР НАБИЕВНА

Мультипликаторы кратных рядов Фурье-Хаара

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности 6D060100 — Математика

Актуальность темы исследования. Исследование мультипликаторов рядов Фурье - важное направление гармонического анализа. Большой интерес к данному направлению объясняется тем, что мультипликаторы рядов Фурье используются в различных разделах математики и в прикладных задачах, а также наличием нерешенных задач, требующих глубоких исследований. С развитием теории приближений вейвлетами возник интерес к исследованию рядов Фурье-Хаара.

Диссертационная работа посвящена исследованию мультипликаторов рядов Фурье-Хаара в пространствах Лоренца и в анизотропных пространствах Лоренца.

Цель работы:

1. Исследование класса мультипликаторов рядов Фурье-Хаара $m(L_{p,r} \rightarrow L_{q,s})$ в более общей ситуации, охватывающей случай, когда $r > s$, $0 < r, s \leq \infty$.

2. Исследование мультипликаторов двойных рядов Фурье-Хаара для функций из анизотропных пространств Лоренца. Получение необходимых и достаточных условий для того, чтобы последовательность $\lambda = \{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\}$ принадлежала классу $m(L_{\bar{p}, \bar{r}} \rightarrow L_{\bar{q}, \bar{s}})$.

Общая методика исследования. Основным аппаратом исследования являются интерполяционные методы для анизотропных пространств, методы сетевых пространств, неравенства типа Никольского, теоремы вложения для анизотропных пространств.

Основные положения, выносимые на защиту и результаты исследования. На защиту вынесены следующие основные результаты диссертационного исследования:

1. Интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств $N_{\bar{p}, \bar{q}}(M)$, где M - множество всех прямоугольников в \mathbb{R}^2 , $0 < \bar{p} = (p_1, p_2) \leq \infty$, $1 \leq \bar{q} = (q_1, q_2) \leq \infty$.

2. Критерии принадлежности функции $f(x_1; x_2)$ сетевому пространству $N_{\bar{p}, \bar{q}}(M)$ и пространству Лебега $L_{\bar{p}}[0,1]^2$ со смешанной метрикой, где $1 < \bar{p} < \infty$, $0 < \bar{q} \leq \infty$, $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{q} = (q_1, q_2)$, M - множество всех прямоугольников в \mathbb{R}^2 . Теорема типа Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье-Хаара.

3. Необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности $\lambda = \{\lambda_k^j\}$ классу мультипликаторов рядов Фурье-Хаара $m(L_{p,r} \rightarrow L_{q,s})$.

4. Неравенство типа Никольского для кратных рядов Фурье-Хаара. В частности, $\|S_{2^{k_1}2^{k_2}}(f)\|_{L_{\bar{q}}} = o\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}2^{k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\right)$ для $f \in L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2$.

5. Необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности $\lambda = \{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\}$ классу мультипликаторов кратных рядов Фурье-Хаара $m(L_{\bar{p},\bar{r}} \rightarrow L_{\bar{q},\bar{s}})$.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы носят теоретический характер и могут найти применение в гармоническом анализе, теории дифференциальных уравнений, теории приближения, теории функциональных пространств.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа, объемом 83 страницы, состоит из введения, четырех разделов, разбитых на подразделы, заключения и списка использованных источников. Список использованных источников включает 61 наименование.

Основное содержание работы.

В первом разделе изучаются анизотропные сетевые пространства $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, где M - множество всех прямоугольников в \mathbb{R}^2 , $0 < \bar{p} = (p_1, p_2) \leq \infty$, $1 \leq \bar{q} = (q_1, q_2) \leq \infty$ и их интерполяционные свойства. Показано, что шкала пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ замкнута относительно многомерного интерполяционного метода Фернандеса.

Основными результатами второй главы являются теоремы Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье-Хаара в пространствах Лебега $L_{\bar{p}}[0,1]^2$ со смешанной метрикой и в анизотропных сетевых пространствах $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$.

В третьей главе получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности $\{\lambda_k^j\}_{k=0, j=1}^{\infty, 2^k}$ классу $m(L_{p,r} \rightarrow L_{q,s})$, в частности охватывающий случай, когда $r > s$. Полученный результат обобщает и дополняет более ранние исследования Лелонд О.В., Семенова Е.М., Уксусова С.Н. для случая $r \leq s$.

В четвертой главе получено неравенство, описывающее поведение частичных сумм двойных рядов Фурье-Хаара:

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{k_1\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}\right)} \|S_{2^{k_1}2^{k_2}}(f)\|_{L_{\bar{q}}} \right)^{\tau_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)^{\frac{1}{\tau_2}} \leq c \|f\|_{L_{\bar{p},\bar{\tau}}}$$

В частности, из этого неравенства следует, что

$$\|S_{2^{k_1}2^{k_2}}(f)\|_{L_{\bar{q}}} = o\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}2^{k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\right)$$

для $f \in L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2$.

Основным результатом четвертой главы является получение необходимых и достаточных условий принадлежности последовательности $\lambda = \{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\}$ классу $m(L_{\bar{p}, \bar{r}} \rightarrow L_{\bar{q}, \bar{s}})$.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы представлены и обсуждены:

- на международных научных конференциях: XV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов - 2019» (Нур-Султан, 2019); «Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra» (EMJ-2019) Dedicated to the 10th Anniversary of the Eurasian Mathematical Journal (Нур-Султан, 2019); XVI Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов - 2020» (Нур-Султан, 2020); Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» (Нур-Султан, 2021); Евразийский молодежный форум «Евразия – пространство сотрудничества, мира и согласия», посвященный 20-летию юбилею Казахстанского филиала МГУ имени М.В. Ломоносова (Нур-Султан, 2021); Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому (Москва, 2021);

- на научном региональном семинаре «Функциональный анализ и его приложения» / руководители: академик М. Отелбаев, академик Р. Ойнаров, профессор Е.Д. Нурсултанов, профессор К.Н. Оспанов (Нур-Султан, 2020);

- на научном семинаре «Современные проблемы математики» под руководством профессора Е.Д. Нурсултанова, Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова (Нур-Султан, 2018, 2019, 2020).

- на научном семинаре «Теория тригонометрических и ортогональных рядов» под руководством профессоров кафедры теории функций и функционального анализа МГУ имени М.В. Ломоносова Потапова М.К., Скворцова В.А., Лукашенко Т.П., Дьяченко М.И. (Москва, 2020).

- на городском научном семинаре «Дифференциальные операторы и их приложения» / руководители семинара: академик НАН РК М. Отелбаев, академик НАН РК Т.Ш. Кальменов, профессор Б.Е. Кангужин, член-корр. НАН РК М.А. Садыбеков, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Институт математики и математического моделирования (Алматы, 2022)

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 14 работах, из них 5 работ в научных рейтинговых журналах, 9 работ в сборниках девяти международных научных конференций.

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами. Тема диссертационного исследования соответствует приоритетному направлению развития «Научные исследования в области естественных наук», специализированное научное направление «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики и

механики». Часть результатов диссертации вошли в промежуточный отчет за 2021 г. по проекту АР09260223 «Преобразования Фурье и мультипликаторы преобразований Фурье функций многих переменных из анизотропных пространств» и за 2020 г. по проекту АР08053326 «Методы функциональных пространств и их приложения в гармоническом анализе».