

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби

УДК 517.91

На правах рукописи

АЙМАЛ РАСА ГУЛАМ ХАЗРАТ

Дифференциальные уравнения на графах

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание степени
доктор философии (PhD)

Научные консультанты
доктор физико-математических наук,
профессор
Б.Е. Кангужин
доктор физико-математических наук,
профессор
З.Ю. Фазуллин

Республика Казахстан
Алматы, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ГРАФЫ И АССОЦИИРОВАННЫЕ ЛАПЛАСИАНЫ	8
1.1 Дискретные графы	8
1.2. Обобщенные лапласианы.....	9
1.3 Примеры.....	11
1.4 Операторы, связанные с пространствами вершин.....	14
1.5 Метрические графы, квантовые графы и связанные с ними операторы	19
2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ НА ГРАФЕ	27
2.1 Сопряженное дифференциальное выражение.....	27
2.2 Краевые условия.....	27
2.3 Сопряженные краевые условия.....	29
2.4 Доказательство формулы Лагранжа.....	30
2.5 Частное решение краевой задачи.....	33
2.6 Краевая задача оператора при $n = 3$	35
2.7 Основная задача.....	39
2.8 Краевая задача оператора S	42
2.9 Дифференциальный оператор n -го порядка.....	46
2.10 Функция Грина оператора на отрезке $L_2(0,1)$	53
2.11 Возмущенная краевая задача.....	54
2.12 Аналитическая природа функции Грина оператора $(L - \lambda I)$	57
2.13 Главная часть разложения в ряд Лорана функции Грина.....	63
2.14 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Лорана задачи S_1	65
2.15 Двухтагольные граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка на отрезке.....	67
3 ФУНКЦИЯ ГРИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ	77
3.1 Основные понятия, связанные с граф-деревом.....	77
3.2 Определение максимального оператора на граф-дереве.....	77
3.3 Формула Лагранжа для дифференциальных операторов на граф-дереве.....	79
3.4 Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде при m	83
3.5 Определение дифференциального оператора на графе-звезде.....	84
3.6 Построение функции Грина задачи Дирихле.....	85
3.7 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле....	94

3.8 Формула Даламбера в случае негладких многоточечных задач для волнового уравнения.....	100
3.9 Идентификация области определения оператора Штурма-Лиувилля на граф-звезде.....	114
3.9.1 Решение задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля на граф-звезде.....	117
3.9.2 Построение биортогональной системы решений по набору граничных условий.....	119
3.9.3 Эквивалентный набор граничных форм, имеющих интегральный вид.....	121
3.9.4 Выбор эталонных задач и уточненная постановка обратной задачи.....	123
3.9.5 Теорема единственности восстановления граничных функций.....	124
3.9.6 Уточнение теоремы единственности в случае граничных задач	127
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	130
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	131

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\ \cdot\ _f$	– норма гильбертова пространства
$\partial: E \rightarrow V \times V$	– оператор идентификации дуг и вершин
$\ A\ $	– норма оператора A
$L_2(\Gamma) = \prod_{j=1}^m L_2(e_j)$	– пространство квадратично суммируемых функций на графе
$V = \bigoplus_v V_v$	– инцидентных множество вершин
$G = (V, E, \partial)$	– геометрический граф с оператором идентификации
$\Delta_V = \Delta_{(G,V)} := d_V^* d_V$	– Лапласиан, связанный с квантовым графом
$L^*(V)$	– сопряженный дифференциальный оператор
$\varphi_j^{(k-1)}(0) = \delta_{ki}$	– условия Коши в нуле
$\Gamma = \{V, E\}$	– граф-звезда
δ_{kj}	– символ Кронекера

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы возрос интерес математиков к объектам, которые не являющихся гладкими многообразиями. Имеющийся математический аппарат адаптирован именно для таких многообразий. Однако на практике встречаются объекты типа фракталов и стратифицированных множеств. Современные математические средства необходимо модифицировать на такие объекты. В частности, геометрические графы составлены из нульмерных и одномерных многообразий и в то же время не являются гладкими многообразиями. Таким образом, представляет научный интерес адаптация имеющегося математического аппарата на графы.

С другой стороны, геометрические графы можно рассматривать как предельный случай конструкций, представляющих соединения различных стержней. Поэтому понятен и практический интерес к такого рода объектам.

Принято рассматривать дифференциальный оператор на графе как гибрид, состоящий из чисто дифференциальных операторов на дугах и матричных операторов на нульмерных внутренних вершинах графа. Подобные объекты интересны и со спектральной точки зрения.

В связи с тем, что дифференциальные операторы на графах не являются дифференциальными, а представляют собой функционально-дифференциальными операторами, поэтому данная диссертация преследует цель.

Цель: математический аппарат, который создан для исследования спектральных свойств чисто дифференциальных операторов, перенести на функционально-дифференциальные операторы.

Объект исследования – дифференциальные операторы на графах, как операторы составленные из скалярных матричных и дифференциальных операторов. Для достижения поставленной цели в диссертации исследуются следующие задачи:

1. Выписать явный вид функции Грина задачи Дирихле для оператора двукратного дифференцирования на граф-звезде и разложить ее по системе соответствующих вычетов.
2. Выяснить природу распространения волн вдоль граф-звезды как кусочно-упругой струны.
3. Однозначное восстановление условий закреплений граф-звезды по некоторому набору собственных значений дифференциальных операторов заданных на этом графе.

Положения, выносимые на защиту: дано явное представление функции Грина задачи Дирихле для оператора двукратного дифференцирования на граф-звезде и обоснованы ее вычеты и спектральные разложения, найдена формула Даламбера распространения волн вдоль граф-звезды и обоснован метод продолжений в случае ограниченной струны в виде граф-звезды, доказано, что по набору некоторых эталонных задач для оператора Штурма-Лиувилля на граф-

звезде однозначно удастся восстановить условия закрепления в граничных вершинах граф-звезды.

Методы исследования.

В диссертации используются хорошо апробированные методы функционального анализа и теории функций комплексного переменного, результаты спектральной теории неограниченных операторов, методология теории ОДУ на графах.

Научная новизна исследования.

Доказана возможность идентификации граничных условий дифференциальных операторов на граф-звезде по собственным значениям специально выбранных эталонных дифференциальных операторов. Обоснован метод продолжений для ограниченных струн в виде граф-звезды.

Обоснованность и достоверность.

Обоснованность и достоверность научных выводов, полученных в диссертации, подтверждаются их последовательным теоретическим и математическим обоснованием, а также данными, сопоставленными с имеющимися в открытых источниках технологическими и производственными данными.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут найти применение в дальнейшем в развитии спектральной теории краевых задач на графах и в исследовании задач, возникающих в теории упругости.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертации подтверждается публикациями полученных результатов в журналах, имеющих ненулевой импакт-фактор.

Оценка полноты выполнения целей исследования. Все полученные результаты являются новыми и базируются на собственных методах решения. Цель диссертации полностью достигнута, поскольку решены три задачи, которые ставились изначально.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 13 работах. Из них 3 статьи в рейтинговых журналах, 5 статей в журналах, рекомендуемых ККСОН МОН РК, 6 тезисов в материалах международных конференций.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из 136 страниц, которые включают в себя введение, три раздела с подразделами, заключение и список использованных источников.

Основное содержание диссертации.

Введение диссертации содержит краткое описание современного состояния исследуемой темы диссертации, актуальность и обоснования необходимости исследования. **Первые две главы** носят вспомогательный характер и здесь изложен известный материал и приведены необходимые обозначения и терминология. Содержательными и самостоятельно выполненными являются

пункты 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 **третьей главы** диссертации. В указанных пунктах решены три задачи, которые необходимы для достижения цели диссертации.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ГРАФЫ И АССОЦИИРОВАННЫЕ ЛАПЛАСИАНЫ

В данном разделе приведены обозначения и вспомогательные известные факты а также уточнена терминология. Материал данного раздела диссертаций соответствует материалу приведенному в монографиях [3,4,6,72,75,88]. Положения выносимые на защиту содержатся в третьем разделе диссертации.

1.1 Дискретные графы

Целью настоящего раздела является определение пространств и операторов, связанных с геометрическим графом и которые необходимы позже.

Определение 1.1.1

1. Дискретный граф G задается набором (V, E, ∂) , где V, E - счетные множества. $V = V(G)$ обозначает множество вершин, $E = E(G)$ обозначает множество ребер. Также вводится $\partial: E \rightarrow V \times V$ отображение, сопоставляющее каждому ребру e пару $(\partial_- e, \partial_+ e)$, состоящей из его начальной и конечной вершины. Оператор ∂ фиксирует ориентацию ребер.

2. Для каждой вершины $v \in V$ мы определяем (исходящие $(-)$ и входящие $(+)$, соответственно) набор смежных ребер с v

$$E_v^\pm := \{e \in E \mid \partial_\pm e = v\} \quad E_v := E_v^+ \cup E_v^- \quad (1.1.1)$$

E_v^+ состоит из всех ребер, входящих $(+)$ в v . E_v^- состоит из всех ребер, исходящих $(-)$ из v .

3. Степень вершины $v \in V$ определяется формулой (1.1.2):

$$\deg v := |E_v| = |E_v^+| + |E_v^-| \quad (1.1.2)$$

то есть степень вершины равно количеству смежных ребер при v . Чтобы избежать тривиальных случаев предположим, что $\deg v \geq 1$, то есть никакая вершина не изолирована. Мы также предполагаем, что $\deg v$ конечно для каждой вершины [1].

4. Дискретный граф (ребер) взвешен, если имеется функция $l: E \rightarrow (0, \infty)$, которая каждому ребру $e \in E$ ставит в соответствии его длину $l_e > 0$.

В качестве альтернативы мы можем думать о $\frac{1}{l_e}$ как о весе, связанным с ребром e . Если $l_e = 1$ для всех ребер, то мы будем называть граф равносторонним. Иногда удобно обобщение понятия графа, расширив ребра до бесконечной длины, то есть имеющий конечную вершину на «бесконечности»:

Определение 1.1.2

1. $G = (V, E, \partial)$ геометрический граф с ориентацией мы можем разложить на внутренние и внешние дуги E , то есть $E = E_{\text{int}} \cup E_{\text{ext}}$. Кроме того, мы предполагаем, что оператор ориентации ∂ отображает внутреннее ребро $e \in E_{\text{int}}$ на пару $\partial e = (\partial_- e, \partial_+ e)$, состоящей его начальной и конечной вершин. В тоже время внешние ребра $e \in E_{\text{ext}}$ отображаются только на его начальную вершину $\partial e = \partial_- e$. Набор E_v ребер, смежных с v и степень $\deg v$ определяются, как указано выше. Заметим, что внешние ребра $e \in E_{\text{ext}}$ принадлежат только множеству E_v^- исходящих ребер с $v = \partial_- e$ [1, p 25].

2. Мы называем граф $G = (V, E, \partial, l)$ краевым, взвешенным, дискретным и внешним графом, если (V, E, ∂) является дискретным внешним графом, и $l: E \rightarrow (0, \infty]$ - функция длины такая, что:

$$E_{\text{int}} = \{e \in E \mid l_e < \infty\} \text{ и } E_{\text{ext}} = \{e \in E \mid l_e = \infty\} \quad (1.1.3)$$

Заметим, что для взвешенного дискретного внешнего графа мы можем интерпретировать внутренние ребра как ребра конечной длины, так и внешние ребра в виде ребер бесконечной длины с терминальными вершинами на «бесконечности». Мы будем часто использовать следующий элементарный факт о переупорядочении суммы по ребрам и вершинам, а именно:

$$\sum_{e \in E} f(\partial_+ e, e) = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E_v^+} f(v, e) \quad \text{и} \quad \sum_{e \in E_v^+} f(\partial_- e, e) = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E_v^-} f(v, e) \quad (1.1.4)$$

для функции $(v, e) \rightarrow f(v, e)$ в зависимости от v и $e \in E_v$ с условием, что сумма над пустым множеством равна 0. Заметим, что это равенство справедливо и для кратных ребер. Переупорядочение является биекцией, поскольку объединения $E_{\text{int}} = \bigcup_{v \in V} E_v^+$ и $E_{\text{int}} = \bigcup_{v \in V} E_v^-$ не пересекаются. Для графа с конечным множеством ребер следует соотношение:

$$2|E_{\text{int}}| + |E_{\text{ext}}| = \sum_{v \in V} \deg v \quad (1.1.5)$$

установив $f(v, e) = 1$. Для простоты предположим, что для остальной части этого раздела граф не имеет внешних ребер, т.е. $E = E_{\text{int}}$.

Сделаем следующее предположение о нижней границе длин ребер: всюду в этой работе мы предполагаем, что существует постоянная $l_- > 0$ такая, что

$$l_e \geq l_- \quad \forall e \in E \quad (1.1.6)$$

то есть весовая функция l^{-1} ограничена. Без ограничения общности и удобства мы будем считать, что $l_- \leq 1$.

1.2 Обобщенные лапласианы

Мы хотим ввести пространство вершин, позволяющее нам определить лапласоподобные комбинаторные операторы, мотивированные общими граничными условиями в вершинах метрических графов. Обычный дискретный (взвешенный) лапласиан определяется на скалярных функциях в $F:V \rightarrow \mathbb{C}$ определенных на вершинах V . Лапласиан определяется по формуле (1.1.7):

$$\ddot{\Delta} F(V) = -\frac{1}{\deg v} \sum_{e \in E_v} \frac{1}{l_e} (F(v_e) - F(v)) \quad (1.1.7)$$

где v_e обозначает смежную вершину с вершиной v вдоль ребра e . Обратите внимание, что $\ddot{\Delta}$ могут быть записаны также в виде $\ddot{\Delta} = d^* d$ где

$$\ddot{d}: l_2(V) \rightarrow l_2(E), \quad (\ddot{d} F)_e = F(\partial + e) - F(\partial - e) \quad (1.1.8)$$

Здесь пространства $l_2(V) = l_2(V, \deg)$ и $l_2(E) = l_2(E, l^{-1})$ имеют взвешенные нормы, определенные равенствами:

$$\|F\|_{l_2(V)}^2 := \sum_{v \in V} |F(v)|^2 \deg v \quad \text{и} \quad \|\eta_e\|_{l_2(E)}^2 := \sum_{e \in E} |\eta_e|^2 \frac{1}{l_e}, \quad (1.1.9)$$

На самом деле \ddot{d}^* обозначает сопряженный оператор относительно соответствующих внутренних произведений. Иногда мы ссылаемся на функции в $l_2(V)$ и $l_2(E)$ как на 0-формы и 1-формы в соответствующих пространствах. Мы хотели бы перенести приведенную выше концепцию на «пространство вершин», $l_2(V)$ к более общим вершинам $V = \bigoplus_v V_v$. Основная мотивация – это метрика графа и Лапласиана с общими граничными условиями на вершинах, как это определено в п. 1.1 и их отношения с дискретными графами [2].

1. Обозначим через $V_v^{\max} := \mathbb{C}^{E_v}$ максимальное пространство вершин в вершине $v \in V$ то есть значение $F(v) = \{F_e(v)\}_{e \in E_v} \in V_v^{\max}$ имеет $\deg v$ компоненты, по одному для каждого смежного ребра. Вершинное пространство в вершине v -линейное подпространство V_v из V_v^{\max} .

2. Соответствующие (итоговые) пространства вершин, связанные с графом (V, E, ∂) являются

$$V^{\max} := \bigoplus_{v \in V} V_v^{\max} \quad \text{и} \quad V := \bigoplus_{v \in V} V_v \quad (1.1.10)$$

соответственно. Элементы V также называются 0-формами. Пространство V имеет свою естественную норму Гильберта, а именно

$$\|F\|_V^2 := \sum_{v \in V} |F(v)|^2 = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E_v} |F_e(v)|^2. \quad (1.1.11)$$

Связанным с пространством вершин является ортогональная проекция $V_V^{\max} p := \bigoplus_{v \in V} p_v$ в V_V^{\max} где p_v - ортогональная проекция в V_V^{\max} на V_v^{\max} .

3. Назовем общее подпространство V из V^{\max} локальным, если он разлагается относительно $V^{\max} = \bigoplus_v V_v^{\max} = \bigoplus_v V_v^{\max}$ то есть если $V = \bigoplus_v V_v$ и $V_v \subset V_v^{\max}$. Аналогично, оператор A на V называется локальным, если он разложен относительно указанной прямой суммы.

4. Двойное вершинное пространство, связанное с V определяется формулой $V^\perp := V^{\max} \ominus V$ и имеет проекцию $p^\perp = I - p$.

Заметим, что локальное подпространство V замкнуто, поскольку $V_v \leq V_v^{\max}$ конечномерная. Альтернативно, пространство вершин характеризуется фиксацией ортогонального проектора p в V , который является локальным. Это следует из соответствующих обозначений на метрическом графе, можно назвать пару (G, V) - дискретный квантовый граф.

1.3 Примеры

Названия вершинных пространств в примерах взяты из соответствующих примеров в случае метрического графа см. ниже. Для более общих случаев лапласианы, определенные на вершинных пространствах вводятся аналогично к примеру дискретный магнитный лапласиан введем в [3].

1. Выбор приводит $V_v = \square(V) = \square(1, \dots, 1)$, к стандартному пространству вершин, которая обозначается V_v^{std} . Пространство V_v^{std} также называют непрерывным вершинным пространством или вершинным пространством Кирхгофа. Связанная проекция

$$p_v = \frac{1}{\deg v} E \quad (1.1.12)$$

где E обозначает квадратную матрицу ранга $\deg v$. Этот случай соответствует стандартному дискретному случаю, упомянутому ранее. А именно, естественная идентификация

$$V_v^{std} := \bigoplus_v V_v^{std} \rightarrow l_2(V), F \rightarrow \tilde{F}, \tilde{F}(v) := F_e(v),$$

(последнее значение не зависит от $e \in E_v$) изометрична, так как взвешенная норма в $l_2(V)$ и норма в G^{std} согласованы, т.е.

$$\|F\|_{V^{std}}^2 = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E_v} |F_e(v)|^2 = \sum_{v \in V} |\tilde{F}(v)|^2 \deg v = \|\tilde{F}\|_{l_2(v)}^2 \quad (1.1.13)$$

2. В более общем смысле, мы можем исправить вектор $p(v) = \{p_e(v)\}_{e \in E_v}$ с неотрицательными записями $p_e(v) \neq 0$ и определим взвешенное стандартное пространство вершин на $V^p := p(v)$. $V_v^p := \square p(v)$. Соответствующая проекция дается выражением:

$$F(v) = \frac{1}{|p(v)|^2} \langle p(v), F(v) \rangle p(v) \quad (1.1.14)$$

как и в предыдущем примере, мы имеем изометрию

$$V^p := \bigoplus_v V_v^{p(v)} \rightarrow l_2(V, |p|^2), F \rightarrow \tilde{F}, \tilde{F}(v) := \frac{F_e(v)}{p_e(v)}$$

(последнее значение не зависит от $e \in E_v$), поскольку

$$\|F\|_{V^p}^2 = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E_v} |F_e(v)|^2 = \sum_{v \in V} |\tilde{F}(v)|^2 |p(v)|^2 = \|\tilde{F}\|_{l_2(v, |p|^2)}^2$$

3. Частный случай взвешенного стандартного вершинного пространства задается векторами $p(v)$ такими, что $|p_e(v)| = 1$. Мы называем такое пространство вершин магнитное возмущение размерности один. Примером является следующее: пусть $\alpha \in \mathbb{R}^E$ функция, связывающая каждое ребро e , магнитный векторный потенциал $\alpha_e \in \mathbb{R}$ и положим:

$$p_e(v) = e^{-i\alpha \frac{e(v)}{2}} \quad (1.1.15)$$

где $\alpha_e(v) := \pm \alpha_e$ если $v = \partial^\pm e$. Мы называем связанное пространство вершин $V_v^{\max, \alpha}$ магнитным.

4. Мы называем $V_v^{\min} := 0$ минимальное пространство вершин или пространство вершин Дирихле. Так же, V^{\max} называется максимальным вершинным пространством или вершинным пространством Неймана. Соответствующие проекции $P := 0$ и $P := 1$.

5. Предположим, что $\deg v = 4$ и определим пространство вершин размерности 2 на

$$V_v = C(1,1,1,1) \oplus C(1,i,-1,-i) \quad (1.1.16)$$

соответствующий ортогональный проектор $V_v^{mag.a}$

$$P_v = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 0 & 1-i \\ 1-i & 2 & 1+i & 0 \\ 0 & 1-i & 2 & 1+i \\ 1+i & 0 & 1-i & 2 \end{pmatrix}.$$

В примере (2) мы покажем некоторые свойства инвариантности этого пространства вершин. В отличие от стандартного пространства вершин наше пространство вершин может «отделить» некоторые или все смежные ребра $e \in E_v$ в вершине V . Например, если пространство вершин V_v^{max} . Разбиение здесь означает, что мы можем разбить граф в пространстве вершин V_v так, что соответствующий проектор p_v имеет блочную структуру нетривиального разложения $V_v = V_{1,v} \oplus V_{2,v}$. Назовем пространство вершин V_v без такого разложения неприводимым.

Аналогично, мы говорим, что $V = \bigoplus_v V_v$ неприводим, если все его локальные подпространства V_v неприводимы. Для более подробной информации мы ссылаемся на [4]. Мы показали следующий результат о симметрии пространства вершин:

Предложение 1. Предположим, что пространство V_v вершин. Вершина V со степенью $d = \deg v$ инвариантна относительно перестановок координат $e \in E_v$, затем V_v является одним из пространств $V_v^{min} := 0, V_v^{max} := C^{E_v}, V_v^{std} = (1, \dots, 1)$ or $(V^{std})^\perp$, $V_v^{std} = \square (1, \dots, 1)$ or $(V^{std})^\perp$, то есть только минимальные, максимальные, стандартные и двойные стандартные вершинные пространства инвариантны.

Предложение 2. Предположим, что пространство вершин V_v . Вершина V со степенью $d = \deg v$ инвариантна относительно циклической перестановки координат $e \in E_v = \{e_1, \dots, e_d\}$, то есть если $e_i \rightarrow e_{i+1}$ и $e_d \rightarrow e_1$, тогда V_v -ортогональная сумма пространств вида:

$$V_v^k = (1, \theta^k, \theta^{2k}, \theta^{3k}, \dots, \theta^{(d-1)k}) \text{ в } k = 0, \dots, d-1, \text{ где } \theta = e^{\frac{2\pi i}{d}}.$$

$$V_v^k = \square (1, \theta^k, \theta^{2k}, \theta^{3k}, \dots, \theta^{(d-1)k}) \text{ в } k = 0, \dots, d-1, \text{ Где } \theta = e^{\frac{2\pi i}{d}}.$$

Доказательство. (Теоретико-множественные) неприводимые векторные пространства, инвариантные относительно циклической группы, одномерные

(так как циклическая группа абелева) и имеют форму V_v^k как указано выше. Мы называем V_v^k магнитным возмущением V_v^{std} , то есть компоненты генерирующего вектор $(1, \dots, 1)$ умножаются на фазовый коэффициент.

1. Если мы требуем, чтобы пространство вершин V_v является циклическим инвариантом с вещественными коэффициентами в соответствующих проекциях, тогда V_v охватывает либо $(1, \dots, 1)$ или же $(1, -1, \dots, 1, -1)$ (если d четный) или и то, и другое. Но сумма не является неприводимым, так как

$$V_v = (1, \dots, 1) \oplus (1, -1, \dots, 1, -1) = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0) \oplus (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} V_v &= \square (1, \dots, 1) \oplus \square (1, -1, \dots, 1, -1) \\ &= \square (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0) \oplus \square (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

и последние два пространства являются стандартными со степенью $\frac{d}{2}$. Другими словами, неприводимый граф в V связанные с граничным пространством V_v разбивает вершину V в две вершины v_1 и v_2 рядом с краями с четными и нечетными метками, соответственно. Соответствующие пространства вершин являются стандартными.

2. Сумма двух циклических инвариантных пространств не всегда приводима: возьмем циклическое инвариантное пространство вершин $V_v = V_v^0 \oplus V_v^1 \subset C^4$ $V_v = V_v^0 \oplus V_v^1 \subset \square^4$ размерности 2, приведенное в следующем примере

Обратите внимание, что V_v неприводимо, так как соответствующий проектор P_v не имеет блочной структуры. Это пространство вершин, возможно, является самым простым примером (циклически инвариантного) неприводимого пространства вершин, не являющегося стандартным или двойственным стандартом. Заметим, что если $diag_v = 3$, то неприводимое пространство вершин является либо стандартным, либо двойным стандартным (или соответствующей версией с весами и магнитными возмущениями, например. $(1, \dots, 1)$ заменен вектором $p(v)$ с ненулевыми элементами [5].

1.4 Операторы, связанные с пространствами вершин

Определим теперь обобщенный граничный оператор или внешнюю производную, связанную с пространством вершин. Мы ниже используем эту внешнюю производную для определения связанного оператора Лапласа.

Определение. Пусть V -пространство вершин графа G . Внешняя производная на V определяется через

$$\ddot{d}_v : l_2(V) \rightarrow l_2(E), \quad (\ddot{d}_v F)_e = F_e(\partial + e) - F_e(\partial - e)$$

отображение 0-форм на 1-формы.

Мы часто отбрасываем индекс для пространства вершин или записываем \ddot{d}_{std} вместо $\ddot{d}_{v_{std}}$ и так далее. Доказательство следующей леммы вытекает из определения (1.1.1).

Лемма. Предположим, что нижние длины связаны с отношением (1.1.3), то оператор \ddot{d} нормирован на $\sqrt{\frac{2}{l_-}}$. Сопряженный оператор $\ddot{d}_v^* : l_2(E) \rightarrow V$ имеет ту же норму и задается формулой (1.1.17):

$$(\ddot{d}^* \eta) = P_v \left(\left\{ \frac{1}{l_e} \eta_e(v) \right\}_{e \in E_v} \right) \in V_v \quad (1.1.17)$$

где $\eta_e(v) := \pm \eta_e$ если $v = \partial \pm e$ обозначает ориентированную оценку η_e в вершине v

Определение 1.1.10. Дискретный обобщенный Лапласиан, связанный с вершинным пространством V определяется формулой $\ddot{\Delta}_v := \ddot{d}_v^* \ddot{d}_v$, то есть

$$\backslash (\ddot{\Delta}_v F)(v) = P_v \left(\left\{ \frac{1}{l_e} F_e(v) - F_e(v_e) \right\}_{e \in E_v} \right)$$

$F \in V$, где V_e обозначает вершину на $e \in E_v$ напротив v [5, p. 429].

Замечание 1.1.11

1. Из леммы следует, что $\ddot{\Delta}_v$ - ограниченный неотрицательный оператор на V с нормой, оцениваемой сверху $\frac{2}{l}$. В частности, $\sigma(\ddot{\Delta}_v) \subset \left[0, \frac{2}{l} \right]$.

2. Мы также можем определить лапласиан $\ddot{\Delta}_v := \ddot{d}_v^* \ddot{d}_v$ действуя в пространстве «1-форм» $l_2(E)(\Delta_v^0 := \ddot{\Delta}_v = \ddot{d}_v^* \ddot{d}_v)$. Для получения более подробной информации и соответствующей супер симметричной настройки [3, p. 824]. В частности, у нас есть $\sigma(\ddot{\Delta}_v) \setminus \{0\} = \sigma(\ddot{\Delta}_v) \setminus \{0\}$. Более того, мы обсуждали, как эти обобщенные лапласианы может использоваться для анализа (стандартного) лапласиана на линейном графике и граф подразделения, связанный с Γ [6]. Следующий пример показывает, что мы действительно имеем обобщение стандартного дискретного лапласиана:

1. Для стандартного пространства вершин V^{std} , удобно использовать унитарное преобразование из V^{std} на $l_2(V)$, ассоциируясь с $F \in V$ (общее значение) $\tilde{F}(v) := F_e(v)$, как в Примере (1). Тогда внешняя производная \ddot{d}_{std} и прилегающий \ddot{d}_{std}^* унитарно эквивалентны

$$\ddot{d} : l_2(v) \rightarrow l_2(e), \quad (\ddot{d}\tilde{F})_e = \tilde{F}(\partial + e) - \tilde{F}(\partial - e)$$

и

$$(\ddot{d}^* \eta)(v) = \frac{1}{\deg v} \sum_{e \in E_v} \frac{1}{l_e} \eta_e(v),$$

то есть \ddot{d} - классический граничный оператор, уже определенный в (1.5), и \ddot{d}^* сопряженный оператор. Более того, соответствующий дискретный лапласиан $\ddot{\Delta}_{std} := \ddot{\Delta}_{V^{std}}$ унитарно эквивалентно обычному дискретному лапласиану $\ddot{\Delta}_{std} := \ddot{d}^* \ddot{d}$ определяемому согласно (1.4). Аналогично для взвешенного стандартного пространства вершин V^p с участием $p_e(\partial_- e) = p_e(\partial_+ e) = p_e$, обобщенный дискретный лапласиан, в пространстве $l_2(V, |p|^2)$ выражается формулой

$$\ddot{\Delta}_p \tilde{F}(v) = - \frac{1}{|p(v)|^2} \sum_{e \in E_v} \frac{|p_e|^2}{l_e} (\tilde{F}(v_e) - F(v)), \quad (1.1.18)$$

где $|p(v)|^2 = \sum_{e \in E_v} |p_e(v)|^2$. Для магнитно-возмущенного стандартного вершинного пространства имеем

$$(\ddot{\Delta}_{mag, \alpha} \tilde{F})(v) = - \frac{1}{\deg v} \sum_{e \in E_v} \frac{1}{l_e} (e^{+i\alpha_e(v)} \tilde{F}(v_e) - F(v)),$$

Который является дискретным магнитным лапласианом, связанный с магнитным потенциалом $\alpha = \{\alpha_e\}_e$. Отметим, что периодическое θ -граничное условие теории Флоке приводит к магнитному возмущению вершинного пространства.

2. Для минимального пространства вершин $V^{\min} = 0, \ddot{d}^* = 0$ и $\ddot{\Delta}_{V^{\min}} = 0$ Для максимального пространства вершин имеем

$$(\ddot{\Delta}_{V^{\max}} F)_e(v) = \left\{ \frac{1}{l_e} (F_e(v) - F_e(v_e)) \right\}_{e \in E_v}$$

и

$$\ddot{\Delta}_{V^{\max}} \cong \bigoplus_{e \in E} \ddot{\Delta}_e,$$

где

$$\ddot{\Delta}_{V^{\max}} \cong \frac{1}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

В частности, в обоих случаях лапласианы разделяются, и любая информация о соединении графа теряется. Предположим теперь, что граф равносторонний и у графа нет кратных ребер. Тогда мы можем записать лапласиан в виде

$$\ddot{\Delta}_V = 1 - M_V, \dots, M_V := PA^{\max},$$

где $M_V : V \rightarrow V$ называется основной частью обобщенного дискретного лапласиана и $A^{\max} : V^{\max} \rightarrow V^{\max}$ обобщенная матрица смежности, определяемая

$$A^{\max} \{F(w)\}_w = \{A^{\max}(v, w)F(w)\}_v, \quad A^{\max}(v, w) : \square^{E_w} \rightarrow \square^{E_v}$$

$$A^{\max} \{F(w)\}_w = \{A^{\max}(v, w)F(w)\}_v, \quad A^{\max}(v, w) : C^{E_w} \rightarrow C^{E_v}$$

для $F \in V^{\max}$. Более того, $A^{\max}(u, v) = 0$ если u и w не соединены ребром и

$$A^{\max}(v, w)_{e, e'}, \quad e \in E_v, e' \in E_w.$$

В частности, граф записанный в виде матрицы, $A^{\max}(v, w)$ имеет только одну запись 1, а все остальные равны 0. Тогда основная часть лапласиана имеет вид

$$(M_V F)(v) = \sum_{e \in E_v} A_v(v, v_e) F(v_e),$$

$F \in V$ аналогично форме главной части стандартного лапласиана, определенного для $V^{std} \cong l_2(V)$ где $A_v(v, w) := p_v A^{\max}(v, w) p_w : V_w \rightarrow V_v$ эквивалентно,

$$M_V = \bigoplus_{v \in V} \sum_{w \in V} A_v(v, w) \tag{1.1.19}$$

где сумма фактически распространяется только по тем вершинам w , которые связаны с v . В частности, в стандартном случае $V = V^{std}$, матрица $A_{v^{std}}(v, w)$ состоит только из одной записи, так как $V_v^{std} \cong C(\deg v)$ изометрично. А именно у нас есть $A_{v^{std}}(v, w) = 1$ если v и w связаны, и 0 в противном случае, т.е. $A_{v^{std}}$ является (унитарно эквивалентным) стандартным оператором смежности в $l_2(V)$. Вернемся к общей ситуации (т.е. к общей длине l_2 и, возможно, кратным ребрам). Пусть G - дискретный граф. Определим гильбертову цепь, связанную с вершинным пространством v на G , как

$$\varphi(G, V) : 0 \rightarrow V \rightarrow l_2(E) \rightarrow 0$$

Очевидно, условие цепочки выполняется тривиально, поскольку только один оператор не равен нулю. В этой ситуации, поскольку мы имеем дело с Гильбертовыми пространствами, соответствующие пространства когомологий (с коэффициентами в \mathbb{C}) могут быть определены следующим образом:

$$H^0(G, V) := \ker \ddot{d}_V \cong \ker \ddot{d}_V / \text{ran} 0,$$

$$H^0(G, V) := \ker \ddot{d}_V \cong \ker \ddot{d}_V / \text{ran} 0,$$

$$H^1(G, V) := \ker \ddot{d}_V^* = (\text{ran} \ddot{d}_V)^\perp \cong \ker 0 / \text{ran} \ddot{d}_V,$$

где $A := A(H_1)$ обозначают множества образом оператора $A: H_1 \rightarrow H_2$. Индекс или Эйлерова характеристика цепи Гильберта $\varphi(G, V)$ определяется формулой:

$$\text{ind}(G, V) := \dim \ker \ddot{d}_V - \dim \ker \ddot{d}_V^*,$$

То есть индекс Фредгольма оператора \ddot{d}_V конечен при условии, что обе размерностей $\dim \ker \ddot{d}_V, \dim \ker \ddot{d}_V^*$, конечны. Обратите внимание, что для стандартного пространства вершин $V^{\text{std}} \cong l_2(V)$, внешняя производная просто унитарно эквивалентна классическому граничному оператору, определенному в (1.1.5). В частности, соответствующие пространства гомологий являются классическими и $\dim H^p(G, V^{\text{std}})$ подсчитывает количество компонент ($p=0$) и ребер, не входящих в остовное дерево ($p=1$). Используя устойчивость индекса к непрерывным возмущениям, мы можем вычислить индекс через простые (разделенные) модельные пространства и получить следующий результат [3, р. 823; 4, р. 109]; в качестве альтернативы мы можем применить стандартные аргументы из линейной алгебры:

Предложение. Пусть V -пространство вершин, ассоциированное с конечным дискретным графом, $G = (V, E, \partial)$ то $\text{ind}(G, V) = \dim V - |E|$. Обратите внимание, что, в частности, если $V = V^{\text{std}}$, т.е. если $V \cong l_2(V)$ стандартное пространство вершин, мы восстанавливаем известную формулу для (стандартных) дискретных графов, а именно $\text{ind}(G, V^{\text{std}}) = |V| - |E|$ например, индекс равен эйлеровой характеристике $\chi(G) := |V| - |E|$ графа G . С другой стороны, в «крайних» случаях имеем $\text{ind}(G, V^{\text{max}}) = |E|$ и $\text{ind}(G, V^{\text{min}}) = -|E|$. Так как тускло $V^{\text{max}} = \sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$ и тусклый $\varphi^{\text{min}}(0)$. Отметим, что первый индекс равен эйлеровой характеристике «разъединенного» графа G^{dec} состоящего из несвязного объединения графов $G_e = (\partial e, e)$ имеющих только две вершины и одно ребро, то есть $\text{ind}(G, V^{\text{max}}) = \chi(G^{\text{dec}}) = \sum_e \chi(G^{\text{dec}}) = |E|$ так как $\chi(G_e) = 2 - 1 = 1$.

Аналогично, второй индекс равен относительной эйлеровой характеристике, то есть $\text{ind}(G, V^{\text{min}}) = \chi(G^{\text{dec}}, \partial G^{\text{dec}}) := \chi(G^{\text{dec}}) - \chi(\partial G^{\text{dec}}) = -|E|$, где $(\partial G^{\text{dec}}) = \cup_e \partial G_e$ и $\partial G_e = \partial e$

В [3, p. 823-825] мы установили общий результат о когомологиях двойственного V^\perp к вершинному пространству V . Это показывает, что собственно V^\perp и ориентированная версия, V т.е. $V = \{F \in V^{\max} \setminus F \in \varnothing\}$, связаны.

Предложение 1.1.14. Предположим, что глобальная оценка длины:

$$l_- \leq l_e \leq l_+ \text{ для всех } e \in E \quad (1.1.20)$$

выполняется для некоторых констант $0 < l_- < l_e \leq l_+ < \infty$. $0 < l_- < l_e \leq l_+ < \infty$. Тогда $H^0(G, V^\perp)$ и $H^1(G, V^\perp)$ изоморфны. В частности, если G конечна, то в $(G, \varphi^\perp) = -ind(G, V)$.

Ориентация также учитывается в случае метрического графа, [6, p. 469].

1.5 Метрические графы, квантовые графы и связанные с ними операторы

В этом пункте мы приводим основные понятия для метрических и квантовых графов и выводим некоторые общие утверждения, которые понадобятся позже. Большая часть материала является стандартным, и мы обращаемся к литературе для получения дополнительных результатов и ссылок, например [7].

Определение 1.5.1. Пусть $G = (V, E, \partial)$ дискретный (внешний) граф. Топологический граф G^{top} связанный с G , представляет собой комплекс CW , содержащий только 0-клетки и 1-клетки, такой, что 0-клетки являются вершинами V , а 1-клетки помечены множеством ребер E , соблюдая структуру графа. Метрический график G^{met} связанный с взвешенным дискретным графом (V, E, ∂, l) топологический граф связан с таким (V, E, ∂) , что для каждого ребра $e \in E$ есть непрерывная карта

$$\Phi_e : I_e \rightarrow G^{met}, I_e := [0, l_e] (\text{resp. } I_e := [0, \infty) \text{ if } e \in E_{ext}),$$

такой, что $\Phi_e(I_e) - 1$ - клетка, соответствующая e , а ограничение $\Phi_e : I_e \rightarrow \Phi_e(I_e) - 1$ - гомеоморфизм. Отображения Φ_e индуцируют метрику на G^{met} . Таким образом G^{met} становится метрическим пространством [4, p. 110].

Из-за злоупотребления обозначениями мы опускаем метки и для топологического и метрического графа, связанного с дискретным взвешенным графом, $(\cdot)^{top}$ и $(\cdot)^{met}$ просто пишем G или (V, E, ∂, l) . Учитывая взвешенный дискретный граф, мы можем абстрактно построить ассоциированный метрический граф как несвязное объединение интервалов I_e для всех $e \in E$ и соответствующие отождествления концов этих интервалов (согласно комбинаторной структуре графа), а именно:

$$G^{met} = \bigcup_{e \in E} I_e / C \quad (1.2.1)$$

обозначим объединение 0-клеток и объединение (открытых) 1-клеток (ребер) через G^0 и G^1 т.е. и оба подпространства канонически вложены в G^{met} .

Замечание 1.2.2

1. Метрический граф G^{met} канонически становится метрическим пространством, определяя расстояние между двумя точками как длину кратчайшего пути в G^{met} , присоединяясь к этим пунктам. Мы можем думать о картах $\Phi_e : l_e \rightarrow G^{met}$ как координатные отображения и меры Лебега ds_e на интервалах l_e индуцируют на пространстве G^{met} (Лебегову) меру. Мы часто опускаем карту координат Φ_e например, для функций f на G^{met} мы просто пишем $f_e := f \circ \Phi_e$ для соответствующей функции на l_e . Если ребро e ясно из контекста, мы также опускаем метку $(\cdot)_e$.

2. Обратите внимание, что два метрических графа G_1^{met} и G_2^{met} могут быть изометричными как метрические пространства, так что лежащие в основе дискретные графы G_1 и G_2 не изоморфны: метрика на метрическом графе G_1^{met} не может различить единственное ребро e длины l_e в G_1 и два ребра e', e'' длины $l_{e'}, l_{e''}$ с $l_e = l_{e'} + l_{e''}$ соединена вершиной степени 2 в G_2 : базовые графы не (обязательно) изоморфны. Обсуждение этого вопроса в [8].

Поскольку метрический граф является топологическим пространством и изометричен интервалам вне вершин, мы можем ввести понятие измеримости и дифференцировать функцию на ребрах. Начнем с основного гильбертова пространства

$$L_2(G) := \bigoplus_{e \in E} L_2(I_e) \quad \text{и} \quad \|f\|^2 = \|f\|_{L_2(G)}^2 := \sum_{e \in E} \int_{l_e} |f_e(s)|^2 ds,$$

где $f = f\{f_e\}_e$ с $f_e \in L_2(I_e)$ Чтобы определить подобные лапласиану дифференциальные операторы в гильбертовом пространстве $L_2(G)$ мы вводим максимальное пространство Соболева или отделенное пространство Соболева порядка k как

$$H_{\max}^k(G) := \bigoplus_{e \in E} H^k(I_e), \quad \|f\|_{H_{\max}^k(G)}^2 := \sum_{e \in E} \|f_e\|_{H^k(I_e)}^2$$

где $H^k(I_e)$ классическое пространство Соболева на отрезке I_e , то есть пространство функций с (слабыми) производными по $L_2(I_e)$ на заказ k . Мы определяем неориентированную оценку в вершине и ориентированную оценку в вершине f на ребре e в вершине v как

$$\xrightarrow{f} e(v) := \begin{cases} f_e(0), & \text{if } v = \partial - e, \\ f_e(l(e)), & \text{if } v = \partial + e, \end{cases} \quad \text{и} \quad \xrightarrow{f} e(v) := \begin{cases} -f_e(0), & \text{if } v = \partial - e \\ f_e(l(e)), & \text{if } v = \partial + e \end{cases}$$

обратите внимание, что $\xrightarrow{f} e(v)u \xrightarrow{f} e(v)$ определены для $f \in H_{\max}^1(G)$. Напомним, что $V^{\max} = \bigoplus_v V_v^{\max} = \bigoplus_v C^{E_v}$.

Лемма 1.2.3. Предположим, что нижняя оценка длины (1.3), тогда операторы вычисления:

$$\bullet: H_{\max}^1(G) \rightarrow V^{\max}, \quad \bullet: H_{\max}^1(G) \rightarrow V^{\max},$$

$$f \rightarrow \underline{f} = \left\{ \left\{ \underline{f}_e(v) \right\}_{e \in E_v} \right\}_v \in V^{\max} \text{ и } f \rightarrow \underline{f} = \left\{ \left\{ \underline{f}_e(v) \right\}_{e \in E_v} \right\}_v \in V^{\max}$$

ограничены $\left(\frac{2}{l}\right)^{1/2}$.

Доказательство. По следствию А.1.18 ограниченность отдельного оператора оценки $H^1(I_e) \rightarrow C, f_e \rightarrow \pm f_e(v)$ ограничен $\left(\frac{2}{\min\{1, l_e\}}\right)^{1/2}$.

Непосредственно следует ограниченность глобальных операторов вычисления. Эти две оценочные карты позволяют составить очень простую формулу (1.2.2) формулы частичного интегрирования на метрическом графе, а именно

$$\langle f, g' \rangle_{L_2(G)} = \langle f, -g' \rangle_{L_2(G)} + \langle f, g' \rangle_{V^{\max}}, \quad (1.2.2)$$

где $f' = \{f'_e\}_e$ и аналогично для g . В основном формуле следует из частичного интегрирования на каждом интервале I_e и переупорядочивание суммы, как в (1.10).

Замечание 1.2.4. Если мы различаем функции (0-формы) и векторные поля (1-формы), мы можем сказать, что 0-формы оцениваются неориентированными, тогда как 1-формы оцениваются ориентированными. Таким образом, мы должны интерпретировать f' и g как 1-формы и f, g' , как 0-формы. Давайте теперь введем другие данные для определения операторов на метрическом графе [5, р. 429].

Определение 1.2.5. Квантовый граф (G, V) задается метрическим графом вместе с пространством вершин V , ассоциированным с G (например локальное подпространство V^{\max} (Определение 1.1.3). В частности, квантовый граф фиксируется данными (v, E, ∂, l, V) . Обратите внимание, что в литературе [9] квантовый граф иногда определяется как метрический граф вместе с самосопряженным (псевдо) дифференциальным оператором, действующим на нем. Это определение является более общим, поскольку мы ассоциируем только лапласиан ΔV определенный ниже квантовым графом (G, V) . Связано с квантовым графом (G, V) , определим пространства соболева

$$H_V^k(G) = \{f \in H_{\max}^k(G) \setminus f \in V\} \text{ и } H_V^k(G) := \{f \in H_{\max}^k(G) \setminus f \in V\}$$

по лемме 1.2.3 эти пространства замкнуты в $H_{\max}^k(G)$ как прообраз замкнутого подпространства V и ограниченных операторов и соответственно и следовательно, сами Гильбертовы пространства. На пространстве Соболева $H_V^1(G)$, мы можем переписать вершинный член в формуле частичного интегрирования (1.1.11) и получить

$$\langle f', g \rangle_{L_2(G)} = \langle f, -g' \rangle_{L_2(G)} + \langle \underline{f}, p \underline{g} \rangle_V \quad (1.2.3)$$

За $f \in V$ и $g \in V^{\max}$ где p обозначают ортогональную проекцию V в V^{\max}

Давайте теперь имитируем концепцию внешней производной:

Определение 1.2.6. Внешняя производная, связанная с квантовым графом (G, V) и неограниченный оператор d_V в $L_2(G)$ определяются $d_V f = f'$ для $f \in \text{dom} d_V = H_V^1(G)$

Замечание 1.2.7

1. Обратите внимание, что d_V - замкнутый оператор (например его график замкнут по $L_2(G) \oplus L_2(G)$, поскольку $H_V^1(G)$ являются Гильбертовым пространством, а норма графика $d = d_V$. $\|f\|_d^2 = \|df\|^2 + \|f\|^2$, норма Соболева, например $\|f\|_d = \|f\|_{H_{\max}^1(G)}$

2. Мы можем рассматривать d как оператор, отображающий 0-формы в 1-формы. Очевидно, что на одномерном гладком пространстве в этом различии нет необходимости, но различие между 0- и 1-формами имеет смысл через условия вершин $f \in V$, следующую лемму. Примыкающий к d_V легко вычисляется по формуле частичного интегрирования (1.1.12), а именно по вершинному члену $p \underline{g}$ обращается в нуль для функций g в области значений d_V^*

Лемма 1.2.8. Сопряжение к d_V дается выражением $d_V^* g = -g'$ с доменным именем $d_V^* g = H_V^1(G)$. Что касается дискретных операторов, мы определяем лапласиан через внешнюю производную.

Определение 1.2.9. Лапласиан, связанный с квантовым графом (G, V) определяется формулой

$$\Delta_V = \Delta_{(G, V)} = d_V^* d_V$$

с доменным именем $\Delta_V = \{f \in \text{dom} d_V \setminus d_V f \in \text{dom} d_V^*\}$ Соберем несколько простых фактов о лапласиане.

Предложение 1.2.10. Пусть (G, V) - квантовый граф с нижней границей длины в $f_e l_e \geq l_-, l_- \in (0, 1]$

1. Лапласиан $\Delta_V = d_V^* d_V$ самосопряженный и неотрицательный. Более того, лапласиан - это оператор, связанный с замкнутой квадратичной формой

$$\partial_V(f) = \|d_V f\|_G^2 \text{ и домен } \partial_V = H_V^1(G)$$

2. Область лапласиана $\Delta_V = d_V^* d_V$ дан

$$\text{dom}\Delta_V = \{f \in H_{\max}^2(G) \setminus f \in V, f \in V^\perp\}$$

Доказательство. Самосопряженность непосредственно следует из определения лапласиана. Более того,

$$\langle f, \Delta_V g \rangle = \langle d_V f, d_V g \rangle = \partial_V(f, g)$$

для всех $f \in \text{dom}d_V$ и $g \in \text{dom}\Delta_V$. Следовательно, Δ_V - оператор, ассоциированный с V (теорему 1.1.1). Наконец, характеристизацию области легко увидеть с помощью леммы 1.2.8. Состояние $f \in V, f \in V^\perp$ будем называть вершинным условием, и аналогично $f(v) \in V_v, f(v) \in V_v^\perp$ условие вершины в вершине V . Важным примером является квантовый граф со стандартным пространством вершин

$$V^{std} = \bigoplus_v V_v^{std}, \quad V^{std} = C(1, \dots, 1) \subset C^{E_v} \quad (1.2.4a)$$

соответственно его взвешенная версия

$$V^p = \bigoplus_v V_v^{p(v)}, \quad V_v^{p(v)} = Cp \quad V_v^{p(v)} = Cp(v) \quad (1.2.4b)$$

где $p(v) = \{p_e(v)\}_{e \in E_v}$, $p_e(v) \neq 0$. Обратите внимание, что $H_{V^{std}}^1(G)$ состоит из непрерывных функций на топологическом графе G .

На каждом ребре имеется вложение $H^1(I_e) \subset c(I_e)$ например f уже непрерывно внутри каждого ребра. Более того, оценка $f_e(v)$ не зависит от $e \in E_v$. По этой причине мы V^{std} также называем непрерывным пространством вершин [7, p. 4887].

Следствие 1.2.11. Пусть (G, V^p) - квантовый граф со стандартным взвешенным пространством вершин V^p и более низкие длины связаны в

$$f_e l_e \geq l, l \in (0, 1]$$

1. Область сопряженного $d_p^* := d_{V^p}^*$

$$dom d_p^* = \left\{ g \in H_{\max}^1(G) \mid \sum_{e \in E_v} p_e(v) g_e(v) = 0 \quad \forall v \in V \right\}$$

2. Область определения лапласиана $\Delta_p = \Delta_{V,p}$

$$dom \Delta_p = \left\{ f \in H_{\max}^2(G) \mid f(v) p(v), \sum_{e \in E_v} p_e(v) f_e(v) \quad \forall v \in V \right\}$$

В частности, функция f находится в области определения стандартного лапласиана или лапласиана Кирхгофа $\Delta_{std} = \Delta_{V,std}$ если только

$$f \in H_{\max}^2(G), f$$

непрерывна и если условие потока на производные

$$\sum_{e \in E_v} f_e'(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Выполняется [1, р. 10].

1. Сделаем короткое замечание об экстремальных пространствах вершин.

$$V_v^{\max} = C^{E_v} \text{ и } V_v^{\min} = 0$$

Предположим, что квантовый граф имеет $V^{\max/\min}$ как пространство вершин в вершине V . Тогда соответствующий лапласиан удовлетворяет условиям вершины

$$f_e(v) = 0 \quad \forall e \in E_v, \quad f_e'(v) = 0 \quad \forall e \in E_v,$$

то есть функция f выполняет индивидуальную функцию Дирихле соответственно условиям вершины Неймана в вершине V . Отсюда и название «пространство вершин Дирихле». Пространство вершин Неймана в примере 1.1.4 (4).

В частности, если $V = 0$ $V = V^{\max}$ - минимальное и максимальное пространства вершин, то

$$\Delta_0 = \bigoplus_e \Delta_I^{e} \quad \text{и} \quad \Delta = \bigoplus_e \Delta_I$$

соответственно, то есть операторы развязаны. Вот Δ_I^{e} является лапласианом на I_e с граничными условиями Дирихле на ∂I_e и аналогично, Δ_I является лапласианом на I_e с граничными условиями Неймана на ∂I_e .

2. Если $\deg v = 2$ и $V_v = (1,1)$ то функции f в области определения ассоциированного лапласиана «не видят» условия вершины в V : а именно, f и непрерывны вдоль вершины при соответствующей ориентации двух ребер $e_1, e_2 \in E_v$. В частности, можно соединить два ребра в один край длиной $l_e = l_{e_1} + l_{e_2}$ и опустим вершину V (посмотреть также замечание 1.2.2).

3. Существуют и другие возможности определения самосопряженных расширений лапласиана, Например [10-13] и (4) ниже. В частности, для самосопряженного (ограниченного) оператора L на V можно определить самосопряженный лапласиан $\Delta_{(V,L)}$ с доменом

$$\text{dom}\Delta_{(V,L)} = \{f \in H_V^2(G) \mid pf = Lf\}$$

где P - проекция в V^{\max} в космос V . Условия вершины $f \in V$ и $pf = Lf$ в вершине V разбивается на три разные части, а именно часть Дирихле $f \in V$, часть Неймана $P\hat{f} \in (\ker L)^\perp \subset V$ и часть Робина $p\bar{f} = Lf$ на с

$$\tan_z(s) = \tan(\sqrt{z}s) \cot_z(s) = \cot_z(\sqrt{z}s) \quad (1.2.8b)$$

Если граница состоит из всех вершин, то есть $\partial G = V$ то мы можем дать явные формулы для оператора решения Дирихле и отображения Дирихле-Неймана (обозначения посмотреть в разделе 1.4, аналогичные результаты можно найти в [6, р. 469]). Обратите внимание, что в этом случае граница пространство граничной тройки совпадает со всем пространством вершин, например $G = V$.

Предложение 1.2.19. Предположим, что (G,V) квантовый граф с границей $\partial G = V$ и нижняя граница длины $l_e \geq l$ для некоторых $l \in (0,1]$.

1. Оператор Дирихле Δ^D связанный с граничной тройкой (Γ, Γ', V) - Лапласиан, связанный с минимальным пространством $V^{\max} = 0$ вершин, т.е. (5). Нам также понадобится аналитическое продолжение в $z = 0$ т.е. мы установили

$$\sin_{0,e,+}(s) = \frac{s}{l_e} \quad \sin_{0,e,-}(s) = 1 - \frac{s}{l_e}. \quad \Delta^D = \Delta_0 = \bigoplus_e \Delta_{l_e}^{0l_e}$$

особенно, Δ^D развязан. Спектр Δ^D является

$$\sigma(\Delta^D) = \left\{ \frac{k^2 \pi^2}{l_e^2} \mid e \in E, k = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

более того, если граф равносторонний, то

$$\sigma(\Delta^D) = \{k^2 \pi^2 \mid k = 1, 2, 3, \dots\} = \sum D$$

2. Оператор Неймана, связанный с граничной тройкой (Γ, Γ', V) -Лапласиан, связанный с квантовым графом (G, V) то есть

$$\Delta^N = \Delta_V$$

3. Оператор решения Дирихле $S(z): V \rightarrow W^2$, определяется $f = S(z)F$, где f – (единственное) решение задачи Дирихле $(\Delta - z)f = 0, \Gamma f = F$,

$$f_e(e) = \begin{cases} F_e(\partial - e) \sin_{z,e,-}(S) + F(\partial + e)_e \sin_{z,e,+}(S), & \text{if } e \in E_{\text{int}} \\ F_e(\partial - e) e^{i\sqrt{z}s} & \text{if } e \in E_{\text{ext}}, \end{cases}$$

где $F = \{F(v)\}_{v \in V} \in \oplus_v V_v = V$

4. Отображение Дирихле-Неймана $\wedge: V \rightarrow V$

$$(\wedge(z)F)(v) = p_v H(v), \quad H(v) = \{H_e(v)\}_{e \in E_v}$$

где

$$H_e(v) = \begin{cases} \frac{\sqrt{z}}{\sin_z l_e} ((\cos_z l_e) - F_e(v_e)), & \text{if } e \in E_{\text{int}} \\ i\sqrt{z} F_e(\partial - e), & \text{if } e \in E_{\text{ext}} \end{cases}$$

и где V_e обозначает вершину, смежную с e , противоположную V В частности, если граф равносторонний ($l_e = 1$) нет внешних краев и у нас есть

$$\wedge(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}} (\ddot{\Delta}_V - (1 - \cos \sqrt{z})),$$

то есть отображение Дирихле-Неймана является аффинно-линейной (зависящей от z) функцией дискретного лапласиана $\ddot{\Delta}_V$.

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ НА ГРАФЕ

Во втором разделе приведены терминология, обозначения и вспомогательные известные факты. Этот материал данного раздела диссертаций соответствует материалу приведенному в работах [3,4,6,19,72,75,88]. Положения выносимые на защиту содержатся в третьем разделе диссертации. Этот раздел носит вспомогательный характер.

2.1 Сопряженное дифференциальное выражение

Рассмотрим дифференциальное выражение вида

$$L^*(V) = (-1)^n (\overline{P_n(x)V(x)})^{(n)} + (-1)^{n-1} (\overline{P_{n-1}(x)V(x)})^{(n-1)} + \dots + \overline{P_0(x)V(x)} \quad (2.1.1)$$

Дифференциальное выражение $L^*(V)$, определенное формулой (2.1.1) называется сопряженным к дифференциальному выражению:

$$L(y) \equiv P_n(x) \frac{d^n(y)}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}(y)}{dx^{n-1}} + \dots + P_0(x)y$$

Через $\overline{V(x)}$ обозначаем комплексное сопряженное к $V(x)$, или функцию, значения которой являются сопряженными к соответствующим значениям $V(x)$. Рассмотрим интеграл:

$$\int_0^1 y(x) \overline{L^*(V)} dx,$$

Неоднократно применяя формулу интегрирования по частям убеждаемся, что дифференциальное выражение $L(y)$ является сопряженным к $L^*(V)$;

Следовательно

$$L^{**}(y) = L(y).$$

Другими словами, дифференциальные выражения $L(y)$ и $L^*(y)$ сопряжены друг другу. В функциональном пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор B_{\max} , порожденный линейным дифференциальным выражением третьего порядка с гладкими коэффициентами:

$$L(y) = y^{(3)}(x) + P_1(x)y^{(1)}(x) + P_0(x)y(x) \quad (2.1.2)$$

Здесь $P_0(x)$ - непрерывная функция на фиксированном конечном интервале $[0,1]$, $P_1(x)$ -непрерывно дифференцируемая функция на $[0,1]$. Число 3 определяет

порядок дифференциального выражения и действует на трижды дифференцируемых функциях.

2.2 Краевые условия

К дифференциальным выражением 2.1.2 добавим краевые условия вида:

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.2.1)$$

где

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 1, \quad \gamma_3 = 2$$

выбранные согласно теореме Михайлова-Кесельмана, часто называют усиленно-регулярными граничными условиями [14-16]. В результате получим дифференциальный оператор, который обозначим через S_0 . Поэтому собственные значения оператора S_0 асимптотические простые и отделены [17-24], то есть найдется положительное число δ при котором любые два собственных значения оператора S_0 отстоят друг от друга на расстояние больше чем δ . Также из работ [25, 26] следует, что система собственных и присоединенных функций оператора S_0 образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Выпишем сопряженные граничные условия к граничным условиям Михайлова-Кесельмана [7, р. 4887].

Будем считать, что:

$$3 > \gamma_3 \geq \gamma_2 \geq \gamma_1 \geq 0$$

Случай А). Если все $\gamma_j, j = 1, \dots, n$ разные, то:

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 2$$

Случай Б). Если $\gamma_j = \gamma_{j+1}$, то выбираем. $U_j(y) = y^{(\gamma_j)}(0), U_{j+1}(y) = y^{(\gamma_j)}(1)$.

В дальнейшем детально изучается случай А. Аналогично можно исследовать случай Б. Итак, пусть $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 2$. В таком случае введем набор $U_{j+n}(y) = -\beta_j y^{(j-1)}(0) + \alpha_j y^{(j-1)}(1), j = 1, 2, 3$ Можно считать, что $\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$. Тогда справедливы равенства:

$$y^{(\gamma_j)}(0) = \alpha_j U_j(y) - \beta_j U_{j+n}(y),$$

$$y^{(\gamma_j)}(1) = \beta_j U_j(y) + \alpha_j U_{j+n}(y).$$

Для произвольной гладкой функции $v(x)$ введем обозначения, U_1, \dots, U_6 - линейные формы:

$$U_1(y) = \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0$$

$$U_2(y) = \alpha_1 y^{(1)}(0) + \beta_1 y^{(1)}(1) = 0$$

$$U_3(y) = \alpha_3 y^{(2)}(0) + \beta_3 y^{(2)}(1) = 0$$

$$U_4(y) = -\beta_1 y(0) + \alpha_1 y(1) = 0$$

$$U_5(y) = -\beta_2 y^{(1)}(0) + \alpha_2 y^{(1)}(1) = 0$$

$$U_6(y) = -\beta_3 y^{(2)}(0) + \alpha_3 y^{(2)}(1) = 0$$

2.3 Сопряженные краевые условия

Пусть U_1, \dots, U_6 – являются линейно независимыми формами. Теперь можно ввести сопряженные граничные формы по формулам (2.3.1), (2.3.2):

$$W_{4-s}(V) = \overline{\beta_{4-s} R_s(1, V) - \alpha_{4-s} R_s(0, V)} \quad (2.3.1)$$

$$W_{7-s}(V) = \overline{\beta_{4-s} R_s(1, V) + \alpha_{4-s} R_s(0, V)} \quad (2.3.2)$$

где

$$R_1(x, V) = V(x),$$

$$R_2(x, V) = -V^{(1)}(x),$$

$$R_3(x, V) = V^{(2)}(x) + P_1(x)\overline{V(x)}.$$

После этого мы придем к формуле Лагранжа в виде:

$$\begin{aligned} \int_0^1 L(y)\overline{V(x)}dx &= U_1(y)W_1(V) + U_2(y)W_2(V) + U_3(y)W_3(V) + U_4(y)W_4(V) + U_5(y)W_5(V) + \\ &+ U_6(y)W_6(V) + \int_0^1 y(x)\overline{L^*(V)}dx. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

таким образом, для любых двух гладких функций $V(x), y(x)$ справедлива формула Лагранжа [27-30]:

$$\int_0^1 L(y)\overline{V(x)}dx - \int_0^1 y(x)\overline{L^*(V)}dx = \sum_{s=1}^3 U_{4-s}(y)\overline{W_{5-s}(V)} + \sum_{s=1}^3 U_{7-s}(y)\overline{W_{7-s}(V)} \quad (2.3.4)$$

Здесь $L^*(V) = -V^{(3)}(x) - (\overline{P_1(x)V(X)})^{(1)} + \overline{P_0(x)V(X)}$. формально сопряженное дифференциальное выражение [20, с. 13; 29, с. 29]. Для любой $U_1(\cdot), \dots, U_6(\cdot)$ линейно независимые форм найдутся формы $W_1(\cdot), \dots, W_6(\cdot)$, удовлетворяющие соотношению 2.3.4.

2.4 Доказательство формулы Лагранжа

Используя дифференциальным выражение третьего порядка с гладкими коэффициентами на $[0,1]$ мы можем так написать:

$$\int_0^1 (y^{(3)}(x) + P_1(x)y^{(1)}(x) + P_0(x)y(x))\overline{V(x)}dx$$

Напомним формулы интегрирования по частям:

$$\int_0^1 u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u(x)v'(x)dx$$

Неоднократно используя формулу интегрирования по частям мы решаем третьего порядка:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (y^{(3)}(x))\overline{V(x)}dx &= \left[y^{(2)}(x)\overline{V(x)} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 y^{(2)}(x)\overline{V^{(1)}(x)}dx = \left[y^{(2)}(x)\overline{V(x)} \right]_{x=0}^{x=1} - \left[y^{(1)}(x)\overline{V^{(1)}(x)} \right]_{x=0}^{x=1} + \\ &+ \int_0^1 y^{(1)}(x)\overline{V^{(2)}(x)}dx = \left[y^{(2)}(x)\overline{V(x)} \right]_{x=0}^{x=1} - \left[y^{(1)}(x)\overline{V^{(1)}(x)} \right]_{x=0}^{x=1} + \left[y(x)\overline{V^{(2)}(x)} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 y(x)\overline{V^{(3)}(x)}dx = \\ &= \left[y^{(2)}(x)\overline{V(x)} - y^{(1)}(x)\overline{V^{(1)}(x)} + y(x)\overline{V^{(2)}(x)} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 y(x)\overline{V^{(3)}(x)}dx \end{aligned}$$

Точно также получим следующий равенство:

$$\int_0^1 y^{(1)}(x)(P_1(x)\overline{V(x)})dx = \left[y(x)(P_1(x)\overline{V(x)}) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 y(x)(P_1(x)\overline{V(x)})^{(1)}dx$$

и

$$\int_0^1 y(x)(P_0(x)\overline{V(x)})dx$$

В итоге получим соотношение

$$\int_0^1 L(y)\overline{V(x)}dx - \int_0^1 y(x)\overline{L^*(V)}dx =$$

$$= \left[y^{(2)}(x)\overline{V(x)} - y^{(1)}(x)\overline{V^{(1)}(x)} + y(x)\overline{V^{(2)}(x)} + y(x)(P_1(x)\overline{V(x)}) \right]_{x=0}^{x=1}$$

Подставляя граничные условия имеем равенство:

$$\int_0^1 L(y)\overline{V(x)}dx - \int_0^1 y(x)\overline{L^*(V)}dx =$$

$$= y^{(2)}(1)\overline{V(1)} - y^{(1)}(1)\overline{V^{(1)}(1)} + y(1)\overline{V^{(2)}(1)} + y(1)(P_1(1)\overline{V(1)}) -$$

$$- y^{(2)}(0)\overline{V(0)} + y^{(1)}(0)\overline{V^{(1)}(0)} - y(0)\overline{V^{(2)}(0)} - y(0)(P_1(0)\overline{V(0)})$$

Теперь мы найдем граничные значения $y^{(2)}(1), y^{(1)}(1), y(1), y^{(2)}(0), y^{(1)}(0), y(0)$.

По правилу Крамера выразим граничные значения $y^{(2)}(1), y^{(1)}(1), y(1), y^{(2)}(0), y^{(1)}(0), y(0)$ через значения форм

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{vmatrix} = 1$$

$$y(0) = \begin{vmatrix} U_1(y) & \beta_1 \\ U_4(y) & \alpha_1 \end{vmatrix} = \alpha_1 U_1(y) - \beta_1 U_4(y)$$

$$y(1) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & U_1(y) \\ -\beta_1 & U_4(y) \end{vmatrix} = \alpha_1 U_4(y) + \beta_1 U_1(y)$$

$$y(0) = \alpha_1 U_1(y) - \beta_1 U_4(y)$$

$$y(1) = \beta_1 U_1(y) + \alpha_1 U_4(y)$$

таким же образом:

$$\begin{cases} y^{(1)}(0) = \alpha_2 U_2(y) - \beta_2 U_5(y) \\ y^{(1)}(1) = \beta_2 U_2(y) + \alpha_2 U_5(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{(2)}(0) = \alpha_3 U_3(y) - \beta_3 U_6(y) \\ y^{(2)}(1) = \beta_3 U_3(y) + \alpha_3 U_6(y) \end{cases}$$

Теперь мы подставляем в формуле Лагранжа и получим равенство:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 L(y)\overline{V(x)}dx - \int_0^1 y(x)\overline{L^*(V)}dx = \\
& = \overline{V(1)}(\beta_3 U_3(y) + \alpha_3 U_6(y)) - \overline{V^{(1)}(1)}(\beta_2 U_2(y) + \alpha_2 U_5(y)) + \\
& + (\overline{V^{(2)}(1)} + P_1(1)\overline{V(1)})(\beta_1 U_1(y) + \alpha_1 U_4(y) - \overline{V(0)}(\alpha_3 U_3(y) - \beta_3 U_6(y)) + \\
& + \overline{V^{(1)}(0)}(\alpha_2 U_2(y) - \beta_2 U_5(y)) + (\overline{V^{(2)}(0)} + P_1(0)\overline{V(0)})(\alpha_1 U_1(y) - \beta_1 U_4(y))
\end{aligned}$$

Преобразуем последнее соотношение

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 L(y)\overline{V(x)}dx - \int_0^1 y(x)\overline{L^*(V)}dx = \\
& = U_3(y)(\beta_3 \overline{V(1)} - \alpha_3 \overline{V(0)}) + U_6(y)(\alpha_3 \overline{V(1)} + \beta_3 \overline{V(0)}) + U_2(y)(-\beta_2 \overline{V^{(1)}(1)} + \alpha_2 \overline{V^{(1)}(0)}) + \\
& + U_5(y)(-\alpha_2 \overline{V^{(1)}(1)} - \beta_2 \overline{V^{(1)}(0)}) + U_1(y)(\beta_1 P_1(1)\overline{V(1)} - \alpha_1 P_1(0)\overline{V(0)}) + \\
& + U_4(y)(\alpha_1 P_1(1)\overline{V(1)} - \beta_1 P_1(0)\overline{V(0)})
\end{aligned}$$

теперь можно ввести сопряженные граничные формы по формулам (2.3.1) и (2.3.2):

$$\begin{aligned}
W_1(V) &= \beta_1 \left(\overline{V^{(2)}(1)} + P_1(1)\overline{V(1)} \right) - \alpha_1 \left(\overline{V^{(2)}(0)} + P_1(0)\overline{V(0)} \right) \\
W_2(V) &= -\beta_2 \overline{V^{(1)}(1)} + \alpha_2 \overline{V^{(1)}(0)} \\
W_3(V) &= -\beta_3 \overline{V(1)} + \alpha_3 \overline{V(0)} \\
W_4(V) &= \alpha_1 \left(\overline{V^{(2)}(1)} + P_1(1)\overline{V(1)} \right) + \beta_1 \left(\overline{V^{(2)}(0)} + P_1(0)\overline{V(0)} \right) \\
W_5(V) &= -\alpha_2 \overline{V^{(1)}(1)} + \beta_2 \overline{V^{(1)}(0)} \\
W_6(V) &= \alpha_3 \overline{V(1)} + \beta_3 \overline{V(0)}
\end{aligned}$$

таким образом, доказано, что для двух функций $y(x), V(x)$ справедлива формула Лагранжа [8, р. 225].

Формула (2.3.4) называется Формулой Лагранжа и мы можем тоже написать [31-34]:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 L(y)\overline{V(x)}dx + \int_0^1 y(x)\overline{L^*(V)}dx = \\
& = U_1(y)W_1(V) + U_2(y)W_2(V) + U_3(y)W_3(V) + U_4(y)W_4(V) + U_5(y)W_5(V) + U_6(y)W_6(V)
\end{aligned}$$

мы решаем краевые задачи для дифференциального уравнения третьего порядка, тогда сопряженные дифференциальным выражением третьего порядка будет [35-38].

$$L^*(V) = -V^{(3)}(x) - \left(\overline{P_1(x)} V(x) \right)^{(1)} + \overline{P_0(x)} V(x). \quad (2.4.1)$$

предположим теперь, что коэффициенты $P_0(x), P_1(x)$, дифференциального выражения гладкие функции [39].

2.5 Частное решение краевой задачи

Мы знаем общее решение дифференциального уравнения третьего порядка:

$$y(x) = y_0(x) + D_1 \varphi_1(x) + D_2 \varphi_2(x) + D_3 \varphi_3(x) \quad (2.5.1)$$

где

$$y_0(x) = \int_0^x g(x,t) f(t) dt$$

$y_0(x)$ частное решение неоднородного уравнения

Здесь $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ фундаментальная система решений однородного уравнения $L(\varphi_1)=0, L(\varphi_2)=0, L(\varphi_3)=0$, удовлетворяющих неоднородным начальным условиям $\varphi_j^{(k-1)}(0) = \delta_{kj}$. Функция $g(x, t)$ определяется по формуле:

$$g(x, t) = \frac{P(x, t)}{W(t)}$$

где $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$ и $W(t)$ Вронскиан детерминант

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1^{(2)}(t) & y_2^{(2)}(t) & y_3^{(2)}(t) \end{vmatrix} = 1$$

или

$$W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) = 1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2^{(1)}(0) = 1 & 0 \\ 0 & 0 & y_3^{(2)}(0) = 1 \end{vmatrix} = 1$$

и $P(x, t)$

$$P(x, t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix}$$

тогда $g(x, t) = P(x, t)$, следовательно $g(x, t)$ может быть определено следующей формуле.

$$g(x, t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix}.$$

отсюда проверим частное решение мы можем написать частное решение так как:

$$y_0(x) = \int_0^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix} f(t) dt$$

возьмем первую производную:

$$y_0^{(1)}(x) = \int_0^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & y_3^{(1)}(x) \end{vmatrix} f(t) dt + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & y_3^{(1)}(x) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix} f(x)$$

Заметим, что:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & y_3^{(1)}(x) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix} = 0$$

возьмем вторую производную:

$$y_0^{(2)}(x) = \int_0^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & y_3^{(2)}(x) \end{vmatrix} f(t) dt$$

теперь возьмем третью производную:

$$y_0^{(3)}(x) = \int_0^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1^{(3)}(x) & y_2^{(3)}(x) & y_3^{(3)}(x) \end{vmatrix} f(t) dt + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & y_3^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x) & y_2^{(2)}(x) & y_3^{(2)}(x) \end{vmatrix} f(x)$$

теперь надо проверить уравнения (2.1.2). Для этого решения $y(x)$ подставляем:

$$L(y) = y_0^{(3)}(x) + P_1(x)y_0^{(1)}(x) + P_0(x)y_0(x)$$

$$L(y) = \int_0^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1^{(3)}(x) & y_2^{(3)}(x) & y_3^{(3)}(x) \end{vmatrix} f(t) dt + f(x) + P_1(x) \int_0^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1^{(1)}(x) & y_2^{(1)}(x) & y_3^{(1)}(x) \end{vmatrix} f(t) dt + P_0(x) \int_0^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix} f(t) dt$$

отсюда надо складывая матрицы, получим:

$$L(y) = \int_0^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1^{(3)}(x) + P_1(x)y_1^{(1)}(x) + P_0(x)y_1(x) & y_2^{(3)}(x) + P_1(x)y_2^{(1)}(x) + P_0(x)y_2(x) & y_3^{(3)}(x) + P_1(x)y_3^{(1)}(x) + P_0(x)y_3(x) \end{vmatrix} f(t) dt + f(x)$$

Но $L(y) = y_1^{(3)}(x) + P_1(x)y_1^{(1)}(x) + P_0(x)y_1(x) = 0$ это однородное уравнение, мы проверим неоднородные уравнения:

$$L(y) = \int_0^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} f(t) dt + f(x) = f(x)$$

2.6 Краевая задача оператора при $n = 3$

Рассмотрим краевую задачу:

$$L(y) = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.6.1)$$

с краевые условия:

$$U_1(y)=0, U_2(y)=0, U_3(y)=0. \quad (2.6.2)$$

Наша цель решить краевую задачу (2.6.1), (2.6.2) общее решение будет:

$$y(x) = y_0(x) + D_1\varphi_1(x) + D_2\varphi_2(x) + D_3\varphi_3(x) \quad (2.6.3)$$

Здесь $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ решение однородного дифференциального уравнения и $\varphi_1(x)$ – первое решение дифференциального уравнения третьего порядка:

$$L(\varphi_1) = 0$$

с краевыми условиями

$$U_1(\varphi_1)=1, U_2(\varphi_1)=0, U_3(\varphi_1)=0$$

$\varphi_2(x)$ – второе решение дифференциального уравнения третьего порядка найдется:

$$L(\varphi_2) = 0$$

с краевыми условиями

$$U_1(\varphi_2)=0, U_2(\varphi_2)=1, U_3(\varphi_2)=0$$

$\varphi_3(x)$ – является третье решение дифференциального уравнения третьего порядка

$$L(\varphi_3) = 0$$

с краевыми условиями

$$U_1(\varphi_3)=0, U_2(\varphi_3)=0, U_3(\varphi_3)=1$$

находим неизвестные константы D_1, D_2, D_3 ,

теперь надо проверить уравнения (2.6.1) для этого решения:

$$y(x) = y_0(x) + D_1\varphi_1(x) + D_2\varphi_2(x) + D_3\varphi_3(x),$$

$$L(y) = f(x) + D_1 \cdot 0 + D_2 \cdot 0 + D_3 \cdot 0 = f(x)$$

Значит это уравнения (2.6.2) выполняется отсюда находим D_1 и мы знаем краевые условия по формуле:

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(j)}(0) + \beta_j y^{(j)}(1) = 0,$$

так как

$$U_1(y) = \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0$$

мы подставляем краевые условия

$$\begin{aligned} & \alpha_1 (y_0(0) + D_1 \varphi_1(0) + D_2 \varphi_2(0) + D_3 \varphi_3(0)) + \\ & + \beta_1 (y_0(1) + D_1 \varphi_1(1) + D_2 \varphi_2(1) + D_3 \varphi_3(1)) = \\ & = \alpha_1 y_0(0) + \beta_1 y_0(1) + D_1 (\alpha_1 \varphi_1(0) + \beta_1 \varphi_1(1)) + D_2 (\alpha_1 \varphi_2(0) + \beta_1 \varphi_2(1)) + \\ & + D_3 (\alpha_1 \varphi_3(0) + \beta_1 \varphi_3(1)) = U_1(y_0) + D_1 U_1(\varphi_1) + D_2 U_1(\varphi_2) + D_3 U_1(\varphi_3) = 0 \end{aligned}$$

так как мы нашли

$$D_1 = -U_1(y_0).$$

отсюда находим D_2

отсюда

$$U_2(y) = \alpha_2 y^{(1)}(0) + \beta_2 y^{(1)}(1) = 0$$

мы подставляем краевые условия так как

$$\begin{aligned} & \alpha_2 (y_0(x) + D_1 \varphi_1(x) + D_2 \varphi_2(x) + D_3 \varphi_3(x))^{(1)} \Big|_{x=0} + \\ & \beta_2 (y_0(x) + D_1 \varphi_1(x) + D_2 \varphi_2(x) + D_3 \varphi_3(x))^{(1)} \Big|_{x=1} = \\ & = \alpha_2 y_0^{(1)}(0) + \beta_2 y_0^{(1)}(1) + D_1 (\alpha_2 \varphi_1^{(1)}(0) + \beta_2 \varphi_1^{(1)}(1)) + D_2 (\alpha_2 \varphi_2^{(1)}(0) + \beta_2 \varphi_2^{(1)}(1)) + \\ & + D_3 (\alpha_2 \varphi_3^{(1)}(0) + \beta_2 \varphi_3^{(1)}(1)) = U_2(y_0) + D_1 U_2(\varphi_1) + D_2 U_2(\varphi_2) + D_3 U_2(\varphi_3) = \\ & = U_2(y_0) + D_2 = 0 \end{aligned}$$

так как мы нашли

$$D_2 = -U_2(y_0)$$

теперь мы можем найти D_3

$$\begin{aligned} U_3(y) &= \alpha_3 y^{(2)}(0) + \beta_3 y^{(2)}(1) = 0 \\ \alpha_3 (y_0(x) + D_1 \varphi_1(x) + D_2 \varphi_2(x) + D_3 \varphi_3(x))^{(2)}|_{x=0} + \\ &+ \beta_3 (y_0(x) + D_1 \varphi_1(x) + D_2 \varphi_2(x) + D_3 \varphi_3(x))^{(2)}|_{x=1} = \\ &= \alpha_3 y_0^{(2)}(0) + \beta_3 y_0^{(2)}(1) + D_1 (\alpha_3 \varphi_1^{(2)}(0) + \beta_3 \varphi_1^{(2)}(1)) + D_2 (\alpha_3 \varphi_2^{(2)}(0) + \beta_3 \varphi_2^{(2)}(1)) + \\ &+ D_3 (\alpha_3 \varphi_3^{(1)}(0) + \beta_3 \varphi_3^{(1)}(1)) = U_3(y_0) + D_1 U_3(\varphi_1) + D_2 U_3(\varphi_2) + D_3 U_3(\varphi_3) = \\ &= U_3(y_0) + D_3 = 0 \end{aligned}$$

мы нашли

$$D_3 = -U_3(y_0)$$

тогда можем написать общее решение краевой задачи, так как

$$y(x) = \int_0^x g(x,t) f(t) dt - U_1(y_0) \varphi_1(x) - U_2(y_0) \varphi_2(x) - U_3(y_0) \varphi_3(x)$$

отсюда мы находим $U_1(y_0)$, $U_2(y_0)$, $U_3(y_0)$ через частные решения и получаем

$$D_1 = \beta_1 \int_0^1 g(1,t) f(t) dt, \quad D_2 = \beta_2 \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)|_{x=1} f(t) dt, \quad \text{и} \quad D_3 = \beta_3 \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t)|_{x=1} f(t) dt$$

отсюда можем написать

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x g(x,t) f(t) dt - \beta_1 \int_0^1 g(1,t) f(t) dt \varphi_1(x) - \beta_2 \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} g(x,t) f(t) dt|_{x=1} \varphi_2(x) - \\ &- \beta_3 \int_0^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,t) f(t) dt|_{x=1} \varphi_3(x) \end{aligned}$$

Conclusion 1. Решили задачу дифференциального уравнения третьего порядка с краевой задачей:

$$y(x) = \int_0^x g(x,t)f(t)dt - \int_0^1 \rho_1(t)f(t)dt\varphi_1(x) - \int_0^1 \rho_2(t)f(t)dt\varphi_2(x) - \int_0^1 \rho_3(t)f(t)dt\varphi_3(x)$$

где

$$\rho_1(t) = \beta_1 g(1,t);$$

$$\rho_2(t) = \beta_2 g_x^{(1)}(1,t);$$

$$\rho_3(t) = \beta_3 g_x^{(2)}(1,t)$$

2.7 Основная задача

Дифференциальное неоднородное уравнение с краевыми условиями:

$$L(w) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

$$V_1(w) = 0, \quad V_2(w) = 0, \quad V_3(w) = 0$$

или мы можем краевые условия написать

$$V_1(w) \equiv U_1(w) + \int_0^1 k_0(t)w(t)dt = 0$$

$$V_2(w) \equiv U_2(w) + \int_0^1 \eta_1(t)w^{(1)}(t)dt + \int_0^1 \eta_0(t)w(t)dt = 0$$

$$V_3(w) \equiv U_3(w) + \int_0^1 q_2(t)w^{(2)}(t)dt + \int_0^1 q_1(t)w^{(1)}(t)dt + \int_0^1 q_0(t)w(t)dt = 0$$

где

$$q_2(t), q_1(t), q_0(t), \eta_1(t), \eta_0(t), k_0(t) \in L_2(0,1).$$

Наша главная цель найти более краткое и подходящее общее решение задачи дифференциального уравнения третьего порядка $w(x)$.

$$w(x) = y(x) + E_1\Psi_1(x) + E_2\Psi_2(x) + E_3\Psi_3(x)$$

здесь $y(x)$ частное решение и $\Psi_1(x), \Psi_2(x), \Psi_3(x)$ однородного дифференциального уравнения

$$\begin{array}{lll}
L(\Psi_1) = 0 & L(\Psi_2) = 0 & L(\Psi_3) = 0 \\
V_1(\Psi_1) = 1 & V_1(\Psi_2) = 0 & V_1(\Psi_3) = 0 \\
V_2(\Psi_1) = 0 & V_2(\Psi_2) = 1 & V_2(\Psi_3) = 0 \\
V_3(\Psi_1) = 0 & V_3(\Psi_2) = 0 & V_3(\Psi_3) = 1
\end{array}$$

надо найти краевое условие $V_1(w)$

$$\begin{aligned}
V_1(w) &= U_1(y) + \int_0^1 k_0(\tau) y(\tau) d\tau = U_1(y_0) - U_1(\varphi_1) \int_0^1 \rho_1(t) f(t) dt - U_1(\varphi_2) \int_0^1 \rho_2(t) f(t) dt - \\
&- U_1(\varphi_3) \int_0^1 \rho_3(t) f(t) dt + \int_0^1 k_0(\tau) \varphi_0(\tau) d\tau - \int_0^1 k_0(\tau) \varphi_1(\tau) d\tau \cdot \int_0^1 \rho_1(t) f(t) dt - \\
&- \int_0^1 k_0(\tau) \varphi_2(\tau) d\tau \cdot \int_0^1 \rho_2(t) f(t) dt - \int_0^1 k_0(\tau) \varphi_3(\tau) d\tau \cdot \int_0^1 \rho_3(t) f(t) dt = \\
&= \int_0^1 \rho_1(t) f(t) dt - \int_0^1 \rho_1(t) f(t) dt + \int_0^1 k_0(\tau) \varphi_0(\tau) d\tau - \int_0^1 k_0(\tau) \varphi_1(\tau) d\tau \cdot \int_0^1 \rho_1(t) f(t) dt
\end{aligned}$$

Лемма 2.2 Здесь мы можем использовать лемму:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 k_0(\tau) y_0(\tau) d\tau = \\
&= \int_0^1 k_0(\tau) \left[\int_0^\tau g(\tau, t) f(t) dt \right] d\tau = \int_0^1 d\tau \int_0^\tau k_0(\tau) g(\tau, t) f(t) dt = \\
&= \int_0^1 dt \int_t^1 k_0(\tau) g(\tau, t) f(t) d\tau = \int_0^1 f(t) \left[\int_t^1 k_0(\tau) g(\tau, t) d\tau \right] dt
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
V_1(w) &= \int_0^1 k_0(\tau) \varphi_0(\tau) d\tau - \int_0^1 k_0(\tau) \varphi_1(\tau) d\tau \cdot \int_0^1 \rho_1(t) f(t) dt = \\
&= \int_0^1 f(t) \left[\int_t^1 k_0(\tau) g(\tau, t) d\tau \right] dt - \int_0^1 k_0(\tau) \varphi_1(\tau) d\tau \cdot \int_0^1 \rho_1(t) f(t) dt = \\
&= \int_0^1 f(t) \left\{ \int_t^1 k_0(\tau) g(\tau, t) d\tau - \rho_1(t) \int_0^1 k_0(\tau) \varphi_1(\tau) d\tau \right\} dt = \int_0^1 f(t) \tilde{\rho}_1(t) dt
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{\rho}_1(t) = \int_t^1 k_0(\tau)g(\tau, t)d\tau - \rho_1(t) \int_0^1 k_0(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau$$

теперь найдем $V_2(y)$ и $V_3(y)$ будет где $\tilde{\rho}_2(t) = C$ $\tilde{\rho}_3(t) = C$ мы можем решать как первый случай и найти

$$V_2(y) = \int_0^1 f(t)\tilde{\rho}_2(t)dt ;$$

$$V_3(y) = \int_0^1 f(t)\tilde{\rho}_3(t)dt ;$$

отсюда основная задача написать решение дифференциального неоднородного уравнения с краевыми условиями

$$w(x) = y(x) - \Psi_1(x) \int_0^1 f(t)\tilde{\rho}_1(t)dt - \Psi_2(x) \int_0^1 f(t)\tilde{\rho}_2(t)dt - \Psi_3(x) \int_0^1 f(t)\tilde{\rho}_3(t)dt.$$

Случай Б. Если краевые условия третьего порядка будут одинаковы, тогда получаем следующее разные варианты:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0 \\ \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0 \\ \alpha_3 y^{(1)}(0) + \beta_3 y^{(1)}(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 y^{(1)}(0) + \beta_1 y^{(1)}(1) = 0 \\ \alpha_2 y^{(1)}(0) + \beta_2 y^{(1)}(1) = 0, \\ \alpha_3 y^{(2)}(0) + \beta_3 y^{(2)}(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0 \\ \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0 \\ \alpha_3 y^{(2)}(0) + \beta_3 y^{(2)}(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 y^{(2)}(0) + \beta_1 y^{(2)}(1) = 0 \\ \alpha_2 y^{(2)}(0) + \beta_2 y^{(2)}(1) = 0, \\ \alpha_3 y(0) + \beta_3 y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y^{(1)}(0) + \beta_1 y^{(1)}(1) = 0 \\ \alpha_2 y^{(1)}(0) + \beta_2 y^{(1)}(1) = 0 \\ \alpha_3 y(0) + \beta_3 y(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 y^{(2)}(0) + \beta_1 y^{(2)}(1) = 0 \\ \alpha_2 y^{(2)}(0) + \beta_2 y^{(2)}(1) = 0. \\ \alpha_3 y^{(1)}(0) + \beta_3 y^{(1)}(1) = 0 \end{cases}$$

сложим первую строку со второй строкой, тогда у нас краевые условия третьего порядка $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и $y(0) + y(1) = 0$ и лучше отдельно напишем:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \\ \alpha_3 y^{(1)}(0) + \beta_3 y^{(1)}(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^{(1)}(0) \\ y^{(1)}(1) = 0 \\ \alpha_3 y^{(2)}(0) + \beta_3 y^{(2)}(1) = 0 \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \\ \alpha_3 y^{(2)}(0) + \beta_3 y^{(2)}(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^{(2)}(0) = 0 \\ y^{(2)}(1) = 0 \\ \alpha_3 y(0) + \beta_3 y(1) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y^{(1)}(0) = 0 \\ y^{(1)}(1) = 0 \\ \alpha_3 y(0) + \beta_3 y(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^{(2)}(0) = 0 \\ y^{(2)}(1) = 0 \\ \alpha_3 y^{(1)}(0) + \beta_3 y^{(1)}(1) = 0 \end{cases}.$$

2.8 Краевая задача оператора S

Рассмотрим краевую задачу оператора S_0 :

$$L(y) = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.8.1)$$

$$U_1(y) = 0, U_2(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0 \quad (2.8.2)$$

Краевая задача $L(y) = f(x)$ это линейное неоднородное дифференциальное уравнение n порядка с краевыми условиями:

$$U_1(y) = 0, U_2(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0$$

мы знаем краевые условия по формуле:

$$\begin{aligned} U_1(y) &= \alpha_1 y^{(\gamma_1)}(0) + \beta_1 y^{(\gamma_1)}(1) = 0 \\ U_2(y) &= \alpha_2 y^{(\gamma_2)}(0) + \beta_2 y^{(\gamma_2)}(1) = 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ U_n(y) &= \alpha_n y^{(\gamma_n)}(0) + \beta_n y^{(\gamma_n)}(1) = 0 \end{aligned}$$

где γ_1 – это порядок первого краевого условия;

γ_n – это порядок n -го краевого условия, так как

$$0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq n-1$$

Случай А. Значит все γ разные $0 \leq \gamma_1 = 1 \leq \gamma_2 = 2 \leq \dots \leq \gamma_n = n-2 \leq n-1$

Случай Б. Может быть, что γ будет одинаково $0 < \gamma_1 = \gamma_2 < \dots < \gamma_n < n-1$ S_0 эта задача называется невозмущенная задача [22, с. 10-15].

Регулярные краевые условия. Рассмотрим фиксированную область s_v , и как выше, занумеруем $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ так как при $\rho \in s_v$.

$$\Re(\rho\omega_1) \leq \Re(\rho\omega_2) \leq \dots \leq \Re(\rho\omega_n).$$

В дальнейшем нам удобно будет выделить класс краевых условий, которые называются регулярными. Этот класс определяется различным образом в зависимости от того, будет ли n нечетным или четным:

а) n нечетно, $n = 2\mu - 1$.

нормированные краевые условия называются регулярными, если числа θ_0 и θ_1 определены равенством

Если $n = 3$

$$\begin{aligned} \theta_0 + s\theta_1 &= \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{\gamma_1} & \alpha_1\omega_2^{\gamma_1} + s\beta_1\omega_2^{\gamma_1} & \beta_1\omega_3^{\gamma_1} \\ \alpha_2\omega_1^{\gamma_2} & \alpha_2\omega_2^{\gamma_2} + s\beta_2\omega_2^{\gamma_2} & \beta_2\omega_3^{\gamma_2} \\ \alpha_3\omega_1^{\gamma_3} & \alpha_3\omega_2^{\gamma_3} + s\beta_3\omega_2^{\gamma_3} & \beta_3\omega_3^{\gamma_3} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{\gamma_1} & \alpha_1\omega_2^{\gamma_1} & \beta_1\omega_3^{\gamma_1} \\ \alpha_2\omega_1^{\gamma_2} & \alpha_2\omega_2^{\gamma_2} & \beta_2\omega_3^{\gamma_2} \\ \alpha_3\omega_1^{\gamma_3} & \alpha_3\omega_2^{\gamma_3} & \beta_3\omega_3^{\gamma_3} \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{\gamma_1} & \beta_1\omega_2^{\gamma_1} & \beta_1\omega_3^{\gamma_1} \\ \alpha_2\omega_1^{\gamma_2} & \beta_2\omega_2^{\gamma_2} & \beta_2\omega_3^{\gamma_2} \\ \alpha_3\omega_1^{\gamma_3} & \beta_3\omega_2^{\gamma_3} & \beta_3\omega_3^{\gamma_3} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

теперь мы можем найти $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ / Михайлов θ_0 и θ_1 найдем

которые корни $\omega_1 = -1, \omega_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \omega_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \begin{vmatrix} 1(-1)^0 & 1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^0 & \beta_1\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^0 \\ 1(-1)^1 & 1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^1 & \beta_2\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^1 \\ 1(-1)^2 & 1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 & \beta_3\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) & \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\beta_2 \\ 1 & \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) & \left(-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\beta_3 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) & \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\beta_2 \\ 1 & \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) & \left(-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3+i\sqrt{3}}{2} & \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\beta_2 + 1 \\ 0 & i\sqrt{3} & \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\beta_2 + \left(-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\beta_3 \end{vmatrix} = \\
&= \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\beta_3 - i\sqrt{3} + \beta_2 \left[\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\beta_3 - i\sqrt{3}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \right] \neq 0
\end{aligned}$$

Если $n=3$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = -1$ так как определение будет известно с краевыми условиями:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} y(0) = y(1) \\ y^{(1)}(0) = y^{(1)}(1), \\ y^{(2)}(0) = y^{(2)}(1) \end{cases} \\
&\gamma_1 = 0, \gamma_1 = 1, \gamma_3 = 2 \\
\theta_0 &= \begin{vmatrix} 1(-1)^0 & 1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^0 & \beta_1\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^0 \\ 1(-1)^1 & 1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^1 & \beta_2\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^1 \\ 1(-1)^2 & 1\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 & \beta_3\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3+i\sqrt{3}}{2} & \left(1-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 0 & i\sqrt{3} & -i\sqrt{3} \end{vmatrix} = \\
&= i\sqrt{3}\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}i \neq 0.
\end{aligned}$$

если $n=5$ так как определение будет

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{\gamma_1} & \alpha_1 \omega_2^{\gamma_1} & \alpha_1 \omega_3^{\gamma_1} + s\beta_1 \omega_3^{\delta_1} & \beta_1 \omega_4^{\gamma_1} & \beta_1 \omega_5^{\gamma_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{\gamma_2} & \alpha_2 \omega_2^{\gamma_2} & \alpha_2 \omega_3^{\gamma_2} + s\beta_2 \omega_3^{\delta_2} & \beta_2 \omega_4^{\gamma_2} & \beta_2 \omega_5^{\gamma_2} \\ \alpha_3 \omega_1^{\gamma_3} & \alpha_3 \omega_2^{\gamma_3} & \alpha_3 \omega_3^{\gamma_3} + s\beta_3 \omega_3^{\delta_3} & \beta_3 \omega_4^{\gamma_3} & \beta_3 \omega_5^{\gamma_3} \\ \alpha_4 \omega_1^{\gamma_4} & \alpha_4 \omega_2^{\gamma_4} & \alpha_4 \omega_3^{\gamma_4} + s\beta_4 \omega_3^{\delta_4} & \beta_4 \omega_4^{\gamma_4} & \beta_4 \omega_5^{\gamma_4} \\ \alpha_5 \omega_1^{\gamma_5} & \alpha_5 \omega_2^{\gamma_5} & \alpha_5 \omega_3^{\gamma_5} + s\beta_5 \omega_3^{\delta_5} & \beta_5 \omega_4^{\gamma_5} & \beta_5 \omega_5^{\gamma_5} \end{vmatrix}$$

б) n четно, $n = 2\mu$.

Нормированные краевые условия называются регулярными, если числа θ_{-1} и θ_1 определенные равенством:

$$\begin{aligned} \theta_{-1}s^{-1} + \theta_0 + s\theta_1 &= \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{\gamma_1} & \alpha_1 \omega_2^{\gamma_1} + s\beta_1 \omega_2^{\gamma_1} & \alpha_1 \omega_3^{\gamma_1} + s^{-1}\beta_1 \omega_3^{\gamma_1} & \beta_1 \omega_4^{\gamma_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{\gamma_2} & \alpha_2 \omega_2^{\gamma_2} + s\beta_2 \omega_2^{\gamma_2} & \alpha_2 \omega_3^{\gamma_2} + s^{-1}\beta_2 \omega_3^{\gamma_2} & \beta_2 \omega_4^{\gamma_2} \\ \alpha_3 \omega_1^{\gamma_3} & \alpha_3 \omega_2^{\gamma_3} + s\beta_3 \omega_2^{\gamma_3} & \alpha_3 \omega_3^{\gamma_3} + s^{-1}\beta_3 \omega_3^{\gamma_3} & \beta_3 \omega_4^{\gamma_3} \\ \alpha_4 \omega_1^{\gamma_4} & \alpha_4 \omega_2^{\gamma_4} + s\beta_4 \omega_2^{\gamma_4} & \alpha_4 \omega_3^{\gamma_4} + s^{-1}\beta_4 \omega_3^{\gamma_4} & \beta_4 \omega_4^{\gamma_4} \end{vmatrix} = \\ &= s^{-1} \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{\gamma_1} & \alpha_1 \omega_2^{\gamma_1} & \alpha_1 \omega_3^{\gamma_1} & \beta_1 \omega_4^{\gamma_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{\gamma_2} & \alpha_2 \omega_2^{\gamma_2} & \alpha_2 \omega_3^{\gamma_2} & \beta_2 \omega_4^{\gamma_2} \\ \alpha_3 \omega_1^{\gamma_3} & \alpha_3 \omega_2^{\gamma_3} & \alpha_3 \omega_3^{\gamma_3} & \beta_3 \omega_4^{\gamma_3} \\ \alpha_4 \omega_1^{\gamma_4} & \alpha_4 \omega_2^{\gamma_4} & \alpha_4 \omega_3^{\gamma_4} & \beta_4 \omega_4^{\gamma_4} \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{\gamma_1} & \beta_1 \omega_2^{\gamma_1} & \beta_1 \omega_3^{\gamma_1} & \beta_1 \omega_4^{\gamma_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{\gamma_2} & \beta_2 \omega_2^{\gamma_2} & \beta_2 \omega_3^{\gamma_2} & \beta_2 \omega_4^{\gamma_2} \\ \alpha_3 \omega_1^{\gamma_3} & \beta_3 \omega_2^{\gamma_3} & \beta_3 \omega_3^{\gamma_3} & \beta_3 \omega_4^{\gamma_3} \\ \alpha_4 \omega_1^{\gamma_4} & \beta_4 \omega_2^{\gamma_4} & \beta_4 \omega_3^{\gamma_4} & \beta_4 \omega_4^{\gamma_4} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь ω числа

$$\begin{aligned} \omega_1^n = -1 &\Rightarrow \omega_1 = \sqrt[n]{-1}, \\ \omega_2^n = -1 &\Rightarrow \omega_2 = \sqrt[n]{-1}, \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \\ \omega_n^n = -1 &\Rightarrow \omega_n = \sqrt[n]{-1}. \end{aligned}$$

Теорема 2.1. Собственные значения дифференциального оператора n -го порядка на интервале $[0,1]$, порожденного регулярными краевыми условиями, образуют две бесконечные последовательности:

$$\lambda_1^{(\cdot)}, \lambda_2^{(\cdot)}, \dots, \lambda_n^{(\cdot)}, \dots$$

Базисом Рисса в $L_2(0,1)$ называется такая полная в этом пространстве последовательность функции $y_1^{(0)}(x), y_2^{(0)}(x), y_3^{(0)}(x), \dots$, что для каждой функции $f(x) \in L_2(0,1)$:

$$f(x) = c_1 y_1^{(0)}(x) + c_2 y_2^{(0)}(x) + c_3 y_3^{(0)}(x) + \dots,$$

где c_1 первый коэффициент Фурье, c_2 второй коэффициент Фурье, Базис рисса это функции разлагается [9, p. 291].

Рассмотрим краевую задачу оператора s_1

$$L(y) = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.8.3)$$

$$V_1(y) = U_1(y) - \int_0^1 f(x)\sigma_1(x)dx = 0 \quad (2.8.4)$$

$$U_2(y) = 0, U_3(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0 \quad (2.8.5)$$

Краевая задача $L(y) = f(x)$ это линейное неоднородное дифференциальное уравнение n порядка с краевыми условиями:

$$U_2(y) = 0, U_3(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0$$

и

$$U_1(y) = \int_0^1 L(y)\sigma_1(t)dt \neq 0$$

здесь $\sigma_1(t) \neq 0$ то [10, p. 9193; 22, с. 10].

2.9 Дифференциальный оператор n -го порядка

Пусть $1 \leq k \leq n$ Введем функцию $k_k(x, \lambda)$ которая удовлетворяет уравнению:

$$L(y) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1$$

с граничным условиям:

$$\begin{array}{cccc} y_1(0) = 1 & y_2(0) = 0 & \dots & y_n(0) = 0 \\ y_1^{(1)}(0) = 0 & y_2^{(1)}(0) = 1 & \dots & y_n^{(1)}(0) = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(0) = 0 & y_2^{(n-1)}(0) = 0 & \dots & y_n^{(n-1)}(0) = 1 \end{array}$$

решения $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$ фундаментального однородного уравнения n -го порядка.

На операторе n -го порядка подставляем первое решение:

$$\begin{array}{l} L(\kappa_1) = \lambda \kappa_1(x), \quad 0 < x < 1 \\ U_1(\kappa_1) = 1, \quad U_2(\kappa_1) = 0, \dots, U_n(\kappa_1) = 0 \end{array}$$

$\kappa_1(x, \lambda)$ первое решение линейного однородного дифференциального уравнения n порядка с краевыми условиями:

$$\kappa_1(x, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & \dots & y_n(x, \lambda) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}$$

отсюда мы возьмем первую производную:

$$\kappa_1^{(1)}(x, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda y_1(x, \lambda) & \lambda y_2(x, \lambda) & \dots & \lambda y_n(x, \lambda) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}$$

Отсюда мы узнаем что дифференциальные операторы подходят, так как

$$L(\kappa_1) = \lambda \kappa_1(x)$$

теперь

$$L(\kappa_2) = \lambda \kappa_2(x), \quad 0 < x < 1$$

$$U_1(\kappa_2) = 0, \quad U_2(\kappa_2) = 1, \dots, \quad U_n(\kappa_2) = 0$$

$\kappa_2(x, \lambda)$ одно решение линейного однородного дифференциального уравнения [40] n порядка с краевыми условиями:

$$\kappa_2(x, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & \dots & y_n(x, \lambda) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & \dots & U_3(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}$$

отсюда возьму первую производную и подставлю во второе решение:

$$\kappa_2^{(1)}(x, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ \lambda y_1(x, \lambda) & \lambda y_2(x, \lambda) & \dots & \lambda y_n(x, \lambda) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & \dots & U_3(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}$$

отсюда

$$L(\kappa_2) = \lambda \kappa_2(x)$$

и так далее

$$L(\kappa_k) = \lambda \kappa_k(x)$$

с граничными условиями

$$U_1(\kappa_k) = 0, \dots, U_{k-1}(\kappa_k) = 0, U_k(\kappa_k) = 1, U_{k+1}(\kappa_k) = 0, \dots, U_n(\kappa_k) = 0.$$

В этом разделе мы рассмотрим все граничные условия краевой задачи без нуля шаг за шагом:

$$L(y) = \lambda y(x) + f(x), \quad 0 < x < 1$$

Краевая задача $L(y) = \lambda y(x) + f(x)$ это линейное неоднородное дифференциальное уравнение n порядка с краевыми условиями, но сначала мы выбираем первые краевые условия без нуля:

$$V_1(y) \equiv y(0) - \int_0^1 L(y) \sigma_1(x) dx = 0$$

и другими краевыми условиями:

$$U_2(y) = 0, U_3(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0$$

здесь $\sigma_1(x) \neq 0$

Если $\sigma_1(x) \neq 0$ то будет частное решение $y_0(x) = \int_0^x g(x, t) f(t) dt$. Теперь наша цель $\sigma_1(x) \neq 0$ тогда надо найти функцию Грина. Первое решение общего решения дифференциального уравнения n -ого порядка:

$$y(x, \lambda) = \int_0^x g(x, t) f(t) dt + D_1 y_1(x, \lambda) + D_2 y_2(x, \lambda) + \dots + D_n y_n(x, \lambda)$$

оказывается

$$y_1(x, \lambda) = 1, y_2(x, \lambda) = 0, \dots, y_n(x, \lambda) = 0$$

так как

$$y(0, \lambda) = \int_0^0 g(0, t) f(t) dt + D_1 y_1(0, \lambda) + D_2 y_2(0, \lambda) + \dots + D_n y_n(0, \lambda)$$

$$y(0) = D_1$$

но мы выбрали первые краевые условия без нуля

$$V_1(y) \equiv y(0) - \int_0^1 L(y) \sigma_1(x) dx = 0$$

значит

$$V_1(y) \equiv D_1 - \int_0^1 L(y) \sigma_1(x) dx = 0$$

или

$$D_1 = \int_0^1 L(y) \sigma_1(x) dx$$

отсюда могу написать

$$D_1 = \frac{-y_0(0) + \int_0^1 L(y_0) \sigma_1(x) dx}{1 - \lambda \int_0^1 y(x, \lambda) \sigma_1(x) dx} = \frac{-U_1(y_0)}{U_1(y_1)}$$

также мы можем найти очень просто

$$y(x, \lambda) = \int_0^x g(x, t) f(t) dt + D_1 y_1(x, \lambda) + D_2 y_2(x, \lambda) + \dots + D_n y_n(x, \lambda)$$

оказывается

$$y_1(x, \lambda) = 1, y_2(x, \lambda) = 0, \dots, y_n(x, \lambda) = 0$$

$$y(x, \lambda) = \int_0^x g(x, t) f(t) dt + D_1 y_1(x, \lambda)$$

$$0 = y_0(x, \lambda) + D_1 y_1(x, \lambda)$$

$$D_1 = \frac{-U_1(y_0)}{U_1(y_1)}$$

из этого можем получить общее решение

$$y(x, \lambda) = y_0(x) - \frac{U_1(y_0)}{U_1(y_1)} y_1(x, \lambda) = \frac{- \begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_0(x) \\ U_1(y_1) & U_1(y_0) \end{vmatrix}}{U_1(y_1)} = \frac{- \begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & \int_0^1 g(x, t) f(t) dt \\ U_1(y_1) & \int_0^1 U_{1x}(g(x, t)) f(t) dt \end{vmatrix}}{U_1(y_1)} =$$

$$= \int_0^1 \frac{- \begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & g(x, t) \\ U_1(y_1) & U_1(g) \end{vmatrix}}{U_1(y_1)} f(t) dt.$$

теперь попробуем с этими краевыми условиями

$$L(y) = \lambda y(x) + f(x), \quad 0 < x < 1$$

$$y(0) = 0, \quad y^{(1)}(0) - \int_0^1 L(y) \sigma_2(x) dx = 0, \quad y^{(2)}(0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(0) = 0$$

Общее решение дифференциального уравнения n -ого порядка

$$y(x, \lambda) = \int_0^x g(x, t) f(t) dt + D_1 y_1(x, \lambda) + D_2 y_2(x, \lambda) + \dots + D_n y_n(x, \lambda)$$

берем первую производную

$$y^{(1)}(x) = \int_0^x g^{(1)}(x, t) \Big|_{x=0} f(t) dt + D_2$$

можем написать

$$D_2 = \int_0^1 L(y) \sigma_2(x) dx$$

или написать

$$y^{(1)}(x) = y_0^{(1)}(x) + D_2 y_2^{(1)}(x, \lambda) = 0$$

$$D_2 = \frac{-U_2(y_0)}{U_2(y_2)}$$

из этого можем получить общее решение

$$y(x, \lambda) = y_0(x) - \frac{U_2(y_0)}{U_2(y_1)} y_2(x, \lambda) = \frac{- \begin{vmatrix} y_2(x, \lambda) & y_0(x) \\ U_2(y_2) & U_2(y_0) \end{vmatrix}}{U_2(y_2)} = \frac{- \begin{vmatrix} y_2(x, \lambda) & \int_0^1 g(x, t) f(t) dt \\ U_2(y_2) & \int_0^1 U_{2x}(g(x, t)) f(t) dt \end{vmatrix}}{U_2(y_2)} =$$

$$= \int_0^1 \frac{- \begin{vmatrix} y_2(x, \lambda) & g(x, t) \\ U_2(y_2) & U_2(g) \end{vmatrix}}{U_2(y_2)} f(t) dt.$$

Теперь мы можем написать функцию Грина:

$$G(x, t, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} y_2(x, \lambda) & g(x, t) \\ U_2(y_2) & U_2(g) \end{vmatrix}}{U_2(y_2)}$$

теперь выбираем два крайевых условия, первый и второй без нуля

$$V_1(y) \equiv y(0) - \int_0^1 L(y) \sigma_1(x) dx = 0,$$

$$V_2(y) \equiv y^{(1)}(0) - \int_0^1 L(y) \sigma_2(x) dx = 0,$$

и другие крайевые условия

$$U_3(y) = 0, U_4(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0,$$

здесь $\sigma_1(x) \neq 0$, $\sigma_2(x) \neq 0$, общее решение

$$y(x, \lambda) = y_0(x) + D_1 y_1(x, \lambda) + D_2 y_2(x, \lambda)$$

$$V_1(x) = U_1(y_0) + D_1 U_1(y_1) + D_2 U_2(y_2) = 0$$

$$V_2(x) = U_2(y_0) + D_1 U_2(y_1) + D_2 U_2(y_2) = 0$$

В этой система надо получить D_1 и D_2 и простой способ заключается в следующем:

$$[-y(x) + y_0(x)] + D_1 y_1(x, \lambda) + D_2 y_2(x, \lambda) = 0$$

$$U_1(y_0) + D_1 U_1(y_1) + D_2 U_2(y_2) = 0$$

$$U_2(y_0) + D_1 U_2(y_1) + D_2 U_2(y_2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_0(x, \lambda) - y(x, \lambda) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_0) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 1 \neq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

в двух метриках должен быть равно нулю

$$\vec{A} \vec{x} = \vec{0} \text{ если } \vec{x} = \vec{0} \text{ тогда } \det A = 0.$$

$$\begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_0(x, \lambda) - y(x, \lambda) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_0) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_0) \end{bmatrix} = 0$$

отнимем две матрицы

$$\begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_0(x, \lambda) - y(x, \lambda) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_0) - 0 \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_0) - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_0(x, \lambda) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_0) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y(x, \lambda) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & 0 \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y(x, \lambda) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & 0 \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_0(x, \lambda) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_0) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_0) \end{bmatrix}$$

отсюда нам надо найти $y(x, \lambda)$

$$y(x, \lambda) \begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_0(x, \lambda) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_0) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_0) \end{bmatrix}$$

так как

$$y(x, \lambda) = \frac{\begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_0(x, \lambda) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_0) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_0) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{bmatrix}}$$

$$y(x, \lambda) = \frac{\begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & \int_0^1 g(x, t) f(t) dt \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \int_0^1 g_x^{(1)}(x, t) f(t) dt \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \int_0^1 g_x^{(2)}(x, t) f(t) dt \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{bmatrix}}$$

общее решение

$$y(x, \lambda) = \int_0^1 \frac{\begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & g(x, t) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(g) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{bmatrix}} f(t) dt$$

функции Грина

$$G(x, t, \lambda) = \frac{\begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & g(x, t) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(g) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{bmatrix}}$$

2.10 Функция Грина оператора на отрезке $L_2(0,1)$

Функция Грина оператора $(L - \lambda I)$. Пусть по-прежнему L оператор, порожденный выражением $L(y)$ и условиями $U_1(y) = 0, U_2(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0$, найдем выражение для функции Грина оператора $(L - \lambda I)$, другими словами, обратим оператор $(L - \lambda I)$. Обозначим через $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$, систему решений уравнения [11, р. 61; 19, р. 26].

$$L(y) = \lambda y(x) + f(x)$$

$$L(y) = \lambda y + f,$$

оператор

$$(L - \lambda I)y = f, \quad 0 < x < 1$$

$$y \in D(A) \quad y \in D(A) = \begin{cases} y \in W_2^n(0,1) \\ U_1(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0 \end{cases}$$

Теперь рассмотрим следующую краевую задачу оператора S_0 при $f \in L_2(0,1)$

$$L(y) = \lambda y(x) + f(x), \quad 0 < x < 1 \tag{2.10.1}$$

с краевыми условиями

$$U_1(y) = 0, U_2(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0 \tag{2.10.2}$$

решения задачи (2.10.1), (2.10.2) задается по формуле

$$y(x, \lambda) = (S_0 - \lambda I)^{-1} = \int_0^1 G_0(x, t, \lambda) f(t) dt$$

где

$$G_0(x, t, \lambda) = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & \dots & y_n(x, \lambda) & g(x, t) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) & U_1(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) & U_n(g) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)}$$

- функция Грина

где

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

здесь $U_1(y), \dots, U_n(y)$ - формулы из краевых условий, если $x > t$,

$$g(x, t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & \dots & y_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \dots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}$$

если $x \leq t$ тогда $g(x, t) = 0$

2.11 Возмущенная краевая задача

Рассмотрим возмущенную краевую задачу оператора S_1

$$L(y) = \lambda y(x) + f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.11.1)$$

$$V_1 \equiv U_1(y) - \int_0^1 L(y) \sigma_1(x) dx = 0 \quad (2.11.2)$$

$$U_2(y) = 0, U_3(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0 \quad (2.11.3)$$

решение задачи (2.11.1), (2.11.2), (2.11.3) задается по формуле:

$$y(x, \lambda) = (S_1 - I\lambda)^{-1} = \int_0^1 G_1(x, t, \lambda) f(t) dt$$

где

$$G_1(x, t, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda) & G_0(x, t, \lambda) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(G_0) \end{vmatrix}}{V_1(\kappa_1)}$$

здесь $\kappa_1(x, \lambda)$ -удовлетворяет

$$L(\kappa_1) = \lambda \kappa_1, \quad 0 < x < 1$$

с граничными условиями

$$U_1(\kappa_1) = 1, U_2(\kappa_1) = 0, \dots, U_n(\kappa_1) = 0$$

$$\kappa_1(x, \lambda) = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & \dots & y_n(x, \lambda) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)}$$

$$G_0(x, t, \lambda) = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & \dots & y_n(x, \lambda) & g(x, t) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) & U_1(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) & U_n(g) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}$$

рассмотрим возмущенную краевую задачу оператора S_2

$$L(y) = \lambda y(x) + f(x), \quad 0 < x < 1 \tag{2.11.4}$$

$$V_1 \equiv U_1(y) - \int_0^1 L(y) \overline{\sigma_1(x)} dx = 0 \tag{2.11.5}$$

$$V_2 \equiv U_2(y) - \int_0^1 L(y) \overline{\sigma_2(x)} dx = 0 \tag{2.11.6}$$

$$U_3(y) = 0, U_4(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0 \tag{2.11.7}$$

решение задачи (2.11.4), (2.11.5), (2.11.6), (2.11.7) задается по формуле

$$y(x, \lambda) = (S_2 - I\lambda)^{-1} = \int_0^1 G_2(x, t, \lambda) f(t) dt$$

где

$$G_2(x, t, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda) & G_0(x, t, \lambda) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(G_0) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda) & \kappa_2(x, \lambda) & G_0(x, t, \lambda) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(\kappa_2) & V_1(G_0) \\ V_2(\kappa_1) & V_2(\kappa_2) & V_2(G_0) \end{vmatrix}}{\Delta_2(\lambda)}$$

где $\Delta_2(\lambda) = \begin{vmatrix} V_1(\kappa_1) & V_1(\kappa_2) \\ V_2(\kappa_1) & V_2(\kappa_2) \end{vmatrix}$,

здесь $\kappa_1(x, \lambda), \kappa_2(x, \lambda)$ -удовлетворяет

$$L(\kappa_1) = \lambda \kappa_1, \quad 0 < x < 1$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} U_1(\kappa_1) &= 1, U_2(\kappa_1) = 0, \dots, U_n(\kappa_1) = 0, \\ L(\kappa_2) &= \lambda \kappa_2, \quad 0 < x < 1. \\ U_1(\kappa_2) &= 0, U_2(\kappa_2) = 1, \dots, U_n(\kappa_2) = 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим возмущенную краевую задачу оператора S_n .

Теперь рассмотрим дифференциальные неоднородные уравнения с граничным условиям, возьмем все без нуля:

$$\begin{aligned} L(y) &= \lambda y(x) + f(x), \quad 0 < x < 1, \\ V_1 &\equiv U_1(y) - \int_0^1 L(y) \sigma_1(x) dx = 0, \\ V_2 &\equiv U_2(y) - \int_0^1 L(y) \sigma_2(x) dx = 0 \\ \dots & \dots \dots, \\ V_n &\equiv U_n(y) - \int_0^1 L(y) \sigma_n(x) dx = 0 \end{aligned}$$

в этой задаче сначала возьмем все условия без нуля, общее решение

$$y(x, \lambda) = (S_n - I\lambda)^{-1} = \int_0^1 G_n(x, t, \lambda) f(t) dt$$

функции Грина на это задаче

$$G_n(x, t, \lambda) = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda) & \kappa_2(x, \lambda) & \dots & \kappa_n(x, \lambda) & G_0(x, t, \lambda) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(\kappa_2) & \dots & V_1(\kappa_n) & V_1(G_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_n(\kappa_1) & V_n(\kappa_2) & \dots & V_n(\kappa_n) & V_n(G_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} V_1(\kappa_1) & V_1(\kappa_2) & \dots & V_1(\kappa_n) \\ V_2(\kappa_1) & V_2(\kappa_2) & \dots & V_2(\kappa_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n(\kappa_1) & V_n(\kappa_2) & \dots & V_n(\kappa_n) \end{vmatrix}}$$

2.12 Аналитическая природа функции Грина оператора $(L - \lambda I)$

Функции Грина $G(x, t, \lambda)$ оператора $(L - \lambda I)$ [41, 42] есть мероморфная функция параметра λ , ее полюсами могут быть лишь собственные значения оператора L . Пусть λ_0 -простой нуль функции $\Delta(\lambda)$. Тогда λ_0 может быть только простым полюсом функции $G(x, t, \lambda)$, так что

$$G(x, t, \lambda) = \frac{R(x, \lambda)}{(\lambda - \lambda_0)} + G_1(x, t, \lambda).$$

где $G_1(x, t, \lambda)$ регулярна в окрестности точки λ_0 . Если λ_0 вообще не особая точка функций $G(x, t, \lambda)$, то следует считать $R(x, t) = 0$ согласно известной формуле теории вычетов

$$R(x, t) = (-1)^n \frac{H(x, t, \lambda_0)}{\Delta'(\lambda_0)}$$

Но в разложении определителя $H(x, t, \lambda_0)$ по элементам первой строки коэффициент при $g(x, t) = 0$ есть $\Delta(\lambda_0) = 0$ следовательно, функция $R(x, t)$ и ее первые n производные непрерывны по совокупности переменных x, t в квадрате $a < x, t < b$ далее вытекает, что $R(x, t)$ есть линейная комбинация функций $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)$, следовательно, при фиксированном t она удовлетворяет уравнению [19, с. 25].

$$L(R) = \lambda_0 R$$

случай кратного полюса функции Грина [19, с. 25].

$$y(x, \lambda) = \int_0^1 G(x, t, \lambda) f(t) dt$$

$$L(y) = \int_0^1 L(G) f(t) dt = \int_0^1 \lambda G(x, t, \lambda) f(t) dt + f(x)$$

$$L(G) = \lambda G(x, t, \lambda) + \delta(x - t)$$

пусть главная часть резольвенты при $\lambda = \lambda_0$ имеем вид

$$G(x, t, \lambda) = \frac{R_0(x, t)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{R_1(x, t)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \dots + \frac{R_{m-1}(x, t)}{(\lambda - \lambda_0)} + G_1(x, t, \lambda)$$

Здесь $\frac{R_0(x, t)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{R_1(x, t)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \dots + \frac{R_{m-1}(x, t)}{(\lambda - \lambda_0)}$ - главная часть ряд Лорана, $G_1(x, t, \lambda)$ - правильная часть ряда Лорана. Оператор

$$\begin{aligned} L(G) &= \frac{L(R_0)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{L(R_1)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \frac{L(R_2)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-2}} + \frac{L(R_3)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-3}} + \dots + \frac{L(R_{m-1})}{(\lambda - \lambda_0)} + L(G_1) = \\ &= \frac{\lambda R_0}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{\lambda R_1}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \frac{\lambda R_2}{(\lambda - \lambda_0)^{m-2}} + \frac{\lambda R_3}{(\lambda - \lambda_0)^{m-3}} + \dots + \frac{\lambda R_{m-1}}{(\lambda - \lambda_0)} + \lambda G_1 \end{aligned}$$

теперь $\lambda = (\lambda - \lambda_0) + \lambda_0$

$$\begin{aligned} &= \frac{((\lambda - \lambda_0) + \lambda_0)R_0}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{((\lambda - \lambda_0) + \lambda_0)R_1}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \frac{((\lambda - \lambda_0) + \lambda_0)R_2}{(\lambda - \lambda_0)^{m-2}} + \frac{((\lambda - \lambda_0) + \lambda_0)R_3}{(\lambda - \lambda_0)^{m-3}} + \dots + \frac{((\lambda - \lambda_0) + \lambda_0)R_{m-1}}{(\lambda - \lambda_0)} + \\ &+ ((\lambda - \lambda_0) + \lambda_0)G_1 = \\ &= \frac{\lambda_0 R_0}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{R_0}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \frac{\lambda_0 R_1}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \frac{R_1}{(\lambda - \lambda_0)^{m-2}} + \frac{\lambda_0 R_2}{(\lambda - \lambda_0)^{m-2}} + \frac{R_2}{(\lambda - \lambda_0)^{m-3}} + \frac{\lambda_0 R_3}{(\lambda - \lambda_0)^{m-3}} + \frac{R_3}{(\lambda - \lambda_0)^{m-4}} + \\ &+ \dots + \frac{\lambda_0 R_{m-1}}{(\lambda - \lambda_0)} + R_{m-1} + \lambda G_1 \end{aligned}$$

мы можем написать уравнения оператора

$$\begin{aligned} L(R_0) &= \lambda_0 R_0 \\ L(R_1) &= R_0 + \lambda_0 R_1 \\ L(R_2) &= R_1 + \lambda_0 R_2 \\ L(R_3) &= R_2 + \lambda_0 R_3 \\ &\dots \dots \\ L(R_{m-1}) &= R_{m-2} + \lambda_0 R_{m-1} \end{aligned}$$

Для $n = 3$

$$\begin{aligned} L(y) &= \lambda y(x) + f(x), \quad 0 < x < 1 \\ U_1(y) &= 0, \quad U_2(y) = 0, \quad U_3(y) = 0 \end{aligned}$$

Резольвента оператора L имеет в следующем виде

$$y(x, t) = (L_0 - \lambda I)^{-1} = \int_0^1 G_0(x, t, \lambda) f(t) dt$$

где

$$G_0(x, t, \lambda) = - \frac{\begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_3(x, \lambda) & g(x, t) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(g) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(g) \end{vmatrix}}{\Delta_0(\lambda)},$$

- функция Грина оператора L_0 .

Если при $x > t$ функция $g(x, t)$ имеет следующий вид:

$$g(x, t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix},$$

если $x \leq t$ тогда $g(x, t) = 0$.

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) \end{vmatrix}$$

теперь мы складываем функции Грина $n = 3$

$$G_0(x, t, \lambda) = - \frac{\begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_3(x, \lambda) & 0 + g(x, t) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(g) + 0 \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(g) + 0 \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(g) + 0 \end{vmatrix}}{\Delta_0(\lambda)} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_3(x, \lambda) & 0 \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(g) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(g) \end{vmatrix}}{\Delta_0(\lambda)} + g(x, t),$$

$$\frac{\begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_3(x, \lambda) & 0 \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(g) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(g) \end{vmatrix}}{\Delta_0(\lambda)}$$

- главная часть ряда Лорана, $g(x, t)$ -правильная

часть ряда Лорана.

Упражнение 2.1 Вычет разложение

Пусть A -ограничен, тогда $\lambda : \|\lambda\| > \|A\|$ является регулярной точкой

$$Ay = L(y), \quad 0 < x < 1$$

и

$$y \in D(A) = \begin{cases} y \in W_2^n(0,1) \\ U_1(y) = 0, \dots, U_n(y) = 0 \end{cases}$$

Теперь

$$L(y) = \lambda y(x) + f(x), \quad 0 < x < 1$$

Оператор

$$(A - \lambda I)y = f$$

общее решения

$$y(x, \lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1} = \int_0^1 G_0(x, t, \lambda) f(t) dt$$
$$y(x, \lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1} = \int_0^1 (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & \dots & y_n(x, \lambda) & g(x, \lambda) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) & U_1(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) & U_n(g) \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)} f(t) dt$$

Например при $n = 1$.

$$L(y) = \lambda y(x)$$
$$y_1^{(1)}(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda)$$

краевые условия

$$y(0, \lambda) = 1$$

решение этой задачи

$$y_1(x, \lambda) = e^{\lambda x}$$

функция Грина

$$g(x, t) = \begin{cases} e^{\lambda x}, & t < x \\ 0, & t \geq x \end{cases}$$

Так как общее решение

$$y(x,t) = (L - \lambda I)^{-1} f = \int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & g(x,t) \\ \alpha_1 + \beta_1 e^{\lambda t} & \beta_1 e^{\lambda(1-t)} \end{vmatrix}}{\alpha_1 + \beta_1 e^{\lambda}} f(t) dt$$

Отсюда выйдет

$$y(x,t) = (L - \lambda I)^{-1} f = - \int_0^1 \frac{\beta_1 e^{\lambda(1+x-t)}}{\alpha_1 + \beta_1 e^{\lambda}} f(t) dt + \int_0^1 e^{\lambda(x-t)} f(t) dt$$

Если $\alpha_1 + \beta_1 e^{\lambda} = 0$ тогда полюса - резольвента, если $\alpha_1 + \beta_1 e^{\lambda} \neq 0$ тогда существует вывод: резольвента имеет полюса. Теперь $-\frac{\alpha_1}{\beta_1} = e^{\lambda + 2k\pi i}$, и должны знать $e^{2k\pi i} = 1$.

$$\ln\left(-\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) = \lambda + 2k\pi i \Rightarrow \lambda = \ln\left(-\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) - 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$\lambda_k \rightarrow \infty$ существует $|\lambda_{k+1} - \lambda_k|$.

Упражнения 2.2. Резольвента вектор λ_k ряда Лорана

$$e^{\lambda(x-t)} = e^{(\lambda - \lambda_0)(x-t)} e^{\lambda_0(x-t)} = e^{\lambda_0(x-t)} \left\{ 1 + \frac{(\lambda - \lambda_0)(x-t)}{1!} + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2(x-t)^2}{2!} + \dots + \right\}$$

вычет резольвента

$$- \int_0^1 \frac{\beta_1 e^{\lambda(1+x+t)}}{\alpha_1 + \beta_1 e^{\lambda}} f(t) dt = - \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 e^{\lambda}} \int_0^1 \beta_1 e^{\lambda(1+x+t)} f(t) dt$$

сначала

$$\int_0^1 \beta_1 e^{\lambda(1+x+t)} f(t) dt = \int_0^1 \beta_1 e^{\lambda_0(1+x+t)} f(t) dt \left\{ 1 + \frac{(\lambda - \lambda_0)(x-t)}{1!} + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2(x-t)^2}{2!} + \dots + \right\}$$

теперь вычет $-\frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 e^{\lambda}}$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 e^\lambda} &= -\frac{1}{\beta_1} \frac{1}{\frac{\alpha_1}{\beta_1} + e^\lambda} = -\frac{1}{\beta_1 e^{\lambda_0}} \frac{1}{e^{(\lambda-\lambda_0)} - 1} = -\frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{(\lambda-\lambda_0) + \frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2!} + \dots} = \\
&= -\frac{1}{\alpha_1} \frac{1}{(\lambda-\lambda_0)} + \frac{1}{1 + \frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2!} + \dots}
\end{aligned}$$

на это формуле

$$\frac{1}{1+[x]} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

обратно оператор

$$\begin{aligned}
(L - \lambda I)^{-1} f &= \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)} \left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right) \int_0^1 e^{\lambda_0(1+x-t)} f(t) dt + \\
&+ (\lambda - \lambda_0)^0 \left\{ \int_0^1 e^{\lambda_0(x-t)} f(t) dt + \frac{\beta_1}{2\alpha_1} \int_0^1 e^{\lambda_0(1+x-t)} f(t) dt - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \int_0^1 e^{\lambda_0(1+x-t)} (1+x-t) f(t) dt + \right\} + (\lambda - \lambda_0) \{ \dots \} + \dots
\end{aligned}$$

мы находим вычет

$$\operatorname{res}_{\lambda_0} (L - \lambda I)^{-1} f = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} \int_0^1 e^{\lambda_0} e^{\lambda_0(x-t)} f(t) dt = \int_0^1 e^{\lambda_0 x} e^{-\lambda_0 t} f(t) dt = e^{\lambda_0 x} \int_0^1 e^{-\lambda_0 t} f(t) dt = c_0 e^{\lambda_0 x}$$

Возмущенная краевая задача и ее функция Грина

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\begin{aligned}
L(y) &= \lambda y(x) + f(x), \quad 0 < x < 1 \\
V_1 &\equiv U_1(y) - \int_0^1 L(y) \overline{\sigma_1(x)} dx = 0 \\
U_j(y) &= 0, \quad j = 2, \dots, n
\end{aligned}$$

резольвента оператора L имеет вид

$$(L - \lambda I)^{-1} f(x) = \int_0^1 G(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad 0 < x < 1$$

где

$$G(x, t, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda) & G_0(x, t, \lambda) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(G_0) \end{vmatrix}}{V_1(\kappa_1)} = G_0(x, t, \lambda) - \frac{\kappa_1(x, \lambda) V_1(G_0)}{V_1(\kappa_1)}$$

- функция Грина оператора L . Здесь это $\kappa_1(x, \lambda)$ - решение однородного уравнения

$$L(\kappa_1) = \lambda \kappa_1, \quad 0 < x < 1$$

с неоднородными краевыми условиями

$$U_1(\kappa_1) = 1, U_2(\kappa_1) = 0, \dots, U_n(\kappa_1) = 0$$

2.13 Главная часть разложения в ряд Лорана функции Грина

В этом пункте вычислена главная часть разложения в ряд Лорана функции Грина [41, р. 2184] возмущенного оператора в окрестности простого собственного значения. В нашем случае, нули функции $V_1(\kappa_1)$ являются полюсами резольвенты $(L - \lambda I)^{-1}$. Пусть λ_0 – простой нуль функции $V_1(\kappa_1)$ $\left. \frac{d}{d\lambda} V_1(\kappa) \right|_{\lambda_0} \neq 0$. Тогда разложение в ряд Лорана в окрестности простого полюса примет вид

$$G(x, t, \lambda) = - \frac{\text{res}_{\lambda_0} G(x, t, \lambda)}{\lambda - \lambda_0} + \text{прав. часть},$$

где

$$\text{res}_{\lambda_0} G(x, t, \lambda) = - \frac{\kappa_1(x, \lambda) V_1(G_0)}{\left. \frac{d}{d\lambda} V_1(\kappa_1) \right|_{\lambda=\lambda_0}}$$

по теореме Келдыша [19, с. 65] известно, что

$$G(x, t, \lambda) = - \frac{u_0(x) \overline{v_0(t)}}{\lambda - \lambda_0} + h_0(x, t, \lambda)$$

где $h_0(x, t, \lambda)$ – регулярная в окрестности точки λ_0 . Здесь $u_0(x)$ – собственная функция оператора L ;

$\overline{v_0(t)}$ – собственная функция сопряженного оператора L^* к оператору L , то есть:

$$\begin{aligned} L(u_0) &= \lambda_0 u_0, & u_0 &\in D(L), \\ L^*(v_0) &= \overline{\lambda_0} v_0, & v_0 &\in D(L^*). \end{aligned}$$

сравнивая соотношения получим равенства

$$u_0(x) = \kappa_1(x, \lambda_0), \quad v_0(t) = \frac{V_1(G_0)}{\left. \frac{d}{d\lambda} V_1(\kappa_1) \right|_{\lambda=\lambda_0}}$$

Теорема 2.2. Если λ_0 - простое собственное значение оператора L , тогда собственная функция оператора L имеет следующий вид:

$$\kappa_1(x, \lambda_0) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x, \lambda_0) & y_2(x, \lambda_0) & \dots & y_n(x, \lambda_0) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}}{\Delta_0(\lambda_0)}$$

то есть удовлетворяет следующей возмущенной краевой задаче

$$\begin{aligned} L\kappa_1(x, \lambda_0) &= \lambda_0\kappa_1(x, \lambda_0), \\ V_1\kappa_1(x, \lambda_0) &= U_1\kappa_1(x, \lambda_0) - \int_0^1 L(\kappa_1(x, \lambda_0))\overline{\sigma_1(x)}dx = 0, \\ U_2\kappa_1(x, \lambda_0) &= \dots = U_n\kappa_1(x, \lambda_0) = 0 \end{aligned}$$

Теорема 2.3. Пусть λ_0 - простой нуль функции $V_1\kappa_1$. Тогда функция Грина оператора L в окрестности простого полюса имеет представление:

$$G(x, t, \lambda) = -\frac{\kappa_1(x, \lambda)V_1(G_0)}{\frac{d}{d\lambda}V_1(\kappa_1)} + G_0(x, t, \lambda_0)$$

где $\kappa_1(x, \lambda_0)$ – собственная функция оператора L ;

$V_1(G_0)$ – собственная функция сопряженного оператора L^* к оператору L .

Причем она определяется по формуле:

$$\begin{aligned} V_1(G_0) &= \sigma_1(t) + \overline{\lambda_0} \int_0^1 g(x, t, \lambda) \overline{\sigma_1(x)} dx + \\ &+ \frac{\overline{\lambda_0}}{\Delta_0(\lambda_0)} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_n(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(k-2)}(t) & y_2^{(k-2)}(t) & y_n^{(k-2)}(t) \end{vmatrix} \\ &\int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k+1} y_1^{(k)}(1) A_{n+1, k+2} \overline{\sigma_1(x)} dx \quad \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k+1} y_2^{(k)}(1) A_{n+1, k+2} \overline{\sigma_1(x)} dx \quad \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k+1} y_n^{(k)}(1) A_{n+1, k+2} \overline{\sigma_1(x)} dx \end{vmatrix}$$

$$V_1(G_0) = \sigma_1(t) + \lambda_0 \int_t^1 g(x, t, \lambda) \sigma_1(x) dx +$$

$$+ \frac{\overline{\lambda_0}}{\Delta_0(\lambda_0)} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & \dots & y_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(k-2)}(t) & y_2^{(k-2)}(t) & \dots & y_n^{(k-2)}(t) \end{vmatrix}$$

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k+1} y_1^{(k)}(1) A_{n+1, k+2} \overline{\sigma_1(x)} dx \quad \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k+1} y_2^{(k)}(1) A_{n+1, k+2} \overline{\sigma_1(x)} dx \quad \dots \quad \int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k+1} y_n^{(k)}(1) A_{n+1, k+2} \overline{\sigma_1(x)} dx$$

2.14 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Лорана задачи S_1

Для вычета нам нужны в ряд Фурье функции Грина задачи S_1 . Теперь для собственного функций оператора посмотрим сопряженные функций оператора и разложим ряд Лорана. Пусть λ_0 - простой нуль функций $\Delta_2(\lambda)$. Тогда λ_0 может быть только простым полюсом функции $G_2(x, t, \lambda)$, так что Наймарк [19, р. 85].

$$G_2(x, t, \lambda) = -\frac{u_0(x) \overline{v(t)}}{\lambda - \lambda_0} + \text{Правильная часть ряд Лорана}$$

где $G_0(x, t, \lambda)$ правильная часть ряда Лорана $L(u_0) = \lambda u_0$; $u_0 \in D(S_1)$ - собственные функции оператора $L^*(u_0) = \overline{\lambda_0} v_0$; $v_0 \in D(S_1^*)$ $L^*(v_0) = \overline{\lambda_0} u_0$; $v_0 \in D(S_1^*)$ - сопряженные собственные функции оператора.

$$\text{res}_{\lambda_0} G_1(x, t, \lambda) = -\frac{\kappa_1(x, \lambda_0) V_1(G_0)}{\left. \frac{d}{d\lambda} V_1(\kappa_1) \right|_{\lambda_0}} + G_0(x, t, \lambda_0)$$

где $V_1(G_0), V_2(G_0)$

$$V_1(G_0) = U_1(G_0) - \int_0^1 L(G_0) \overline{\sigma_1(x)} dx = -\int_0^1 [\lambda_0 G_0(x, t, \lambda_0) + \delta(x-t)] \overline{\sigma_1(x)} dx =$$

$$= -\lambda_0 \int_0^1 G_0(x, t, \lambda_0) \sigma_1(x) - \overline{\sigma_1(t)} dx = \Psi_1(t, \lambda_0)$$

$$V_2(G_0) = -\lambda_0 \int_0^1 G_0(x, t, \lambda_0) \sigma_2(x) - \overline{\sigma_{12}(t)} dx = \Psi_2(t, \lambda_0)$$

Теорема 2.4

1. На первом этапе вычет, если условия $V_1(\kappa_1) = 0, V_2(\kappa_1) = 0$, тогда у нас выйдет вычет

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{\lambda_0} G_1(x, t, \lambda) &= \frac{1}{\Delta_2(\lambda)} \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) & G_0(x, t, \lambda_0) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(\kappa_2) & V_1(G_0) \\ V_2(\kappa_1) & V_2(\kappa_2) & V_2(G_0) \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{\Delta_2(\lambda)} \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) & 0 \\ 0 & V_1(\kappa_2(x, \lambda_0)) & \Psi_1(t, \lambda_0) \\ 0 & V_2(\kappa_2(x, \lambda_0)) & \Psi_2(t, \lambda_0) \end{vmatrix} + \text{Правильно часть ряд Лорана} = \\
&= \frac{\kappa_1(x, \lambda_0) \begin{vmatrix} V_1(\kappa_2) & \Psi_1(t, \lambda_0) \\ V_2(\kappa_2) & \Psi_2(t, \lambda_0) \end{vmatrix}}{\Delta_2(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}} + \text{Правильно часть ряд Лорана}.
\end{aligned}$$

$u_0(x) = \kappa_1(x, \lambda_0)$ собственные функции оператор $L(u_0) = \lambda u_0; u_0 \in D(S_2)$

$\overline{v_0(t)} = \begin{vmatrix} V_1(\kappa_2) & \Psi_1(t, \lambda_0) \\ V_1(\kappa_2) & \Psi_2(t, \lambda_0) \end{vmatrix}$ - сопряженные собственные функции оператора.

$L^*(v_0) = \bar{\lambda}_0 v_0; v_0 \in D(S_2^*)$

2. На втором этапе вычит, если условия $V_1(\kappa_2) = 0, V_2(\kappa_2) = 0$ тогда

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{\lambda_0} G_2(x, t, \lambda) &= \frac{1}{\Delta_2(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}} \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) & G_0(x, t, \lambda_0) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(\kappa_2) & V_1(G_0) \\ V_2(\kappa_1) & V_2(\kappa_2) & V_2(G_0) \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{\Delta_2(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}} \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) & 0 \\ 0 & V_1(\kappa_2(x, \lambda_0)) & \Psi_1(t, \lambda_0) \\ 0 & V_2(\kappa_2(x, \lambda_0)) & \Psi_2(t, \lambda_0) \end{vmatrix} + \text{Правильно часть ряд Лорана} = \\
&= \frac{-\kappa_2(x, \lambda_0) \begin{vmatrix} V_1(\kappa_2) & \Psi_1(t, \lambda_0) \\ V_2(\kappa_2) & \Psi_2(t, \lambda_0) \end{vmatrix}}{\Delta_2(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}} + \text{Правильно часть ряд Лорана}.
\end{aligned}$$

$u_0(x) = \kappa_2(x, \lambda_0)$ - собственные функции оператора $L(u_0) = \lambda u_0; u_0 \in D(S_2)$

$\overline{v_0(t)} = \begin{vmatrix} V_1(\kappa_1) & \Psi_1(t, \lambda_0) \\ V_2(\kappa_1) & \Psi_2(t, \lambda_0) \end{vmatrix}$ - сопряженные собственные функции оператора.

$L^*(v_0) = \bar{\lambda}_0 v_0; v_0 \in D(S_2^*)$

3. На третьим этапе если $V_1(\kappa_1) = 0, V_1(\kappa_2) = 0$, тогда

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{\lambda_0} G_2(x, t, \lambda) &= \frac{1}{\Delta_2(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}} \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) & G_0(x, t, \lambda_0) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(\kappa_2) & V_1(G_0) \\ V_2(\kappa_1) & V_2(\kappa_2) & V_2(G_0) \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{\Delta_2(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}} \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_1(t, \lambda_0) \\ V_2(\kappa_1(x, \lambda_0)) & V_2(\kappa_2(x, \lambda_0)) & \Psi_2(t, \lambda_0) \end{vmatrix} + \text{Правильно часть ряд Лорана} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{-\Psi(t, \lambda_0) \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) \\ V_2(\kappa_1) & V_2(\kappa_2) \end{vmatrix}}{\Delta_2(\lambda)_{\lambda=\lambda_0}} + \text{Правильно часть ряд Лорана.}$$

$$u_0(x) = \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) \\ V_2(\kappa_1) & V_2(\kappa_2) \end{vmatrix} - \text{собственные функции оператора } L(u_0) = \lambda u_0; u_0 \in D(S_2)$$

$$\overline{v_0(t)} = \Psi_1(t, \lambda_0) - \text{сопряженные собственные функции оператора } L^*(v_0) = \bar{\lambda}_0 v_0; v_0 \in D(S_2^*)$$

4. На четвертом этапе если $V_2(\kappa_1) = 0, V_2(\kappa_2) = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\lambda_0} G_2(x, t, \lambda) &= \frac{1}{\Delta_2(\lambda)_{\lambda=\lambda_0}} \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) & G_0(x, t, \lambda_0) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(\kappa_2) & V_1(G_0) \\ V_2(\kappa_1) & V_2(\kappa_2) & V_2(G_0) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta_2(\lambda)_{\lambda=\lambda_0}} \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) & 0 \\ V_1(\kappa_1(x, \lambda_0)) & V_1(\kappa_2(x, \lambda_0)) & \Psi_1(t, \lambda_0) \\ 0 & 0 & \Psi_2(t, \lambda_0) \end{vmatrix} + \text{Правильно часть ряд Лорана} = \\ &= \frac{\Psi_2(t, \lambda_0) \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(\kappa_2) \end{vmatrix}}{\Delta_2(\lambda)_{\lambda=\lambda_0}} + \text{Правильно часть ряд Лорана.} \end{aligned}$$

$$u_0(x) = \begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda_0) & \kappa_2(x, \lambda_0) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(\kappa_2) \end{vmatrix} - \text{собственные функции оператора } L(u_0) = \lambda u_0; u_0 \in D(S_2)$$

$$\overline{v_0(t)} = \Psi_1(t, \lambda_0) - \text{сопряженные собственные функции оператора } L^*(v_0) = \bar{\lambda}_0 v_0; v_0 \in D(S_2^*)$$

2.15 Двухугольные граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка на отрезке

Рассмотрим задачу на собственные значения [43]

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.15.1)$$

с граничными условиями

$$U_j(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.15.2)$$

где $q(x)$ – суммируемая на $(0, 1)$ функция;

a_{ij} – комплексные числа.

Для дальнейших условий удобно ввести матрицу граничных коэффициентов:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \quad \text{причем ранг } k(A) = 2$$

миноры матрицы A обозначим через A_{ij} , то есть

$$A_{ij} = \det \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix} \quad \text{при } 1 \leq i \leq j \leq 4$$

к примеру, $A_{43} = \det \begin{vmatrix} a_{14} & a_{13} \\ a_{24} & a_{23} \end{vmatrix}$, $A_{34} = \det \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$

нам также удобно ввести симметричную относительно s функцию

$$\hat{q}(x) = \begin{cases} q(x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ q(1-x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

для наглядности приведем графики двух функций обозначим разности

$$Q(x) = q(x) - \hat{q}(x), \quad 0 < x < 1$$

понятно, что $Q(x) = 0$ при $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ наряду с уравнением (1). Рассмотрим следующие уравнения с симметричным потенциалом

$$-u''(x) + \hat{q}(x)u(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.15.3)$$

введем фундаментальную систему решение однородного уравнения (2.15.3), $\hat{S}(x, \lambda)$ -решения уравнения (2.15.3), удовлетворяющие условиям Коши в точке

$$x = \frac{1}{2}, \quad \hat{S}\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 0, \quad \hat{S}'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 1 \quad \hat{S}\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 0, \quad \hat{S}'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 1$$

$\hat{C}(x, \lambda)$ - решения уравнения (2.15.3), удовлетворяющие условиям Коши в точке

$$x = \frac{1}{2}: \quad \hat{C}\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 1, \quad \hat{C}'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 0.$$

аналогично вводятся решения $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$ следующего уравнения (2.15.1).

Лемма 2.2. Для решения $\hat{C}(x, \lambda)$ и $\hat{S}(x, \lambda)$ выполняются соотношения

$$\hat{C}(x, \lambda) = \hat{C}(1-x, \lambda), \quad \hat{S}(x, \lambda) = -\hat{S}(1-x, \lambda)$$

Доказательство. Доказательство проведем только для функций $\hat{C}(x, \lambda)$ известно [19, с. 55], что $\hat{C}(x, \lambda)$ является решением примерного уравнения

$$\hat{C}(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(t) \hat{C}(t, \lambda) dt$$

проверяем

$$\begin{aligned} \hat{C}'(x, \lambda) &= -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \int_{\frac{1}{2}}^x \cos \sqrt{\lambda}(x-t) \hat{q}(t) \hat{C}(t, \lambda) dt \\ \hat{C}''(x, \lambda) &= -\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \left(x - \frac{1}{2} \right) - \sqrt{\lambda} \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(t) \hat{C}(t, \lambda) dt + \hat{q}(x) \hat{C}(x, \lambda) \\ \hat{C}''(x, \lambda) &= -\sqrt{\lambda} \hat{C}(x, \lambda) + \hat{q}(x) \hat{C}(x, \lambda) \end{aligned}$$

Приведенное интегральное уравнения в следующем методом последовательных приближений

$$\hat{C}(x, \lambda) = h_0(x, \lambda) + h_1(x, \lambda) + h_2(x, \lambda) + \dots$$

где $h_0(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} \left(x - \frac{1}{2} \right)$

$$h_{k+1}(x, \lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(t) h_k(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

остается проверить, число выполняется соотношения при всех $k = 0, 1, 2, \dots$

$$h_{k+1}(x, \lambda) = h_{k+1}(1-x, \lambda), \quad 0 < x < 1$$

сначала надо проверить тождество

$$\int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(t) h_k(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-x-t)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(t) h_k(t) dt$$

рассмотрим интеграл, если $\tau = 1-t$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-x-t)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(t) h_k(t) dt &= - \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\tau-x)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(1-\tau) h_k(1-\tau) dt = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-\tau)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(\tau) h_k(\tau) d\tau = h_{k+1}(x, \lambda) \end{aligned}$$

Лемма 2.3. Полностью доказана для случая $C(x, \lambda)$. Аналогично доказывается для функций $S(x, \lambda)$.

Следующие решения $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$ выразим через $\hat{C}(x, \lambda)$, $\hat{S}(x, \lambda)$.

Лемма 2.4. Решение $C(x, \lambda)$ является решением следующего интегрального уравнения

$$C(x, \lambda) = \hat{C}(x, \lambda) + \int_{\frac{1}{2}}^x \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}(x, \lambda) & \hat{S}(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) C(t, \lambda) dt$$

Лемма 2.5. Решение $S(x, \lambda)$ является решением следующего интегрального уравнения

$$S(x, \lambda) = \hat{S}(x, \lambda) + \int_{\frac{1}{2}}^x \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}(x, \lambda) & \hat{S}(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) S(t, \lambda) dt$$

Доказательство леммы 2.5. Сначала проверим вольность первого условия Коши $C\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = \hat{C}\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 1$ вычислим первую производную $C(x, \lambda)$ в результате имеем:

$$C'(x, \lambda) = \hat{C}'(x, \lambda) + \int_{\frac{1}{2}}^x \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}'(x, \lambda) & \hat{S}'(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) C(t, \lambda) dt$$

теперь проверим выполнение второго условия Коши $C'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = \hat{C}'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 0$ вычислим вторую производную $C(x, \lambda)$ в результате имеем

$$C''(x, \lambda) = \hat{C}''(x, \lambda) + \int_{\frac{1}{2}}^x \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}''(x, \lambda) & \hat{S}''(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) C(t, \lambda) dt + \begin{vmatrix} \hat{C}(x, \lambda) & \hat{S}(x, \lambda) \\ \hat{C}'(x, \lambda) & \hat{S}'(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(x) C(x, \lambda)$$

отсюда получим равенство

$$C''(x, \lambda) = (\hat{q}(x) - \lambda) \hat{C}(x, \lambda) + (\hat{q}(x) - \lambda) \int_{\frac{1}{2}}^x \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}''(x, \lambda) & \hat{S}''(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) C(t, \lambda) dt + Q(x) C(x, \lambda)$$

или

$$C''(x, \lambda) = (\hat{q}(x) - \lambda) \hat{C}(x, \lambda) + Q(x) C(x, \lambda)$$

так как $Q(x) = q(x) - \hat{q}(x)$ то окончательно получаем

$$C''(x, \lambda) = -\lambda \hat{C}(x, \lambda) + Q(x) C(x, \lambda)$$

Лемма 2 полностью доказана.

Лемма 2.6 доказывается точно так же как доказана лемма 2.5 согласно монографии [19, с. 55] введем характеристический определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(C) & U_1(S) \\ U_2(C) & U_2(S) \end{vmatrix}$$

к примеру, $U_1(C) = a_{11}C(0, \lambda) + a_{12}C(0, \lambda) + a_{13}C(1, \lambda) + a_{14}C(1, \lambda)$

Лемма 2.7. Если $\lambda = \lambda_0$ нуль характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ кратности m_0 то λ_0 -собственное значение задачи (2.15.1)-(2.15.2) алгебраической кратности m_0

Лемма 4 доказана в монографии [19, с. 55] λ_0, m_0 будет

$$\Delta(\lambda_0) = 0, \dot{\Delta}(\lambda_0) = 0, \dots, \overset{(m_0-1)}{\Delta}(\lambda_0) = 0, \overset{(m_0)}{\Delta}(\lambda_0) \neq 0$$

например

$$\begin{aligned} \lambda_0, m_0 &= 1 \\ \Delta(\lambda_0) &= 0, \Delta(\lambda_0) \neq 0' \\ \lambda_0, m_0 &= 2 \\ \Delta(\lambda_0) &= 0, \Delta(\lambda_0) = 0, \overset{(2)}{\Delta}(\lambda_0) \neq 0 \end{aligned}$$

для матрицы собственного значения [19, с. 75]

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

заметим, что $\Delta(\lambda)$ - целая функция от λ , точно также вводим характеристический определитель

$$\hat{\Delta}(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\hat{C}) & U_1(\hat{S}) \\ U_2(\hat{C}) & U_2(\hat{S}) \end{vmatrix}$$

Лемма 2.8. Справедлива формула:

$$\hat{\Delta}(\lambda) = (A_{12} + A_{14} + A_{32} + A_{34}) + 2(A_{14} + A_{32})\hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) + 2A_{24}\hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda) + 2A_{31}\hat{C}(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda)$$

Доказательства лемма 2.8. Вычислим сначала:

$$U_1(\hat{C}) = a_{11}\hat{C}(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) + a_{12}\hat{C}'(0, \lambda) + a_{13}\hat{C}(1, \lambda) + a_{14}\hat{C}(1, \lambda) =$$

из леммы 1 следует что,

$$= \begin{vmatrix} \hat{C}(x, \lambda) = \hat{C}(1-x, \lambda) \\ \hat{C}(0, \lambda) = \hat{C}(1, \lambda) \\ \hat{C}'(x, \lambda) = -\hat{C}'(1-x, \lambda) \\ \hat{C}'(0, \lambda) = -\hat{C}'(1, \lambda) \end{vmatrix} = (a_{11} + a_{13})\hat{C}(0, \lambda) + (a_{12} + a_{14})\hat{C}'(0, \lambda)$$

ТОЧНО ТАКЖЕ ВЫЧИСЛЯЮТСЯ ЗНАЧЕНИЯ

$$\begin{aligned} U_1(\hat{S}) &= (a_{11} - a_{13})\hat{S}(0, \lambda) + (a_{12} + a_{14})\hat{S}'(0, \lambda) \\ U_1(\hat{C}) &= (a_{21} + a_{23})\hat{C}(0, \lambda) + (a_{22} + a_{24})\hat{C}'(0, \lambda) \\ U_1(\hat{S}) &= (a_{21} - a_{23})\hat{S}(0, \lambda) + (a_{22} + a_{24})\hat{S}'(0, \lambda) \end{aligned}$$

отсюда вытекает что

$$\hat{\Delta}(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{13})\hat{C}(0, \lambda) + (a_{12} - a_{14})\hat{C}'(0, \lambda) & (a_{11} - a_{13})\hat{S}(0, \lambda) + (a_{12} + a_{14})\hat{S}'(0, \lambda) \\ (a_{21} + a_{23})\hat{C}(0, \lambda) + (a_{22} - a_{24})\hat{C}'(0, \lambda) & (a_{21} - a_{23})\hat{S}(0, \lambda) + (a_{22} + a_{24})\hat{S}'(0, \lambda) \end{vmatrix}$$

из курса линейной алгебры известно, что

$$\begin{vmatrix} a+b & e \\ c-d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(\lambda) &= \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{13})\hat{C}(0, \lambda) & (a_{11} - a_{13})\hat{S}(0, \lambda) \\ (a_{21} + a_{23})\hat{C}(0, \lambda) & (a_{21} - a_{23})\hat{S}(0, \lambda) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a_{12} - a_{14})\hat{C}'(0, \lambda) & (a_{11} - a_{13})\hat{S}(0, \lambda) \\ (a_{22} - a_{24})\hat{C}'(0, \lambda) & (a_{21} - a_{23})\hat{S}(0, \lambda) \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{13})\hat{C}(0, \lambda) & (a_{12} + a_{14})\hat{S}'(0, \lambda) \\ (a_{21} + a_{23})\hat{C}(0, \lambda) & (a_{22} - a_{24})\hat{S}'(0, \lambda) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a_{12} - a_{14})\hat{C}'(0, \lambda) & (a_{12} + a_{14})\hat{S}'(0, \lambda) \\ (a_{22} - a_{24})\hat{C}'(0, \lambda) & (a_{22} - a_{24})\hat{S}'(0, \lambda) \end{vmatrix} = \\ &= \hat{C}(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) \begin{vmatrix} a_{11} + a_{13} & a_{11} - a_{13} \\ a_{21} + a_{23} & a_{21} - a_{23} \end{vmatrix} + \hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) \begin{vmatrix} a_{12} - a_{24} & a_{11} - a_{13} \\ a_{22} - a_{24} & a_{21} - a_{23} \end{vmatrix} + \\ &+ \hat{C}(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda) \begin{vmatrix} a_{11} + a_{13} & a_{12} + a_{14} \\ a_{21} + a_{23} & a_{22} + a_{24} \end{vmatrix} + \hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda) \begin{vmatrix} a_{12} - a_{24} & a_{12} + a_{14} \\ a_{22} - a_{24} & a_{22} + a_{24} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ОТСЮДА ВЫТЕКАЕТ

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(\lambda) &= 2A_{24}\hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda) + 2A_{31}\hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) + \\ &+ (A_{21} + A_{32} + A_{14} + A_{43})\hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) + (A_{12} + A_{14} + A_{32} + A_{34})\hat{C}(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) = \\ &\begin{vmatrix} \hat{C}(0, \lambda) & \hat{S}(0, \lambda) \\ \hat{C}'(0, \lambda) & \hat{S}'(0, \lambda) \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \hat{C}(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda) = 1 + \hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) \\ &= (A_{12} + A_{14} + A_{32} + A_{34}) + 2(A_{14} + A_{32})\hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) + 2A_{24}\hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda) + 2A_{31}\hat{C}(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda). \end{aligned}$$

лемма 5 полностью доказана.

Следствие 1. Если $A_{24} = 0, A_{32} + A_{14} = 0, A_{31} = 0, m_0$ характеристический определитель

$$\hat{\Delta}(\lambda) = A_{12} + A_{14} + A_{32} + A_{34} \neq 0$$

не имеет нулей.

Следствие 2. Если $A_{24} = 0, A_{32} + A_{14} = 0, A_{31} = 0, A_{12} + A_{14} + A_{34} + A_{34} = 0,$

$$m_0 \Delta(\lambda) \equiv 0.$$

в монографии Марченко В.А., лемма 5 доказана только для случая $\hat{q}(x) \equiv 0$. В нашем случае $\hat{q}(x) \neq 0$. согласно монографии краевые условия (2.15.2) называются вырожденными, если $A_{24} = 0, A_{32} + A_{14} = 0, A_{31} = 0$.

Теперь вычислим характеристический определитель симметричного относительно $x = \frac{1}{2}$. для этого, используют вычисления

$$U_1(C) = C(x, \lambda) = \hat{C}(x, \lambda) + r(x, \lambda)$$

где

$$r(x, \lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^x \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}(x, \lambda) & \hat{S}(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) C(t, \lambda) dt$$

если $t < \frac{1}{2}, Q(t) = 0,$ $r(x, \lambda) \equiv 0, x < \frac{1}{2}$

$$U_1(\hat{C} + r) = U_1(\hat{C}) + U_1(r)$$

точно также вычисляются значения

$$U_1(S) = U_1(\hat{S}) + U_1(p),$$

$$U_2(C) = U_2(\hat{C}) + U_2(r),$$

$$U_2(S) = U_2(\hat{S}) + U_2(p),$$

отсюда вытекает

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\hat{C}) + U_1(r) & U_1(\hat{S}) + U_1(p) \\ U_2(\hat{C}) + U_2(r) & U_2(\hat{S}) + U_2(p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1(\hat{C}) & U_1(\hat{S}) \\ U_2(\hat{C}) & U_2(\hat{S}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1(r) & U_1(\hat{S}) \\ U_2(r) & U_2(\hat{S}) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} U_1(\hat{C}) & U_1(p) \\ U_2(\hat{C}) & U_2(p) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1(r) & U_1(p) \\ U_2(r) & U_2(p) \end{vmatrix} = \hat{\Delta}(\lambda) + \begin{vmatrix} U_1(r) & U_1(\hat{S}) \\ U_2(r) & U_2(\hat{S}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1(\hat{C}) & U_1(p) \\ U_2(\hat{C}) & U_2(p) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1(r) & U_1(p) \\ U_2(r) & U_2(p) \end{vmatrix}$$

отдельно вычислим следующее выражение

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} U_1(r) & U_1(\hat{S}) \\ U_2(r) & U_2(\hat{S}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_{\frac{1}{2}}^1 \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ a_{13}\hat{C}(1, \lambda) + a_{14}\hat{C}'(1, \lambda) & a_{13}\hat{S}(1, \lambda) + a_{14}\hat{S}'(1, \lambda) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q(t)C(t, \lambda)dt \\ Q(t)C(t, \lambda)dt \end{vmatrix} = \\
& = \int_{\frac{1}{2}}^1 Q(t)C(t, \lambda) \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ U_{11}(\hat{C}) & U_{11}(\hat{S}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1(\hat{S}) \\ U_2(\hat{S}) \end{vmatrix} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 Q(t)C(t, \lambda)\hat{C}(t, \lambda) \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{S}) & U_1(\hat{S}) \\ U_{21}(\hat{S}) & U_2(\hat{S}) \end{vmatrix} dt - \\
& - \int_{\frac{1}{2}}^1 Q(t)C(t, \lambda)\hat{S}(t, \lambda) \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{S}) & U_1(\hat{S}) \\ U_{21}(\hat{S}) & U_2(\hat{S}) \end{vmatrix} dt \\
& \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{S}) & U_1(\hat{S}) \\ U_{21}(\hat{S}) & U_2(\hat{S}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{S}) & U_{10}(\hat{S}) + U_{11}(\hat{S}) \\ U_{21}(\hat{S}) & U_{20}(\hat{S}) + U_{21}(\hat{S}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{S}) & U_{10}(\hat{S}) \\ U_{21}(\hat{S}) & U_{20}(\hat{S}) \end{vmatrix} = \\
& = \begin{vmatrix} a_{13}\hat{S}(1, \lambda) + a_{14}\hat{S}'(1, \lambda) & a_{11}\hat{S}(0, \lambda) + a_{12}\hat{S}'(0, \lambda) \\ a_{23}\hat{S}(1, \lambda) + a_{24}\hat{S}'(1, \lambda) & a_{21}\hat{S}(0, \lambda) + a_{22}\hat{S}'(0, \lambda) \end{vmatrix} = A_{13}\hat{C}(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) + (A_{41} + A_{23})\hat{S}(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda) + \\
& + A_{42}\hat{C}(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda).
\end{aligned}$$

Симметрический получим:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{C}) & U_1(\hat{S}) \\ U_{21}(\hat{C}) & U_2(\hat{S}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13}\hat{C}(0, \lambda) - a_{14}\hat{C}'(0, \lambda) & (a_{11} - a_{13})\hat{S}(0, \lambda) + (a_{12} + a_{14})\hat{S}'(0, \lambda) \\ a_{23}\hat{C}(0, \lambda) - a_{24}\hat{C}'(0, \lambda) & (a_{21} - a_{23})\hat{S}(0, \lambda) + (a_{22} + a_{34})\hat{S}'(0, \lambda) \end{vmatrix} = \\
& = A_{31}\hat{C}(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) + (A_{14} + A_{43})\hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) + (A_{32} + A_{34})\hat{C}(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda) + A_{24}\hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda)
\end{aligned}$$

Вронскиан которого следующее:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \hat{C}(0, \lambda) & \hat{S}(0, \lambda) \\ \hat{C}'(0, \lambda) & \hat{S}'(0, \lambda) \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \hat{C}(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda) = 1 + \hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) \\
& \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{C}) & U_1(\hat{S}) \\ U_{21}(\hat{C}) & U_2(\hat{S}) \end{vmatrix} = (A_{32} + A_{34}) + A_{31}\hat{C}(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) + (A_{14} + A_{32})\hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}(0, \lambda) + A_{24}\hat{C}'(0, \lambda)\hat{S}'(0, \lambda). \\
& -y^{(2)}(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \\
& \begin{cases} y(0) - k y(1) = 0 \\ y^{(1)}(0) + k y^{(1)}(1) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} C(0, \lambda) - k C(1, \lambda) & S(0, \lambda) - k S(1, \lambda) \\ C'(0, \lambda) + k C'(1, \lambda) & S'(0, \lambda) + k S'(1, \lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{C}(0, \lambda) + r(0, \lambda) - k \hat{C}(1, \lambda) - k r(1, \lambda) & \hat{S}(0, \lambda) + p(0, \lambda) - k \hat{S}(1, \lambda) - k p(1, \lambda) \\ \hat{C}'(0, \lambda) + r'(0, \lambda) + k \hat{C}'(1, \lambda) + k r'(1, \lambda) & \hat{S}'(0, \lambda) + p'(0, \lambda) + k \hat{S}'(1, \lambda) + k p'(1, \lambda) \end{vmatrix} =$$

отсюда

$$r(0, \lambda) = 0, r'(0, \lambda) = 0, \hat{C}(1, \lambda) = \hat{C}(0, \lambda), \hat{C}'(1, \lambda) = -\hat{C}'(0, \lambda),$$

$$p(0, \lambda) = 0, p'(0, \lambda) = 0, \hat{S}(1, \lambda) = -\hat{S}(0, \lambda), \hat{S}'(1, \lambda) = \hat{S}'(0, \lambda),$$

$$= \begin{vmatrix} (1-k)\hat{C}(0, \lambda) - k r(1, \lambda) & (1+k)\hat{S}(0, \lambda) - k p(1, \lambda) \\ (1-k)\hat{C}'(0, \lambda) + k r'(1, \lambda) & (1+k)\hat{S}'(0, \lambda) + k p'(1, \lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-k)\hat{C}(0, \lambda) & (1+k)\hat{S}(0, \lambda) \\ (1-k)\hat{C}'(0, \lambda) & (1+k)\hat{S}'(0, \lambda) \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} (1-k)\hat{C}(0, \lambda) & -k p(1, \lambda) \\ (1-k)\hat{C}'(0, \lambda) & k p'(1, \lambda) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -k r(1, \lambda) & (1+k)\hat{S}(0, \lambda) \\ k r'(1, \lambda) & (1+k)\hat{S}'(0, \lambda) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -k r(1, \lambda) & -k p(1, \lambda) \\ k r'(1, \lambda) & k p'(1, \lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= (1-k^2) \begin{vmatrix} \hat{C}(0, \lambda) & \hat{S}(0, \lambda) \\ \hat{C}'(0, \lambda) & \hat{S}'(0, \lambda) \end{vmatrix} + k(1-k) \begin{vmatrix} \hat{C}(0, \lambda) & -p(1, \lambda) \\ \hat{C}'(0, \lambda) & p'(1, \lambda) \end{vmatrix} +$$

$$+ k(1+k) \begin{vmatrix} -r(1, \lambda) & \hat{S}(0, \lambda) \\ r'(1, \lambda) & \hat{S}'(0, \lambda) \end{vmatrix} + k^2 \begin{vmatrix} -r(1, \lambda) & -p(1, \lambda) \\ r'(1, \lambda) & p'(1, \lambda) \end{vmatrix},$$

согласно формуле вместо x ставится 1

$$p(1, \lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}(1, \lambda) & \hat{S}(1, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) S(t, \lambda) dt$$

$$p'(1, \lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}'(1, \lambda) & \hat{S}'(1, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) S(t, \lambda) dt$$

$$r(1, \lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}(1, \lambda) & \hat{S}(1, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) C(t, \lambda) dt$$

$$r'(1, \lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}'(1, \lambda) & \hat{S}'(1, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) C(t, \lambda) dt$$

$$= 1 + k(1-k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \begin{vmatrix} \hat{C}(0, \lambda) & -\begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}(1, \lambda) & \hat{S}(1, \lambda) \end{vmatrix} \\ \hat{C}'(0, \lambda) & \begin{vmatrix} \hat{C}(t, \lambda) & \hat{S}(t, \lambda) \\ \hat{C}'(1, \lambda) & \hat{S}'(1, \lambda) \end{vmatrix} \end{vmatrix} Q(x) S(t, \lambda) dt +$$

$$\begin{aligned}
& +k(1+k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\begin{array}{c} \left| \hat{C}(t, \lambda) \quad \hat{S}(t, \lambda) \right| \\ \left| \hat{C}(1, \lambda) \quad \hat{S}(1, \lambda) \right| \\ \left| \hat{C}(t, \lambda) \quad \hat{S}(t, \lambda) \right| \\ \left| \hat{C}'(1, \lambda) \quad \hat{S}'(1, \lambda) \right| \end{array} \begin{array}{c} \hat{S}(0, \lambda) \\ \\ \hat{S}'(0, \lambda) \end{array} \right] Q(x)C(t, \lambda) dt = \\
& = 1 + k(1-k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\hat{C}(t, \lambda) \begin{array}{c} \left| \hat{C}(0, \lambda) \quad -\hat{S}(1, \lambda) \right| \\ \left| \hat{C}'(0, \lambda) \quad \hat{S}'(1, \lambda) \right| \end{array} + \hat{S}(t, \lambda) \begin{array}{c} \left| \hat{C}(0, \lambda) \quad \hat{C}(1, \lambda) \right| \\ \left| \hat{C}'(0, \lambda) \quad \hat{C}'(1, \lambda) \right| \end{array} \right] Q(x)S(t, \lambda) dt + \\
& +k(1+k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\hat{C}(t, \lambda) \begin{array}{c} \left| \hat{S}(1, \lambda) \quad \hat{S}(0, \lambda) \right| \\ \left| \hat{S}'(1, \lambda) \quad \hat{S}'(0, \lambda) \right| \end{array} + \hat{S}(t, \lambda) \begin{array}{c} \left| -\hat{C}(1, \lambda) \quad \hat{S}(0, \lambda) \right| \\ \left| \hat{C}'(1, \lambda) \quad \hat{S}'(0, \lambda) \right| \end{array} \right] Q(x)C(t, \lambda) dt = \\
& W = \begin{array}{c} \left| \hat{C}(0, \lambda) \quad -\hat{S}(1, \lambda) = \hat{S}(0, \lambda) \right| \\ \left| \hat{C}'(0, \lambda) \quad \hat{S}'(1, \lambda) = \hat{S}'(0, \lambda) \right| \end{array} = 1, \quad W = \begin{array}{c} \left| -\hat{C}(1, \lambda) = \hat{C}(0, \lambda) \quad \hat{S}(0, \lambda) \right| \\ \left| \hat{C}'(1, \lambda) = -\hat{C}'(0, \lambda) \quad \hat{S}'(0, \lambda) \right| \end{array} = 1. \\
& = 1 + k(1-k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\hat{C}(t, \lambda) + \hat{S}(t, \lambda) \begin{array}{c} \left| \hat{C}(0, \lambda) \quad \hat{C}(1, \lambda) \right| \\ \left| \hat{C}'(0, \lambda) \quad \hat{C}'(1, \lambda) \right| \end{array} \right] Q(x)S(t, \lambda) dt + \\
& + k(1+k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\hat{C}(t, \lambda) \begin{array}{c} \left| \hat{S}(1, \lambda) \quad \hat{S}(0, \lambda) \right| \\ \left| \hat{S}'(1, \lambda) \quad \hat{S}'(0, \lambda) \right| \end{array} + \hat{S}(t, \lambda) \right] Q(x)C(t, \lambda) dt = \\
& = 1 + k(1-k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\hat{C}(t, \lambda) + \hat{S}(t, \lambda) \begin{array}{c} \left| \hat{C}(0, \lambda) \quad \hat{C}(0, \lambda) \right| \\ \left| \hat{C}'(0, \lambda) \quad -\hat{C}'(0, \lambda) \right| \end{array} \right] Q(x)S(t, \lambda) dt + \\
& + k(1+k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\hat{C}(t, \lambda) \begin{array}{c} \left| -\hat{S}(0, \lambda) \quad \hat{S}(0, \lambda) \right| \\ \left| \hat{S}'(0, \lambda) \quad \hat{S}'(0, \lambda) \right| \end{array} + \hat{S}(t, \lambda) \right] Q(x)C(t, \lambda) dt = \\
& = 1 + k(1-k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \hat{C}(t, \lambda) \hat{S}(t, \lambda) Q(x) dt + k(1+k) \int_{\frac{1}{2}}^1 \hat{S}(t, \lambda) C(t, \lambda) Q(x) dt
\end{aligned}$$

3 ФУНКЦИЯ ГРИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ

В данном разделе приведены вспомогательные известные факты а также уточнена терминология и соответствующие обозначения. Материал данного раздела диссертаций соответствует материалу приведенному в монографиях [3,4,6,55,56,72,75].

3.1 Основные понятия, связанные с граф-деревом

В следующих пунктах вместо общих геометрических графов будем рассматривать частные их виды: граф-дерево и граф-звезда. Определения и обозначения заимствованны из работ [3,4,75,88]. При этом некоторые вышеприведенные утверждения (формула Лагранжа и описание самосопряженных сужений) намного упростятся. В частности, приведена формула Лагранжа для дифференциального оператора на дереве с условиями Кирхгофа в его внутренних вершинах. Мы изучаем вопрос о полном описании корректных сужений заданного максимального дифференциального оператора на дерево образном графе. В этом подразделе также описаны все самосопряженные сужения максимального оператора, а также все обратимые сужения максимального оператора. Сначала приведем известные понятия, связанные с граф-деревом.

Пусть задан граф-дерево $\Gamma(V, E)$ Ориентированное дерево – ациклический орграф (ориентированный граф, не содержащий циклов), в котором только одна вершина имеет нулевую степень захода (в неё не ведут дуги), а все остальные вершины имеют степень захода 1 (в них ведёт ровно по одной дуге). Вершина с нулевой степенью захода называется корнем дерева, которое обозначим 0 , вершины с нулевой степенью исхода (из которых не исходит ни одна дуга) называются граничными вершинами или листьями и обозначается через Γ . Вершины, не являющиеся граничными называются внутренними и обозначим через I . Граничные вершины будем нумеровать числами 0 до p , а внутренние вершины $p+1$ до r . Количество исходящую из вершины j дуг обозначим через m_j .

Не умоляя общности, считаем, что дуги имеют одинаковую длину. Дуга, имеющая конец в вершине j , обозначаем через e_j . Функцию $y(x)$ определенную на дуге e_j обозначаем $y_j(x_j)$, $x_j \in e_j$.

Путь, исходящий из корня и заканчивающийся в вершине j обозначим через S_j а его длину через $S_j - 1$. Далее, мы предполагаем, что из корня выходит только одна дуга.

3.2 Определение максимального оператора на граф-дереве

Рассмотрим пространство [25, с. 14]

$$L_2(\Gamma) = \prod_{j=1}^m L_2(e_j)$$

с элементами

$$\vec{y}(\vec{x}) = [y_j(x_j), j = \overline{1, m}]$$

где $\vec{x}(x_j, j = \overline{1, m})$ и \prod_j^r – декартово произведение подпространств) и с конечной нормой [25, с. 14-15]

$$\|\vec{y}\|_{L_2(\Gamma)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m \int_{e_j} |y_j(x_j)|^2 dx_j}$$

точно также введем пространство [25, с. 14-15]

$$W_2^2(\Gamma) = \prod_{j=1}^m W_2^2(e_j)$$

Введем множество функции $D(\Lambda_{\max}) \subset W_2^2(\Gamma)$, элементы которого в каждой внутренней $k = p+1, \dots, m$ удовлетворяют условиям Кирхгофа [22, с. 133]

$$y_k(1) = y_{m_1(k)}(0) = \dots = y_{m_n(k)}(0), \quad (3.2.1)$$

$$y'_k(1) = y'_{m_1(k)}(0) + \dots + y'_{m_n(k)}(0) \quad (3.2.2)$$

здесь $S_1(k), \dots, S_{n_k}(k)$ дуги исходящие из вершины (рисунок 1).

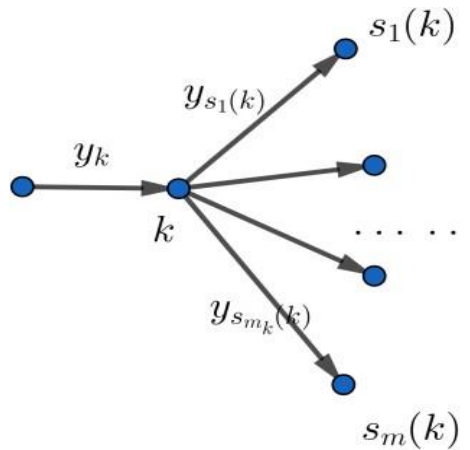


Рисунок 1 – Разветвление во внутренней вершине k

Оператор Λ_{\max} с областью определения $D(\Lambda_{\max})$ задаваемый следующим дифференциальным выражением:

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = f_j(x_j), \quad e_j \in E, \quad 0 < x_j < 1, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

называется максимальным оператором. Где $\{q_j(x_j), x_j \in e_j \in E, 0 < x_j < 1\}$ набор вещественных непрерывных функций, обычно называемых потенциалами.

Отметим, что количество условий Кирхгофа во внутренних вершинах равно $2m - p - 1$.

3.3 Формула Лагранжа для дифференциальных операторов на граф-дереве

Формула Лагранжа играет важную роль при изучении дифференциальных операторов на отрезке. В этом параграфе мы приведем аналог формулы Лагранжа в случае дифференциального оператора на граф-дереве. Сначала сформулируем несколько лемм.

Лемма 3.1. Для любых функций

$\vec{y}(\vec{x}) = \left\{ y_j(x_j), j = 1, \dots, m, \vec{V}(\vec{x}) = v_j(x_j), j = 1, \dots, m \right\}$ из $W_2^2(\Gamma)$ выполняется тождество:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j &= \sum_{k=1}^m [y'_k(1) \overline{v_k(1)} - y_k(1) \overline{v'_k(1)}] - \sum_{k=p+1}^m [y'_k(0) \overline{v_k(0)} - y_k(0) \overline{v'_k(0)}] + \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

где \bar{z} – комплексное сопряжение числу z .

Доказательство лемма 3.1. Рассмотрим интеграл из левой части соотношения (3.3.1). интеграл на дуге e_j запишем следующим образом:

$$\int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j = \int_0^1 (-y_j''(x_j) + q_j(x_j) y_j(x_j)) \overline{v_j(x_j)} dx_j$$

двукратное интегрирование по частям дает возможность записать выражение

$\int_0^1 (-y_j''(x_j)) \overline{v_j(x_j)} dx_j$ в виде:

$$\int_0^1 (-y_j''(x_j)) \overline{v_j(x_j)} dx_j = [-y_j''(x_j) \overline{v_j(x_j)} + y_j(x_j) \overline{v_j'(x_j)}]_{x_j=0}^{x_j=1} + \int_0^1 y_j(x_j) (-\overline{v_j''(x_j)}) dx_j \quad (3.3.1a)$$

так как все дуги e_1, \dots, e_m имеют концы на $x = 1$ и только дуги e_{p+1}, \dots, e_m имеют концы на $x = 0$ тогда из равенств (3.3.1a) вытекает лемма (3.3).

Лемма 3.2. Для любых функций

$\vec{y}(\vec{x}) = \left\{ y_j(x_j), j = 1, \dots, m, \vec{V}(\vec{x}) = v_j(x_j), j = 1, \dots, m \right\}$ из области определения

максимального оператора Λ_{\max} выполняется тождество:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j &= \sum_{k=1}^m [y'_k(1) \overline{v_k(1)} - y_k(1) \overline{v'_k(1)}] - \sum_{k=p+1}^m [y'_{p+1}(0) \overline{v_{p+1}(0)} - y_{p+1}(0) \overline{v'_{p+1}(0)}] + \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Доказательство лемма 3.2. Предположим, что j принимает значения $p+1, \dots, m$ Вклад в вершину можно j записать в виде:

$$\left[-y'_k(1)\overline{v_k(1)} - y_k(1)\overline{v'_k(1)} \right] + \sum_{k=1}^m \left[y'_{m_k}(0)\overline{v_{m_k}(1)} - y_{m_k}(1)\overline{v'_{m_k}(1)} \right] = 0 \quad (3.3.3)$$

по условию (3.1) посчитаем значение суммы (3.5), получим:

$$\left[-y'_j(1)\overline{v_j(1)} - y_j(1)\overline{v'_j(1)} \right] + \overline{v'_j(1)} \sum_{k=1}^m y_{m_k(j)}(0) - y_j(1) \sum_{k=1}^{m_j} \overline{v'_{m_k(j)}(0)} = 0 \quad (3.3.4)$$

соотношение (3.3.4) означает, что вклад внутренних вершин $p+1, \dots, m$ в слагаемые, не содержащие интегралы (3.3.2), равен нулю. Поэтому в (3.3.2) необходимо учитывать только вклад граничных вершин $0, \dots, p$. Тогда мы имеем значения функции $y_j(x_j), y'_j(x_j), v_j(x_j), v'_j(x_j), j, \dots, p$ в точке $x=1$. Напомним, что эти функции определены на входящих дугах e_1, \dots, e_m до граничных вершин $0, \dots, p$ Существуют также значения Функций $y_j(x_j), y'_j(x_j), v_j(x_j), v'_j(x_j), j, \dots, p$ в точке $x=0$ Эти функции определены на исходящих дугах e_{p+1} из вершины 0 и направленные к вершине $p+1$ (рисунок 2):

$$\sum_{k=1}^p \left[y'_k(1)\overline{v_k(1)} + y_k(1)\overline{v'_k(1)} \right] - \left[-y'_{p+1}(0)\overline{v_{p+1}(0)} + y_{p+1}(0)\overline{v'_{p+1}(0)} \right] = 0$$

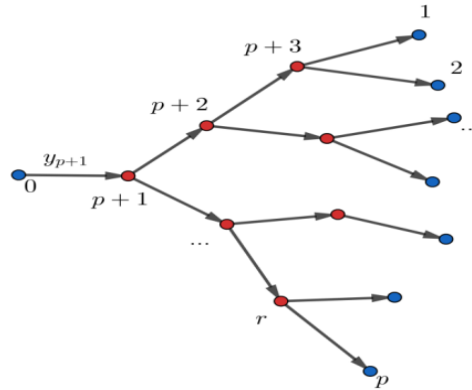


Рисунок 2 – Граф-дерево с вершинами

Примечание – красные вершины-внутренние, синие-граничные вершины

Доказательство леммы 3.2 завершено.

Из леммы 3.2 следует, что вклад внутренних вершин в члены, не содержащие интегралы (3.2.2), равен нулю. Другими словами, члены, которые вне интеграла (3.2.2) содержат только вклад граничных вершин. Следуя монографии подобные формулы называются формулой Лагранжа. Формула (3.2.2) может быть обобщена в следующем направлении.

Рассмотрим для $k = 1, \dots, 2(p+1)$ следующие граничные формы [27, с. 123]

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{j=1}^p [\alpha_{kj} y_j(1) + \beta_{kj} y'_j(1)] + [\alpha_{k,p+1} y_{p+1}(0) + \beta_{k,p+1} y'_{p+1}(0)] \quad (3.3.5)$$

где $\alpha_{kj}, \beta_{kj}, \alpha_{k,p+1}, \beta_{k,p+1}$ некоторые постоянные.

Теорема 3.1 (Формула Лагранжа) Пусть $U_1, \dots, U_{2(p+1)}$ множество линейно независимых граничных форм. Тогда существует единственный набор граничных форм $T_1, \dots, T_{2(p+1)}$ таких, что для любых функций $\vec{y}(\vec{x}) = \{y_j(x_j), j=1, \dots, m, \vec{V}(\vec{x}) = v_j(x_j), j=1, \dots, m\}$ из Λ_{\max} имеет место следующее тождество:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j &= U_1(\vec{Y}) \overline{T_{2(p+1)}(\vec{V})} + U_2(\vec{Y}) \overline{T_{2(p+1)-1}(\vec{V})} + \dots + U_{2(p+1)}(\vec{Y}) \overline{T_1(\vec{V})} \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Доказательство теорема 3.1. Введем разность:

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{j=1}^m \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j - \sum_{j=1}^m \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j$$

согласно лемме 3.2 эта разность представима в виде:

$$U_k(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{j=1}^p [-y'_k(1) \overline{v_k(1)} + y_k(1) \overline{v'_k(1)}] + [y'_{p+1}(1) \overline{v_{p+1}(1)} + y_{p+1}(1) \overline{v'_{p+1}(1)}] \quad (3.3.7)$$

таким образом, разность выражается набором $2(p+1)$ граничных значений $\{y_j(1), y'_j(1), 1, \dots, p\}, \{y_{p+1}(0), y'_{p+1}(0), 1, \dots, p\}$. Этот набор граничных значений представляет $2(p+1)$ линейную независимую систему. Следовательно, множество граничных значений может быть выражено в виде линейной комбинации произвольных граничных форм $U_1, \dots, U_{2(p+1)}$ удовлетворяющих условиям теоремы 3.1. Для этого соотношения (3.5) следует рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно $\{y_j(1), y'_j(1), 1, \dots, p\}, \{y_{p+1}(0), y'_{p+1}(0), 1, \dots, p\}$. Разрешая систему (3.3.3) относительно $\{y_j(1), y'_j(1), 1, \dots, p\}, \{y_{p+1}(0), y'_{p+1}(0), 1, \dots, p\}$ имеем:

$$\begin{aligned}
y_j(\mathbf{1}) &= \sum_{k=1}^{2(p+1)} \gamma_{kj} U_k(\vec{Y}), \quad j = 1, \dots, p, \\
y'_j(\mathbf{1}) &= \sum_{k=1}^{2(p+1)} \xi_{kj} U_k(\vec{Y}), \quad j = 1, \dots, p, \\
y_{p+1}(\mathbf{0}) &= \sum_{k=1}^{2(p+1)} \gamma_{k, p+1} U_k(\vec{Y}), \\
y'_{p+1}(\mathbf{0}) &= \sum_{k=1}^{2(p+1)} \xi_{k, p+1} U_k(\vec{Y}),
\end{aligned}$$

подставляя указанные выражения в разность: Преобразуем функцию Грина задачи (3.5.1),

$$\begin{aligned}
U_k(\vec{Y}, \vec{V}) &= \sum_{j=1}^p \left[- \left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \xi_{jk} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v_j(\mathbf{1})} + \left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \xi_{jk} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v'_k(\mathbf{1})} \right] + \\
&+ \left[\left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \xi_{j, p+1} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v_{p+1}(\mathbf{0})} + \left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \xi_{j, p+1} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v'_{p+1}(\mathbf{0})} \right]
\end{aligned}$$

сгруппируем правую часть последнего равенства относительно $\left\{ U_k(\vec{Y}) \right\}$, тогда получим:

$$U_k(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{j=1}^{2(p+1)} U_j(\vec{Y}) \left\{ \sum_{k=1}^p \left[- \xi_{jk} \overline{v_j(\mathbf{1})} + \gamma_{jk} \overline{v'_k(\mathbf{1})} \right] + \left[\xi_{j, p+1} \overline{v_{p+1}(\mathbf{0})} - \gamma_{jk} \overline{v'_{p+1}(\mathbf{0})} \right] \right\},$$

Если в последнем выражении сумму в квадратных скобках обозначить через:

$$T_{2(p+1)-k+1}(\vec{V}) = \sum_{k=1}^p \left[- \overline{\xi_{jk} v_j(\mathbf{1})} + \overline{\gamma_{jk} v'_k(\mathbf{1})} \right] + \left[\overline{\xi_{j, p+1} v_{p+1}(\mathbf{0})} - \overline{\gamma_{jk} v'_{p+1}(\mathbf{0})} \right]$$

то получим требуемую формулу:

$$\sum_{j=1}^m \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j = \sum_{k=1}^{2(p+1)} U_k(\vec{Y}) \overline{T_{2(p+1)-k+1}(\vec{V})} + \sum_{j=1}^m \int_{e_j} y_j(x_j) \Lambda_{\max} v_j(x_j) dx_j$$

Формула (3.3.4) называется формулой Лагранжа. Из теоремы (3.1) следует:
Следствие 3.1. Пусть Λ сужение оператора Λ_{\max} на области определения $D(\Lambda) = \left\{ \vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : U_1(\vec{Y}), \dots, U_{p+1}(\vec{Y}) = 0 \right\}$. Тогда сопряженный оператор Λ^* также является сужением оператора Λ_{\max} на области определения

$$D(\Lambda^*) = \left\{ \vec{V} \in D(\Lambda_{\max}) : T_1(\vec{Y}), \dots, U_{p+1}(\vec{Y}) = 0 \right\} \quad \text{и для любых } \vec{Y} \in D(\Lambda) \quad \text{и} \quad \vec{V} \in D(\Lambda)$$

справедливо равенство:

$$\sum_{j=1}^m \int_{e_j} \Lambda y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j = \sum_{j=1}^m \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda^* v_j(x_j)} dx_j$$

3.4 Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде при m

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Задачи для дифференциальных операторов на графах в настоящее время активно изучаются математиками и имеют приложения в квантовой механике, органической химии, нанотехнологиях, теории волноводов и других областях естествознания. Граф представляет собой структуру, состоящую из «абстрактных» отрезков и вершин, примыкание которых друг к другу описывается некоторым отношением. Для определения оператора на заданном графе необходимо выделить множество граничных вершин. Вершины не являющиеся граничными называются внутренними вершинами. Дифференциальный оператор на заданном графе определяется не только заданными дифференциальными выражениями на дугах, но и условиями типа Кирхгофа во внутренних вершинах графа.

В данной статье решена задача Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Также в этой работе представлено функция Грина дифференциального оператора на графе-звезде. Вопросы из спектральной теории, как построение функции Грина и разложение по собственным функциям для моделей из соединенных стержней мало изучены. Спектральный анализ дифференциальных операторов на графах является основным математическим аппаратом при решении современных проблем квантовой механики.

В работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией.

Основное внимание в этой статье уделяется спектру дифференциальных операторов второго порядка на графах. Различные функциональные пространства на графах, определены, и мы определяем, с точки зрения как дифференциальных систем, так и вышеупомянутых функциональных пространств, краевые задачи на графах. Показано, что краевая задача на графе спектрально эквивалентна системе с разделенным граничным условием. Основная цель этой статьи – решить задачу Дирихле и построить его функцию Грина для звездообразного графа.

Граф-звезда – это связанный граф, в котором не более одной вершины имеет степень больше единицы. Вершина, имеющая степень больше единицы,

называются внутренней вершиной граф-звезды. Вершины, не являющиеся внутренними, называются граничными вершинами.

Пусть задан ориентированный графа-звезда $G = \{v, \varepsilon\}$ где v, ε – два множества. Элементы множества v – называются вершинами графа, через ε обозначено множество его дуг. Количество дуг обозначим через m . Пусть $\Gamma = \{0\}$ – внутренняя вершина, $\Gamma = \{1, \dots, m\}$ граничные вершины. При $j = \overline{1, m}$ исходящую из вершины j дугу обозначим e_j .

В дальнейшем считаем, что длина каждой дуге $|e_j| = a_j$. На каждой дуге e_j введем переменную $x_j \in [0, a_j]$. Для удобства обозначим значением $x_j = a_j$ соответствует граничную вершину дуги e_j , а значением $x_j = 0$ внутреннюю вершину.

В предлагаемой работе исследуются свойства функций Грина краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка на графе-звезде. Рисунок 3 графе-звезде.

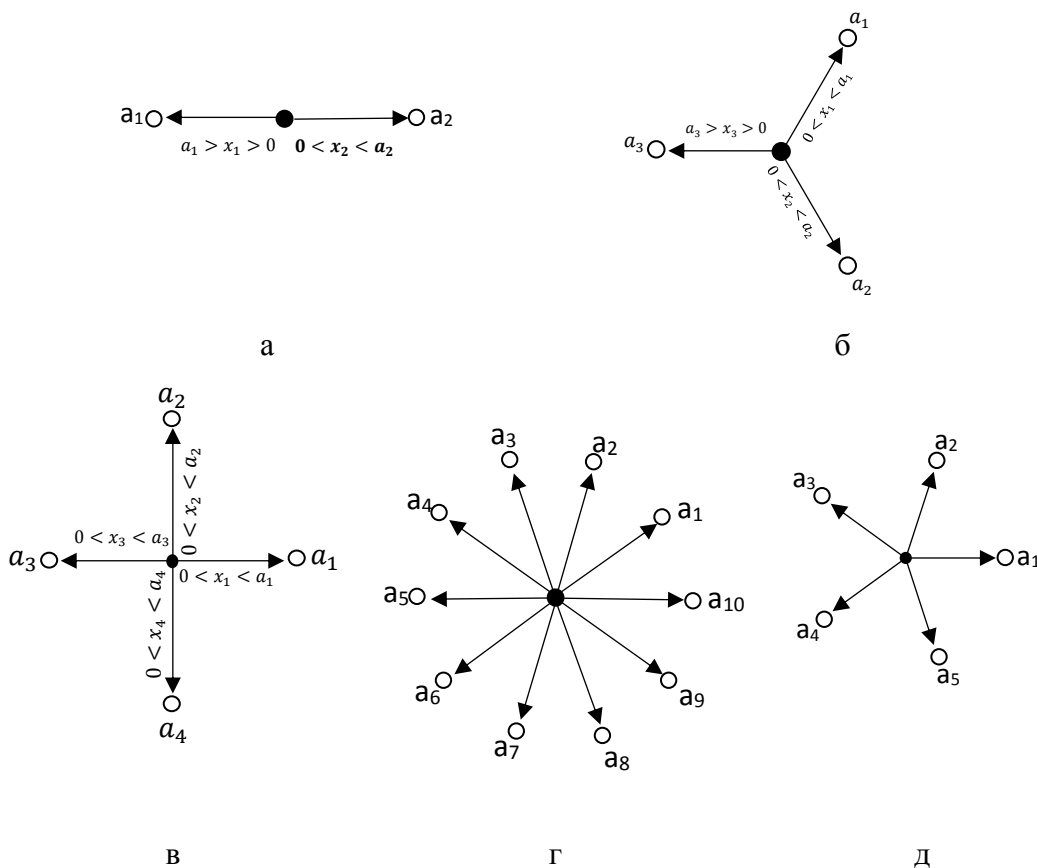


Рисунок 3 – Примеры граф-звезда при $m = 2, 3, 4, 5, 10$

3.5 Определение дифференциального оператора на графе-звезде

В дальнейшем полезно ввести пространство

$$L_2(G) = \prod_{e \in \varepsilon} L_2(e)$$

с элементами

$$\vec{Y}(\vec{x}) = [y_e(x_e), e \in \varepsilon]^T$$

где $\vec{x} = (x_e, e \in \varepsilon)$ и $\prod_{e \in \varepsilon}$ – декартово произведение подпространств и с конечной нормой:

$$\|\vec{Y}\|_{L_2(G)} = \sqrt{\sum_{e \in \varepsilon} \int_e |y_e(x_e)|^2 dx_e}.$$

точно также стандартным образом вводится пространство:

$$W_2^2(G) = \prod_{e \in \varepsilon} W_2^2(e)$$

введем множество функций $D(\wedge) \subset W_2^2(G)$ элементы которых в каждой внутренней вершине удовлетворяют условиям Кирхгофа [34, р. 248]:

$$\begin{cases} y_1(0) = y_j(0), & j = 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^m y'_j(0) = 0. \end{cases} \quad (3.5.1)$$

В электрических сетях они выражают закон Кирхгофа, при колебаниях упругих сетей – баланс напряжений. $L_2(G)$ рассмотрим дифференциальный оператор \wedge , задаваемый линейными дифференциальными выражениями:

$$\begin{aligned} -y_j''(x_j) &= \lambda y_j(x_j) + f_j(x_j), & e_j \in \varepsilon, & 0 < x_j < a_j \\ & & j &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

с областью определения $D(\wedge)$. λ – спектральный параметр, $\{f_j(x_j), 0 < x_j < a_j\}$ плотность распределения внешней силы.

В данной работе конструктивно строится функция Грина задачи (3.5.1), (3.5.2) с условиями Дирихле в граничных вершинах:

$$y_j(a_j) = \dots = y_m(a_m) = 0 \quad (3.5.3)$$

3.6 Построение функции Грина задачи Дирихле

В настоящем пункте изучается вопрос о существовании функции Грина для задачи Дирихле:

$$-y''(x) = \lambda y(x) + F(x), \quad 0 < x < a \quad (3.6.1)$$

$$y(a) = 0 \quad y(0) = 0 \quad (3.6.2)$$

Под функцией Грина мы понимаем матричную функцию двух переменных $G(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$ при каждой $\vec{F}(\cdot)$ непрерывной на графе G и заданную формулой:

$$y(\vec{x}, \lambda) = \int_G G(\vec{x}, \vec{t}, \lambda) \vec{F}(t) dt.$$

Лемма 3.3. Решение задачи (3.6.1), (3.6.2) может быть представлено в виде:

$$y(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s_a(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \int_x^a \frac{s_a(t, \lambda) s_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt, \quad (3.6.3)$$

где $D(t, \lambda) = -s'_a(t, \lambda) s_0(t, \lambda) + s_a(t, \lambda) s'_0(t, \lambda)$ и функций $s_0(x, \lambda)$ и $s_a(x, \lambda)$ являются линейно независимыми решениями однородной задачи Коши:

$$\begin{aligned} -s''_0(x) &= \lambda s_0(x), \quad 0 < x < a, \quad s_0(0, \lambda), s'_0(0, \lambda) = 1, \\ -s''_a(x) &= \lambda s_a(x), \quad 0 < x < a, \quad s_a(0, \lambda), s'_a(0, \lambda) = 1. \end{aligned}$$

Доказательство лемма 3.3. Покажем, что правая часть выражения (3.6.3) является решением задачи (3.6.1), (3.6.2). Сначала вычислим первую производную:

$$y'(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s'_a(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \int_x^a \frac{s_a(t, \lambda) s'_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt,$$

теперь вычислим вторую производную:

$$y''(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s''_a(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \int_x^a \frac{s_a(t, \lambda) s''_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt - \vec{F}(x).$$

так как $s''_0(x, \lambda) = -\lambda s_0(x, \lambda)$, $s''_a(x, \lambda) = -\lambda s_a(x, \lambda)$ тогда с учетом (3.6.3), получим:

$$y''(x, \lambda) = -\lambda \left(\int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s_a(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \int_x^a \frac{s_a(t, \lambda) s_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt \right) - \vec{F}(x) = -\lambda y(x, \lambda) - \vec{F}(x)$$

отсюда следует соотношение (3.6.1). Теперь проверим выполнение граничных условий (3.6.2). Значение $x = 0$ подставляя в (3.6.3), получим:

$$y(0, \lambda) = \int_x^a \frac{s_a(t, \lambda) s_0(0, \lambda)}{D(t, \lambda)} \bar{F}(t) dt = 0,$$

так как $s_0(0, \lambda) = 0$. Значение $x = a$ подставляя в (3.6.3), получим:

$$y(a, \lambda) = \int_x^a \frac{s_0(t, \lambda) s_a(a, \lambda)}{D(t, \lambda)} \bar{F}(t) dt = 0,$$

так как $s_a(a, \lambda) = 0$. Лемма 3.3 доказана. Из Леммы 1 следует следующая теорема.

Функция Грина задачи Дирихле (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) мы решаем задачи дифференциального оператора на графе - звезде при m :

$$\begin{cases} -y_1''(x_1) = \lambda y_1(x_1) + f_1(x_1); & x_1 \in e_1 \\ -y_2''(x_2) = \lambda y_2(x_2) + f_2(x_2); & x_2 \in e_2 \\ \dots & \dots \\ -y_m''(x_m) = \lambda y_m(x_m) + f_m(x_m); & x_m \in e_m \end{cases}$$

В этом уравнение $y_1(x_1), y_2(x_2), \dots, y_m(x_m)$ неизвестно, известно функций $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_m(x_m), \lambda$. Тогда условия Дирихле: $y_1(a_1) = y_2(a_2) = \dots = y_m(a_m) = 0$

и условия Кирхгофа: $y_1(0) = y_2(0) = \dots = y_m(0); \sum_{k=1}^m y_1'(0) = 0$

Теорема 3.2. Если $f_1(x_1) \neq 0, \dots, f_m(x_m) \neq 0$ то решение функций грина задача (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) Дирихле может быть записано в виде:

$$y_j(x_j) = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} f_k(t_k) dt_k + \\ & + \int_0^{x_j} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_j - x_j)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_j} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t_j \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} t_j \right) f_j(t_j) dt_j + \\ & + \int_{x_j}^{a_j} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_j - t_j)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_j} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_j \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_j \right) f_j(t_j) dt_j \end{aligned} \right\}$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

Это теорема общее решение линейного дифференциального уравнения и задачи при m имеет вид

Доказательство теорема 3.2. Нам надо показать теорему 1, сначала вычислим первую производную:

$$y'_j(x_j) = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{-\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} (a_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} f_k(t_k) dt_k - \\ & - \int_0^{x_j} f_j(t_j) \frac{\cos \sqrt{\lambda} (a_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k \sin \sqrt{\lambda} t_j + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} t_j \right) dt_j + \\ & + \int_{x_j}^{a_j} f_j(t_j) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_j - t_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_j \right) dt_j \end{aligned} \right\}$$

теперь вычислим вторую производную:

$$y''_j(x_j) = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{-\lambda \sin \sqrt{\lambda} (a_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} f_k(t_k) dt_k - \\ & - \lambda \int_0^{x_j} f_j(t_j) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_j - x_j)}{\sqrt{\lambda}} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \sin \sqrt{\lambda} t_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \cos \sqrt{\lambda} t_j \right) dt_j - \\ & - \lambda \int_{x_j}^{a_j} f_j(t_j) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_j - t_j)}{\sqrt{\lambda}} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \sin \sqrt{\lambda} x_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \cos \sqrt{\lambda} x_j \right) dt_j \\ & - F_j(x_j) \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k \frac{\sin \sqrt{\lambda} a_j}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} + \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a_j}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} \right] \end{aligned} \right\}$$

мы можем общее решение задачи (3.5.1),(3.5.2),(3.5.3) записать в следующем виде:

$$y_j(x_j) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} f_k(t_k) dt_k + \\ & + \int_0^{x_j} f_j(t_j) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_j - x_j)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_j} (\Psi_j(t_j, \lambda)) dt_j + \int_{x_j}^{a_j} f_j(t_j) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_j - t_j)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_j} (\Psi_j(x_j, \lambda)) dt_j \end{aligned} \right\}$$

где $j = 1, 2, \dots, m$

здесь $\Delta(\lambda)$ обозначается через $\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k$,

$$\Psi_j(t_j, \lambda) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \cos \sqrt{\lambda} t_j,$$

$$\Psi_j(x_j, \lambda) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \cos \sqrt{\lambda} x_j$$

Вводим решение задачи (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) для функций $y_1(x_1), y_2(x_2), \dots, y_m(x_m)$ в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x_1) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} f_k(t_k) dt_k + \right. \\ \left. + \int_0^{x_1} f_1(t_1) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} (\Psi_1(t_1, \lambda)) dt_1 + \int_{x_1}^{a_1} f_1(t_1) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} (\Psi_1(x_1, \lambda)) dt_1 \right\} \\ y_2(x_2) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - x_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} f_k(t_k) dt_k + \right. \\ \left. + \int_0^{x_2} f_2(t_2) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} (\Psi_2(t_2, \lambda)) dt_2 + \int_{x_2}^{a_2} f_2(t_2) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} (\Psi_2(x_2, \lambda)) dt_2 \right\} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m(x_m) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - x_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} f_k(t_k) dt_k + \right. \\ \left. + \int_0^{x_m} f_m(t_m) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} (\Psi_m(t_m, \lambda)) dt_1 + \int_{x_m}^{a_m} f_m(t_m) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} (\Psi_m(x_m, \lambda)) dt_m \right\} \end{array} \right. \quad (3.6.4)$$

Покажем, что функций заданные системой (3.6.4) удовлетворяют уравнениям (3.5.2), граничным условиям (3.5.3) и условиям:

$$y_1(0) = y_j(0), \quad j = 2, \dots, m. \quad (3.6.5)$$

затем проверяем выполнения граничных условий (3.5.1). Тогда получим:

$$\left\{ \begin{array}{l}
y_1(0) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot f_k(t_k) dt_k + \int_0^{a_1} f_1(t_1) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} (\Psi_1(0, \lambda)) dt_1 \right\} \\
y_2(0) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot f_k(t_k) dt_k + \int_0^{a_2} f_2(t_2) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} (\Psi_2(0, \lambda)) dt_2 \right\} \\
\dots \quad \dots \quad \dots \\
y_m(0) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot f_k(t_k) dt_k + \int_0^{a_m} f_m(t_m) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} (\Psi_m(0, \lambda)) dt_m \right\}
\end{array} \right. \quad (3.6.6)$$

отсюда мы проверим второй часть уравнения (3.5.1).

$$y_1'(0) + y_2'(0) + \dots + y_m'(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a_1}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} f_2(t_2) dt_2 - \int_0^{a_3} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_3 - t_3)}{\sin \sqrt{\lambda} a_3} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a_1}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} f_3(t_3) dt_3 - \\
& - \dots - \int_0^{a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a_1}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} f_m(t_m) dt_m + \\
& + \int_0^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \left(\sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_2 + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_3 + \dots + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_m \right) f_1(t_1) dt_1 - \\
& - \int_0^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a_2}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} f_1(t_1) dt_1 - \int_0^{a_3} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_3 - t_3)}{\sin \sqrt{\lambda} a_3} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a_2}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} f_3(t_3) dt_3 - \\
& - \dots - \int_0^{a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a_2}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} f_m(t_m) dt_m + \\
& + \int_0^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \left(\sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_1 + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_3 + \dots + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_m \right) f_2(t_2) dt_2 - \\
& - \dots \quad \dots \quad \dots \quad - \\
& - \int_0^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a_{m-1}}{\sin \sqrt{\lambda} a_{m-1}} f_m(t_m) dt_m - \int_0^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a_{m-1}}{\sin \sqrt{\lambda} a_{m-1}} f_2(t_2) dt_2 - \\
& - \dots - \int_0^{a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} a_{m-1}}{\sin \sqrt{\lambda} a_{m-1}} f_m(t_m) dt_m + \\
& + \int_0^{a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \left(\sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_1 + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_2 + \dots + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_m \right) f_m(t_m) dt_m = 0
\end{aligned}$$

теперь проверим выполнения условия (3.5.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(a_1) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - a_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} f_k(t_k) dt_k + \right. \\ \left. + \int_0^{a_1} f_1(t_1) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - a_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} (\Psi_1(t_1, \lambda)) dt_1 + \int_{a_1}^{a_1} f_1(t_1) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} (\Psi_1(a_1, \lambda)) dt_1 = 0 \right\} \\ y_2(a_2) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - a_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} f_k(t_k) dt_k + \right. \\ \left. + \int_0^{a_2} f_2(t_2) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - a_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} (\Psi_2(t_2, \lambda)) dt_2 + \int_{a_2}^{a_2} f_2(t_2) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} (\Psi_2(a_2, \lambda)) dt_2 = 0 \right\} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m(a_m) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - a_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} f_k(t_k) dt_k + \right. \\ \left. + \int_0^{a_m} f_m(t_m) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - a_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} (\Psi_m(t_m, \lambda)) dt_m + \int_{a_m}^{a_m} f_m(t_m) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} (\Psi_m(a_m, \lambda)) dt_m = 0 \right\} \end{array} \right.$$

Теорема 3.3. Для функций Грина задачи (3.5.1),(3.5.2),(3.5.3) справедлива представление:

$$G(\vec{x}, t, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \\ \vdots \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \end{bmatrix} \times \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right] -$$

$$-diag \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - x_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right]$$

$$+diag \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \Psi_1(t_1, \lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} \Psi_2(t_2, \lambda) \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} \Psi_m(t_m, \lambda) \right] +$$

$$+diag \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \Psi_1(x_1, \lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} \Psi_2(x_2, \lambda) \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} \Psi_m(x_m, \lambda) \right].$$

Доказательство теорема 3.3. Матрично-векторную запись Решение $\vec{y}_m(\vec{x})$ для $f_1(x_1) \neq 0, \dots, f_m(x_m) \neq 0$:

$$\bar{y}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} y_1(x_1) \\ y_2(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m(x_m) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} f_k(t_k) dt_k + \\ & + \int_0^{x_1} f_1(t_1) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} (\Psi_1(t_1, \lambda)) dt_1 + \int_{x_1}^{a_1} f_1(t_1) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} (\Psi_1(x_1, \lambda)) dt_1 \\ & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - x_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} f_k(t_k) dt_k + \\ & + \int_0^{x_2} f_2(t_2) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} (\Psi_2(t_2, \lambda)) dt_2 + \int_{x_2}^{a_2} f_2(t_2) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} (\Psi_2(x_2, \lambda)) dt_2 \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \\ & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - x_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} f_k(t_k) dt_k + \\ & + \int_0^{x_m} f_m(t_m) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} (\Psi_m(t_m, \lambda)) dt_1 + \int_{x_m}^{a_m} f_m(t_m) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} (\Psi_m(x_m, \lambda)) dt_m \end{aligned} \right\}$$

Тогда для произвольных $f_1(x_1) \neq 0, \dots, f_m(x_m) \neq 0$ решение задачи (3.5.1), (3.3.2), (3.5.3) может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} [\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3] &= [\bar{A}_1] + [\bar{A}_2] + [\bar{A}_3] = \\ &= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \end{bmatrix} - \\ & - \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - x_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right] \end{aligned} \right\} \times \begin{bmatrix} f_1(t_1) dt_1 \\ f_2(t_2) dt_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m(t_m) dt_m \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \Psi_1(t_1, \lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} \Psi_2(t_2, \lambda) \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} \Psi_m(t_m, \lambda) \right] \times \begin{bmatrix} f_1(t_1) dt_1 \\ f_2(t_2) dt_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m(t_m) dt_m \end{bmatrix} + \\
& + \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \Psi_1(x_1, \lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} \Psi_2(x_2, \lambda) \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} \Psi_m(x_m, \lambda) \right] \times \begin{bmatrix} f_1(t_1) dt_1 \\ f_2(t_2) dt_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m(t_m) dt_m \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

теорема доказана.

Следствие 3.2. Функция Грина задачи Дирихле (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) имеет представление если $0 \leq t_1 \leq x_1, \dots, 0 \leq t_m \leq x_m$:

$$\begin{aligned}
G(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m; \lambda) = & \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \Psi_1(t_1, \lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} \Psi_2(t_2, \lambda) \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} \Psi_m(t_m, \lambda) \right] + \\
& + \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right] - \\ & - \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - x_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right] \end{aligned} \right\} \times \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Следствие 3.3. Функция Грина задачи Дирихле (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) имеет представление если $x_1 < t_1 < a_1, \dots, x_m < t_m < a_m$:

$$G(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m; \lambda) = \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \Psi_1(x_1, \lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} \Psi_2(x_2, \lambda) \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} \Psi_m(x_m, \lambda) \right] +$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right] - \\ - \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - x_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right] \end{array} \right\} \times \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \\ \vdots \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \end{bmatrix}.$$

где $0 \leq t_1 \leq x_1, \dots, 0 \leq t_m \leq x_m$, $G(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m; \lambda) = A_1 + A_2$

$$x_1 < t_1 < a_1, \dots, x_m < t_m < a_m \quad , \quad G(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m; \lambda) = A_1 + A_3 .$$

3.7 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле

В настоящем пункте изучается вопрос о разложении в ряд Фурье функции Грина задачи (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) по собственным функциям соответствующей спектральной задачи. Этот результат диссертации вносится на защиту и соответствует работе автора [45].

Теорема 3.4. Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в ряд Фурье по собственным функциям этого оператора. Докажем следующий промежуточный результат [19, с. 133; 36, с. 134].

Лемма 3.4 Оператор, соответствующий краевой задаче (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) является самосопряженным, т.е. функция Грина $G_{\mathfrak{Z}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$ есть симметризуемое ядро в пространстве $L_2(\mathfrak{Z})$:

$$G_{\mathfrak{Z}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) = G_{\mathfrak{Z}}^T(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) \quad (3.7.1)$$

Доказательство лемма 3.4. Преобразуем функцию Грина задачи (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) в представлении из следствия 1 следующим образом:

$$G_3(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) = \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \Psi_1(t_1, \lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} \Psi_2(t_2, \lambda) \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} \Psi_m(t_m, \lambda) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \\ \vdots \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \end{array} \right] \cdot \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right] - \\ - \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - x_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right] \end{array} \right\}$$

отсюда имеем:

$$G_3^T(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) = \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \Psi_1(t_1, \lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_2} \Psi_2(t_2, \lambda) \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_m} \Psi_m(t_m, \lambda) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \\ \vdots \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \end{array} \right] \cdot \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right] - \\ - \text{diag} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - x_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right] \end{array} \right\}$$

рассмотрим элементы матрицы G_3^T с номером (k, j) :

$$G(\bar{x}, t, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[\begin{array}{l} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \\ \vdots \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \end{array} \right] \cdot \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_{j-1} - t_{j-1})}{\sin \sqrt{\lambda} a_{j-1}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_{j+1} - t_{j+1})}{\sin \sqrt{\lambda} a_{j+1}} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda} a_m} \right] \quad (3.7.2)$$

и сравним его с элементом матрицы $G_{\mathfrak{S}}$ с номером (k, j) :

$$G(\bar{x}, t, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \cdots \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_{k-1} - t_{k-1})}{\sin \sqrt{\lambda}a_{k-1}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - x_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_{k+1} - t_{k+1})}{\sin \sqrt{\lambda}a_{k+1}} \cdots \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \right] \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_j - t_j)}{\sin \sqrt{\lambda}a_j} \end{bmatrix} \quad (3.7.3)$$

Если в выражении (3.7.2) переменную t_k заменить на x_k переменную x_j заменить на t_j то выражение (3.7.2) совпадает со значением (3.7.3). Таким образом доказано, что:

$$G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) = G_{\mathfrak{S}}^T(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) .$$

лемма доказана [26, с. 133].

Пример 3.1. Решаем задача на графе-звезде при $m=2$. Пусть задан граф a_1, a_2 граничными вершинами и 0 внутренней вершине:

$$\begin{cases} -y_1''(x_1) = \lambda y_1(x_1) + f_1(x_1) & ; & x_1 \in e_1 \\ -y_2''(x_2) = \lambda y_2(x_2) + f_2(x_2) & ; & x_2 \in e_2 \end{cases}$$

в дальнейшем полезно ввести пространство:

$$\begin{cases} y_1(x_1) \in W_2^2(0, a_1) \\ y_2(x_2) \in W_2^2(0, a_2) \end{cases}$$

на это уравнение $y_1(x_1), y_2(x_2)$ неизвестно зато известно $f_1(x_1), f_2(x_2), \lambda$. условия Дирихле:

$$y_1(a_1) = 0 \quad ; \quad y_2(a_2) = 0$$

условия Кирхгофа:

$$y_1(0) = y_2(0) \quad , \quad -y_1'(0) = y_2'(0)$$

решение имеющим в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x_1) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}(x_1 - a_1) + c_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x_1 - a_1)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{x_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t_1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} f_1(t_1) dt_1 + \\ + \int_{x_1}^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_1}{\sqrt{\lambda}} f_1(t_1) dt_1 \\ y_2(x_2) = D_1 \cos \sqrt{\lambda}(x_2 - a_2) + D_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x_2 - a_2)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{x_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t_2}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - x_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} f_2(t_2) dt_2 + \\ + \int_{x_2}^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_2}{\sqrt{\lambda}} f_2(t_2) dt_2 \end{array} \right.$$

Покажем, что правая часть выражения является решением задачи задача при $m=2$ Сначала вычислим первую производную:

$$\begin{aligned} y'_{12}(x_1) &= -\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1) \cdot \int_0^{x_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t_1}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot f_1(t_1) dt_1 + \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_1 \cdot \sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} f_1(x_1) + \\ &+ \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_1 \cdot \int_{x_1}^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot f_1(t_1) dt_1 - \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_1}{\sqrt{\lambda}} f_1(x_1) \end{aligned}$$

теперь вычислим вторую производную:

$$\begin{aligned} y''_{12}(x_1) &= -\lambda \sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1) \cdot \int_0^{x_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t_1}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot f_1(t_1) dt_1 + \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_1}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} f_1(x_1) (-\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)) - \\ &- \lambda \sin \sqrt{\lambda} x_1 \cdot \int_{x_1}^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot f_1(t_1) dt_1 - \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot f_1(x_1) \cdot \cos x_1 \\ -y''_{12}(x_1) &= \lambda \int_0^{x_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t_1 \cdot \sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot f_1(t_1) dt_1 + \lambda \int_{x_1}^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1) \sin \sqrt{\lambda} x_1}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot f_1(t_1) dt_1 + f_1(x_1) \\ -y''_{12}(x_1) &= \lambda y_1(x_1) + f_1(x_1). \end{aligned}$$

сначала проверим условий Дирихле из уравнения так как

$$y_1(a_1) = c_1 = 0; \quad y_2(a_2) = D_1 = 0$$

из этого уравнения

$$y_1(0) = -c_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda} a_1}{\sqrt{\lambda}}; \quad y_2(0) = -D_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda} a_2}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x_1) = B_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} a_2}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x_1 - a_1)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{x_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t_1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} f_1(t_1) dt_1 + \\ + \int_{x_1}^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_1}{\sqrt{\lambda}} f_1(t_1) dt_1 \\ y_2(x_2) = B_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} a_1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x_2 - a_2)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{x_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t_2}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - x_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} f_2(t_2) dt_2 + \\ + \int_{x_2}^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} x_2}{\sqrt{\lambda}} f_2(t_2) dt_2 \end{array} \right.$$

проверим выполнения граничных условий значения $x_1 = a_1 = 0$; $x_2 = a_2 = 0$ подставляя и получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(a_1) = B_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} a_2}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - a_1)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t_1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - a_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} f_1(t_1) dt_1 + \\ + \int_{x_1}^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} a_1}{\sqrt{\lambda}} f_1(t_1) dt_1 = 0 \\ y_2(a_2) = B_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} a_1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - a_2)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t_2}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - a_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} f_2(t_2) dt_2 + \\ + \int_{a_2}^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda} a_2}{\sqrt{\lambda}} f_2(t_2) dt_2 = 0 \end{array} \right.$$

теперь вычислим первую производную выражения:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1'(0) = B_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} a_2}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda} a_1 + \int_0^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1} \cdot f_1(t_1) dt_1 \\ y_2'(0) = B_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} a_1}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda} a_2 + \int_0^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2} \cdot f_2(t_2) dt_2 \end{array} \right.$$

теперь надо найти B_1 из уравнения:

$$B_1 = - \int_0^{a_1} \frac{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda} a_1 \cdot \sin \sqrt{\lambda} (a_1 + a_2)} f_1(t_1) dt_1 - \int_0^{a_2} \frac{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda} a_2 \cdot \sin \sqrt{\lambda} (a_1 + a_2)} f_2(t_2) dt_2$$

общие решение задачи Пример 1 имеет вид.

Пример 3.2. Вычетное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле при $m=2$

В настоящем пункте изучается вопрос о разложении в ряд Фурье функции Грина задачи при $m=2$ по собственным функциям соответствующей спектральной задачи.

Теорема 3.5. Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в ряд Фурье по собственным функциям этого оператора. Докажем следующий промежуточный результат вычетная разложение функции Грина вычислим [19, с. 133]:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\lambda_0} y_1(x_1, \lambda) &= \operatorname{res}_{\lambda_0} \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(a_1 + a_2)} \int_0^{a_2} \sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2) \sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1) f_2(t_2) dt_2 + \\ &+ \operatorname{res}_{\lambda_0} \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(a_1 + a_2)} \int_0^{x_1} \sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1) \sin \sqrt{\lambda}(t_1 + a_2) f_1(t_1) dt_1 + \\ &+ \operatorname{res}_{\lambda_0} \frac{1}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(a_1 + a_2)} \int_{x_1}^{a_1} \sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1) \sin \sqrt{\lambda}(x_1 + a_2) f_1(t_1) dt_1 \end{aligned}$$

Теорема 3.6. Из нашей работе [43, с. 14-26] должен знать $\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(a_1 + a_2) = 0$ тогда мы можем написать $\lambda_0 = 0$ и $\sin \sqrt{\lambda}(a_1 + a_2) = \sin k\pi$, тогда корень $\lambda_0 = \left(\frac{k\pi}{a_1 + a_2}\right)^2$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{k\pi}{a_1 + a_2}\right)^2 \operatorname{res}_{\lambda_0} y_1(x_1, \lambda) &= \int_0^{a_2} \frac{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_2 - t_2) \right\} \sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 - x_1) \right\}}{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 + a_2) \right\} + \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 + a_2) \cos \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 + a_2) \right\}} f_2(t_2) dt_2 + \\ &+ \int_0^{x_1} \frac{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 - x_1) \right\} \sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(t_1 + a_2) \right\}}{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 + a_2) \right\} + \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 + a_2) \cos \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 + a_2) \right\}} f_1(t_1) dt_1 + \\ &+ \int_{x_1}^{a_1} \frac{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 - t_1) \right\} \sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(x_1 + a_2) \right\}}{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 + a_2) \right\} + \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 + a_2) \cos \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 + a_2) \right\}} f_1(t_1) dt_1 \end{aligned}$$

теперь можем так как напишем:

$$\left(\frac{k\pi}{a_1 + a_2}\right)^2 \operatorname{res}_{\lambda_0} y_1(x_1, \lambda) = \int_0^{a_2} \frac{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_2 - t_2) \right\} \sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2}(a_1 - x_1) \right\}}{k\pi \cos k\pi} f_2(t_2) dt_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{x_1} \frac{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2} (a_1 - x_1) \right\} \sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2} (t_1 + a_2) \right\}}{k\pi \cos k\pi} f_1(t_1) dt_1 + \\
& + \int_{x_1}^{a_1} \frac{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2} (a_1 - t_1) \right\} \sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2} (x_1 + a_2) \right\}}{k\pi \cos k\pi} f_1(t_1) dt_1.
\end{aligned}$$

отсюда вычетная разложение функции Грина вычислим $y_2(x_2, \lambda)$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k\pi}{a_1 + a_2} \right)^2 y_2(x_2, \lambda) &= \int_0^{a_1} \frac{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2} (a_1 - t_1) \right\} \sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2} (a_2 - x_2) \right\}}{k\pi \cos k\pi} f_1(t_1) dt_1 + \\
& + \int_0^{x_2} \frac{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2} (a_2 - x_2) \right\} \sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2} (t_2 + a_1) \right\}}{k\pi \cos k\pi} f_2(t_2) dt_2 + \\
& + \int_{x_2}^{a_2} \frac{\sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2} (a_2 - t_2) \right\} \sin \left\{ \frac{k\pi}{a_1 + a_2} (x_2 + a_1) \right\}}{k\pi \cos k\pi} f_2(t_2) dt_2.
\end{aligned}$$

3.8 Формула Даламбера в случае негладких многоточечных задач для волнового уравнения

В данном пункте доказан основной результат диссертации, который вносится на защиту. Этот результат опубликован в работах автора [47, 51].

Известно [26, с. 133], что решение задачи Коши для волнового уравнения задается формулой Даламбера. Физический смысл формулы Даламбера соответствует распространению волн. Важно, что решения волнового уравнения могут иметь разрывы, которые распространяются вдоль характеристик. Разрывные решения волнового уравнения для струны и стержня лишены физического смысла. Однако такому же уравнению удовлетворяет давление газа в длинной узкой трубе. Давление может быть разрывным. Разрывные решения волнового уравнения в газовой динамике называются ударными волнами.

Метод Даламбера или метод падающей и отраженной волн позволяет решать не только задачу Коши для волнового уравнения, но и находить решения смешанных задач. В случае полуограниченной струны наблюдается эффект отражения волн, зависящего от вида граничного условия. В случае ограниченных струн также происходит отражение волн, но этот эффект происходит по более сложному сценарию. Детали указанных эффектов можно найти в книге А.И. Комеча [27, с. 133].

В работах [28, р. 82; 29, с. 33] формула Даламбера модифицирована для смешанной многоточечной задачи для волнового уравнения. При этом решение смешанной многоточечной задачи предполагается достаточно гладкой. В работе Kanguzhin В.Е. выведен аналог формулы Даламбера для смешанной многоточечной задачи для волнового уравнения с начальными данными допускающих разрывы первых производных. В данной работе сформулирована и доказана формула Даламбера для струн, представляющих граф-звезду.

Основные понятия и обозначения. Пусть m - фиксированное натуральное число. Рассмотрим смешанную задачу для системы волновых уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{m+1}(x_{m+1}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{m+1}(x_{m+1}, t)}{\partial x_{m+1}^2} &= 0, \quad 0 < x_{m+1} < b_{m+1}, \quad t > 0, \\ \frac{\partial^2 u_m(x_m, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_m(x_m, t)}{\partial x_m^2} &= 0, \quad 0 < x_m < b_m, \quad t > 0, \\ \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} &= 0, \quad 0 < x_1 < b_1, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

с условиями вида (a):

$$\begin{aligned} u_{m+1}(1, t) = u_1(0, t) = \dots = u_m(0, t), \quad t > 0 \\ \frac{\partial u_{m+1}(1, t)}{\partial x_{m+1}} = \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_m(0, t)}{\partial x_m}, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

и условиями вида (b):

$$u_{m+1}(0, t) = 0, \quad u_1(1, t) = 0, \dots, u_m(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.8.3)$$

а также начальными условиями:

$$\begin{aligned} u_{m+1}(x_{m+1}, 0) &= \varphi_{m+1}(x_{m+1}), \quad 0 < x_{m+1} < b_{m+1}, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_{m+1}(x_{m+1}, 0) &= \psi_{m+1}(x_{m+1}), \quad 0 < x_{m+1} < b_{m+1} \\ u_m(x_m, 0) &= \varphi_m(x_m), \quad 0 < x_m < b_m, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_m(x_m, 0) &= \psi_m(x_m), \quad 0 < x_m < b_m, \\ &\dots\dots\dots \\ u_1(x_1, 0) &= \varphi_1(x_1), \quad 0 < x_1 < b_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} u_1(x_1, 0) &= \psi_1(x_1), \quad 0 < x_1 < b_1 \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

Согласно результатам работ [31, с. 37; 32, с. 108; 33, р. 16] задача (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3), (3.8.4) может быть интерпретирована, как смешанная задача для

волнового уравнения на графе-звезде $\Gamma = \{V, E\}$. Здесь V представляет множество вершин, занумерованных от 0 до $(m+1)$, а множество E означает множество дуг e_1, \dots, e_{m+1} [32, с. 108; 33, р. 16]. На каждой дуге e_j выполняется одно из волновых уравнений (3.8.1). Вершина $(m+1) \in V$ называется внутренней вершиной графа-звезды. Условия вида (а) означают, что во внутренней вершине выполняются законы Кирхгофа [34, р. 248]. Вершины $0, 1, \dots, m$ называются граничными вершинами графа-звезды (рисунгнок 1). Условия вида б представляют набор граничных условий. При $m=1$ задача (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3), (3.8.4) совпадает со смешанной задачей для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < b_1 + b_2, \quad t > 0 \quad (3.8.5)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(b_1 + b_2, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.8.6)$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 < x < b_1 + b_2, \quad (3.8.7)$$

в этом случае справедлива формула Даламбера (3.8.8):

$$w(x, t) = \frac{\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\xi) d\xi, \quad 0 < x < b_1 + b_2, \quad t > 0 \quad (3.8.8)$$

Здесь $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ - продолжения функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с отрезка $[0, b_1 + b_2]$ на всю числовую ось, которые получены по следующему алгоритму:

1. Сначала с отрезка $[0, b_1 + b_2]$ нечетным образом продолжаем на отрезок $[-b_1 - b_2, 0]$.
2. Затем с отрезка $[-b_1 - b_2, b_1 + b_2]$ периодически продолжаем на всю числовую ось.

В настоящей работе для смешанной задачи (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3), (3.8.4) на графе-звезде получен аналог формулы (3.8.8).

Для этого нам требуется зависимость решения системы дифференциальных уравнений от спектрального параметра:

$$-y_j''(x_j) = \rho^2 y_j(x_j), \quad 0 < x_j < b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m+1 \quad (3.8.9)$$

с условиями вида (а):

$$\begin{aligned} y_{m+1}(b_{m+1}) &= y_1(0) = \dots = y_m(0), \\ y'_{m+1}(b_{m+1}) &= y'_1(0) + \dots + y'_m(0) \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

и условиями вида (б):

$$y_{m+1}(0)=0, y_m(b_m)=0, y_{m-1}(b_{m-1})=0, \dots, y_1(b_1)=0 \quad (3.8.11)$$

В работах [31, с. 37; 32, с. 123] требуемая зависимость приведена. Чтобы сформулировать результат работы [32, с. 123] нам потребуются следующие обозначения. При фиксированном j из множества $\{1, 2, \dots, m+1\}$ обозначим через $C_j(x_j, \lambda)$ и $S_j(x_j, \lambda)$ решения уравнения (3.30) с условиями:

$$S_j(0, \lambda) = C'_j(0, \lambda) = 0, \quad C_j(0, \lambda) = S'_j(0, \lambda) = 1$$

на самом деле, эти функций имеют явные представления:

$$C_j(x_j, \lambda) = \cos \rho x_j, \quad S_j(x_j, \lambda) = \frac{\sin \rho x_j}{\rho}, \quad \rho^2 = \lambda.$$

в работе [32, с. 123] доказано следующее утверждение.

Утверждение 3.1. Пусть $y_{m+1}(x_{m+1}, \lambda) = S_{m+1}(x_{m+1}, \lambda)$, $x_{m+1} \in e_{m+1}$. Тогда решение системы (3.30), (3.31), (3.32) примет вид:

$$y_j(x_j, \lambda) = S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda)C_j(x_j, \lambda) + B_j S'_{m+1}(b_{m+1}, \lambda)S_j(x_j, \lambda), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.8.12)$$

причем постоянные B_1, B_2, \dots, B_m удовлетворяют соотношению:

$$B_1 + B_2 + \dots + B_m = 1 \quad (3.8.13)$$

Обозначим через $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ собственные значения задачи (3.8.9), (3.8.10), (3.8.11). Тогда при $\lambda = \lambda_n$ из соотношений (3.8.11) вытекают соотношения:

$$S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda) \cdot C_j(b_j, \lambda) + B_j S'_{m+1}(b_{m+1}, \lambda)S_j(b_j, \lambda) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Следовательно:

$$B_j = -\frac{S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n) \cdot C_j(b_j, \lambda_n)}{S'_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n)S_j(b_j, \lambda_n)}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

тогда из соотношения (3.8.13) имеем дисперсионные соотношение:

$$\frac{S'_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n)}{S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n)} + \sum_{j=1}^m \frac{C_j(b_j, \lambda_n)}{S_j(b_j, \lambda_n)} = 0. \quad (3.8.14)$$

обозначим левую часть соотношения (3.8.14) через $\Delta(\lambda_n)$. Заметим, что

$$\Delta(\lambda) = \sqrt{\lambda} \sum_{j=1}^{m+1} \operatorname{ctg}(b_j \sqrt{\lambda})$$

Лемма 3.5. Нули целой функции $\Delta(\lambda)$ вещественные и простые. Простота собственных значений вытекает из неравенства:

$$\Delta'(\lambda_n) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m+1} \frac{1}{\sin^2(b_j \sqrt{\lambda_n})} < 0$$

Пример 3.3. Графический способ вычисления нулей функции $\Delta(\lambda)$ при $m = 2, b_1 = \frac{5}{\pi}, b_2 = \frac{4}{\pi}, b_3 = \frac{3}{\pi}$.

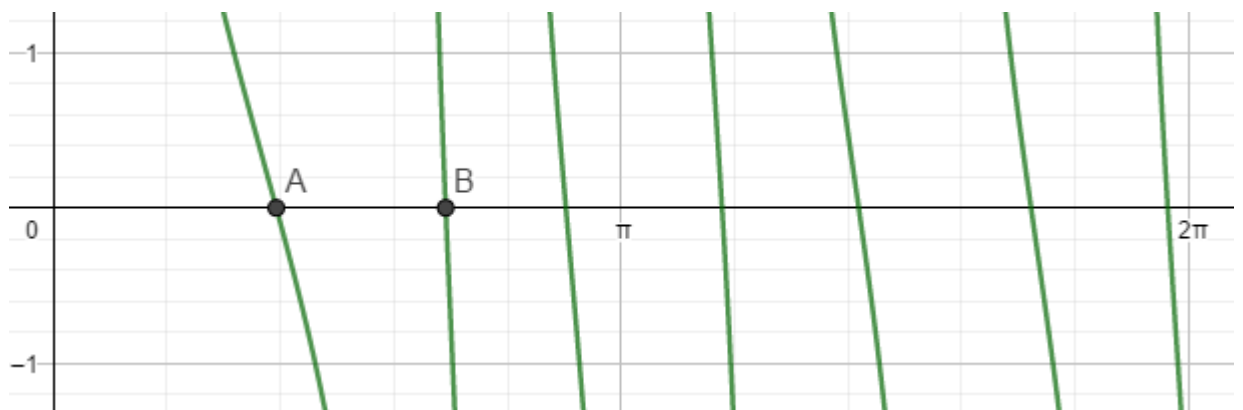


Рисунок 4 – Графический способ нахождения собственных значений

Из рисунка 4 находим первые нули функций $\rho_1 = A = 1.23, \rho_2 = B = 2.17, \rho_3 = C = ?$ соответствующая система собственных функций в таком случае примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
W_1(x_1, \lambda_n) = \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}(b_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda_n}} S_2(b_2, \lambda_n) \dots S_m(b_m, \lambda_n) S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n) \\
W_2(x_1, \lambda_n) = S_1(b_1, \lambda_n) \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}(b_2 - x_2)}{\sqrt{\lambda_n}} S_3(b_3, \lambda_n) \dots S_m(b_m, \lambda_n) S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n) \\
\dots\dots\dots \\
W_m(x_m, \lambda_n) = S_1(b_1, \lambda_n) S_2(b_2, \lambda_n) S_3(b_3, \lambda_n) \dots S_{m-1}(b_{m-1}, \lambda_n) \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}(b_m - x_m)}{\sqrt{\lambda_n}} S_{m+1}(b_{m+1}, \lambda_n) \\
W_{m+1}(x_{m+1}, \lambda_n) = S_1(b_1, \lambda_n) S_2(b_2, \lambda_n) S_3(b_3, \lambda_n) \dots S_m(b_m, \lambda_n) \frac{\sin \sqrt{\lambda_n} x_{m+1}}{\sqrt{\lambda_n}}
\end{array} \right. \quad (3.8.15)$$

Из работы Н.П. Бондаренко следует, что задача (3.8.9), (3.8.10), (3.8.11) является самосопряженной в $L_2(\Gamma)$. Поэтому система (3.8.15) представляет ортогональный базис в пространстве $L_2(\tau)$. Напомним, что в $L_2(\Gamma)$ скалярное произведение вводится по правилу:

$$(y, z) = \sum_{j=1}^{m+1} (y_j, z_j) = \sum_{j=1}^{m+1} \int_0^{b_j} y_j(x_j) \overline{z_j(x_j)} dx_j, \quad y, z \in L_2(\Gamma).$$

Начальные данные (3.25) обозначим через $\Phi = (\phi_1(x_1), \phi_2(x_2), \dots, \phi_{m+1}(x_{m+1}))$ и $\Psi = (\psi_1(x_1), \psi_2(x_2), \dots, \psi_{m+1}(x_{m+1}))$. Собственную функцию соответствующую собственному значению λ_n обозначим через:

$$W_n = (w_1(x_1, \lambda_n), w_2(x_2, \lambda_n), \dots, w_{m+1}(x_{m+1}, \lambda_n))$$

В дальнейшем считаем, что начальные данные Φ, Ψ подчинены условиям согласования (3.23) и (3.24). Тогда функций Φ, Ψ разлагаются в ряды по собственным функциям:

$$\Phi = \sum_n D_n(\Phi) W_n, \quad \Psi = \sum_n D_n(\Psi) W_n, \quad (3.8.16)$$

которые сходятся равномерно на Γ . Подобная теорема для дифференциальных операторов на отрезке доказана в монографии М.А. Наймарка. Она остается справедливой и для дифференциальных операторов определенных на графах. Заметим, что $\{D_n(\Phi)\}, \{D_n(\Psi)\}$ коэффициенты Фурье определяются по стандартным формулам:

$$D_n(\Phi) = \frac{(\Phi, W_n)}{(W_n, W_n)}, \quad D_n(\Psi) = \frac{(\Psi, W_n)}{(W_n, W_n)}.$$

соотношения (2.17) можно переписать в покоординатном виде:

$$\begin{cases} \varphi_j(x_j) = \sum_n D_n(\Phi) w_j(x_j, \lambda_n), \\ \psi_j(x_j) = \sum_n D_n(\Psi) w_j(x_j, \lambda_n), \quad j = 1, 2, \dots, m+1 \end{cases} \quad (3.8.17)$$

Не умаляя общности, выведем аналог формулы Даламбера при $\Psi \equiv 0$. Поскольку известен стандартный прием получения формулы Даламбера для случая $\Psi \neq 0$, если известна формула при $\Phi \neq 0$, $\Psi \equiv 0$. Пусть $\Psi \equiv 0$. Решение смешанной задачи на графе (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3), (3.8.4) ищем в виде:

$$u_j(x_j, t) = \sum_n d_n(t) w_j(x_j, \lambda_n), \quad 0 < x_j < b_j, \quad j = 1, \dots, m+1$$

тогда легко понять, что:

$$d_n(t) = D_n(\Phi) \cos \sqrt{\lambda_n} \cdot t, \quad n \geq 1$$

таким образом, решение примет вид:

$$u_j(x_j, t) = \sum_n D_n(\Phi) \cos \sqrt{\lambda_n} t \cdot w_j(x_j, \lambda_n), \quad 0 < x_j < b_j, \quad t > 0, \quad j = 1, \dots, m+1$$

В дальнейшем упростим произведение $\cos \sqrt{\lambda_n} t \cdot w_j(x_j, \lambda_n)$ при фиксированных n и j .

Резюме: Волновое уравнение во всем пространстве соответствует физическим явлениям. В то же время явление на конечном промежутке не противоречат процессу распространения волн. При этом процесс отражения волн имеет специфическое значение. В работе подробно исследовано соответствующее распространение волн.

Об одной задаче на собственные значения. Пусть k_1, k_2, k_3 – неотрицательные числа. Рассмотрим задачу на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка на объединений интервалов $\left(0, \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$-y''(x) = \lambda y(x) \quad (3.8.18)$$

с условиями $y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$

$$y\left(\frac{1}{2^s}+0\right)=y\left(\frac{1}{2^s}-0\right), \quad y'\left(\frac{1}{2^s}+0\right)=(1+2k_s)y'\left(\frac{1}{2^s}-0\right), \quad s=1,2,3 \quad (3.8.19)$$

удобно ввести решение уравнения (3.8.18) по формуле:

$$\begin{aligned} S(x, \rho) &= \frac{\sin(\rho x)}{\rho}, \quad 0 < x < \frac{1}{8} \\ S(x, \rho) &= (1+k_3) \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + k_3 \frac{\sin\left(\rho\left(x-\frac{1}{4}\right)\right)}{\rho}, \quad \frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}, \\ S(x, \rho) &= (1+k_2)(1+k_3) \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + k_3(1+2k_2) \frac{\sin\left(\rho\left(x-\frac{1}{4}\right)\right)}{\rho} + \\ &+ k_2(1+k_3) \frac{\sin\left(\rho\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)}{\rho}, \quad \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \\ S(x, \rho) &= (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3) \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + (1+k_1)(1+2k_2)k_3 \frac{\sin\left(\rho\left(x-\frac{1}{4}\right)\right)}{\rho} + \\ &+ k_2(1+k_3)(1+2k_1) \frac{\sin\left(\rho\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)}{\rho} + k_1k_3(1+2k_2) \frac{\sin\left(\rho\left(x-\frac{3}{4}\right)\right)}{\rho} + \\ &+ k_1(1+k_3)(1+k_2) \frac{\sin(\rho(x-1))}{\rho}, \quad \frac{1}{2} < x < 1, \end{aligned}$$

Решение $S(x, \rho)$ выбрано так, что выполняются условия (3.40) и $S(0, \rho) = 0$. Поэтому нули функции:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3) \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + (1+k_1)(1+2k_2)k_3 \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\rho\right)}{\rho} + \\ &+ k_2(1+k_3)(1+2k_1) \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\rho\right)}{\rho} + k_1k_3(1+2k_2) \frac{\sin\left(\frac{1}{4}\rho\right)}{\rho} \end{aligned}$$

где $\lambda = \rho^2$, являются собственными значениями исходной задачи. Заметим, что $\Delta(\lambda) > 0$. Преобразуем функцию $\Delta(\lambda)$ к виду:

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin\left(\frac{1}{4}\rho\right)}{\rho} \left\{ \begin{array}{l} k_1 k_3 (1+2k_2) + 2k_2 (1+k_3)(1+2k_1) \cos\left(\frac{1}{4}\rho\right) + k_3 (1+k_1)(1+2k_2) \left(4\cos^2\left(\frac{1}{4}\rho\right) - 1\right) + \\ + 4(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3) \cos\left(\frac{1}{4}\rho\right) \left(2\cos^2\left(\frac{1}{4}\rho\right) - 1\right) \end{array} \right\}$$

Отсюда вытекает, что надо исследовать кубическое уравнение

$$P(z) \equiv 8(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)z^3 + 4(1+k_1)(1+2k_2)k_3z^2 - 2(1+k_3)(2+k_1)z - k_3(1+2k_2) = 0 \quad (3.8.20)$$

Заметим, что $p(1) = 16k_1k_2k_3 + 8k_1k_2 + 10k_1k_3 + 14k_3k_2 + 6k_1 + 8k_2 + 7k_3 + 4 > 0$,

$$p(-1) = -8k_1k_2 - 2k_1k_3 - 2k_3k_2 - 6k_1 - 8k_2 - k_3 - 4 < 0.$$

корни кубического уравнения (3.41) не могут быть кратными, поскольку квадратное уравнение для его производной:

$$24z^2 + \frac{8(1+k_1)(1+2k_2)k_3}{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)}z^1 - \frac{2(1+k_3)(2+k_1)}{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)} = 0$$

имеет два разных действительных корня. Докажем, что указанное кубическое уравнение имеет три действительных корня и все они лежат в интервале $(-1, 1)$. Пусть z_1 – корень кубического уравнения (3.8.20), который либо комплексный, либо лежит вне интервала $(-1, 1)$. Тогда из соотношения:

$$\cos\left(\frac{1}{4}\rho\right) = z_1$$

закключаем, что исходная задача на собственные значения имеет комплексные собственные значения. Но это противоречит тому, что исходная задача является самосопряженной [36, с. 134]. Таким образом, у исследуемого кубического уравнения существует три разных корня z_1, z_2, z_3 из интервала $(-1, 1)$. Следовательно, существует три серии собственных значений [37, р. 12]:

$$\lambda_n^{(s)} = 16(2\pi n + \arccos z_s)^2, \quad s = 1, 2, 3$$

Четвертая серия собственных значений следует из уравнения $\frac{\sin\left(\frac{1}{4}\rho\right)}{\rho} = 0$

и имеет вид:

$$\lambda_n^{(4)} = 16(\pi n)^2, \quad n > 0$$

для каждой серии собственных значений можно выписать собственные функции $S(x, \rho_n^{(s)})$, $s=1,2,3,4$. Приведем полезные для дальнейшего свойства системы собственных функций $\{S(x, \rho_n^{(s)}), s=1,2,3,4, n \geq 0\}$.

Лемма 3.6. Системы собственных функций $\{S(x, \rho_n^{(s)}), s=1,2,3,4, n \geq 0\}$ образует ортогональный базис в пространстве $L_2(0,1)$.

Доказательство леммы 1. Возьмем два произвольных собственных значения $\lambda_n^{(s)}$ и $\lambda_m^{(t)}$. Рассмотрим произведение:

$$\begin{aligned} & (\lambda_n^{(s)} - \lambda_m^{(s)}) \int_0^1 S(x, \rho_n^{(s)}) S(x, \rho_m^{(t)}) dx = \\ & = \int_0^1 S(x, \rho_n^{(s)}) S''(x, \rho_m^{(t)}) dx - \int_0^1 S''(x, \rho_n^{(s)}) S(x, \rho_m^{(t)}) dx = \\ & = \left(S(x, \rho_n^{(s)}) S'(x, \rho_m^{(t)}) - S'(x, \rho_n^{(s)}) S(x, \rho_m^{(t)}) \right) \Big|_0^{\frac{1}{8}} + \left(S(x, \rho_n^{(s)}) S'(x, \rho_m^{(t)}) - S'(x, \rho_n^{(s)}) S(x, \rho_m^{(t)}) \right) \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + \\ & + \left(S(x, \rho_n^{(s)}) S'(x, \rho_m^{(t)}) - S'(x, \rho_n^{(s)}) S(x, \rho_m^{(t)}) \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} + \left(S(x, \rho_n^{(s)}) S'(x, \rho_m^{(t)}) - S'(x, \rho_n^{(s)}) S(x, \rho_m^{(t)}) \right) \Big|_{\frac{3}{4}}^1 = 0 \end{aligned}$$

здесь учтены условия (3.8.19) и то, что $S(0, \rho_n^{(s)})=0$, $S(1, \rho_n^{(s)})=0$, $S(0, \rho_m^{(t)})=0$, $S(1, \rho_m^{(t)})=0$.

Из полученного соотношения следует ортогональность системы. Базисность системы следует из того, что исходная задача является самосопряженной. Система собственных функций $\{S(0, \rho_n^{(s)})=0, s=1,2,3,4, n \geq 0\}$, на самом деле, определена на всей оси, а не только на объединений интервалов $\left(0, \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Проследим как она с $\left(0, \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ продолжается на $\left(-\frac{1}{8}, 0\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$. При $x \in \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, положим $S(x, \rho_n^{(s)}) = -S(x, \rho_n^{(s)})$, то есть через точку $x = 0$ имеем нечетное продолжение. Тогда $S(-1+0, \rho_n^{(s)})=0$, $S'(-1+0, \rho_n^{(s)})=S'(-1-0, \rho_n^{(s)})$. Далее с множества

$\left(-\frac{1}{8}, 0\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ на всю числовую ось продолжаем периодически с периодом равным двум. Продолжение будет гладкой функцией в целых точках, то есть продолженная функция непрерывна в целых точках вместе с первой производной. Как известно произвольная функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условиям (3.40) и $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 0$, разлагается в равномерно сходящийся ряд по системе $\{S(x, \rho_n^{(s)}), s=1, 2, 3, 4, n \geq 0\}$. Следовательно, функцию $\varphi(x)$ сначала продолжим нечетно на $\left(-\frac{1}{8}, 0\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, а затем 2-периодически на всю числовую ось. Продолженную функцию обозначим через $\tilde{\varphi}(x)$. При этом разложение $\varphi(x)$ по системе $\{S(x, \rho_n^{(s)}), s=1, 2, 3, 4, n \geq 0\}$ сохранится и для функции $\tilde{\varphi}(x)$. Приведем некоторые примеры, когда приведенные выше рассуждения приводят к явным формулам.

Пример 3.3. Если $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, то $S(x, \rho) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho}$, $0 < x < 1$. В этом случае все четыре серии собственных значений можно объединить в одну $\rho_n^{(0)} = \pi n$, $n > 0$. Система собственных функций примет вид $\{\sin(\pi n x), n > 0\}$.

Пример 3.4. Пусть $k_1 = k_3 = 0, k_2 \neq 0$. Тогда:

$$S(x, \rho) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho}, \quad 0 < x < \frac{1}{4},$$

$$S(x, \rho) = (1 + k_2) \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + k_2 \frac{\sin\left(\rho\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)}{\rho}, \quad \frac{1}{4} < x < 1,$$

в этом случае две серии собственных значений:

$$\rho_n^{(0)} = 2\pi n, \quad n > 0, \quad \rho_n^{(1)} = 2\pi(2n + 1) + 2 \arccos \frac{k_2}{2(1 + k_2)}, \quad n \geq 0.$$

Пример 3.5. Пусть $k_2 = k_3 = 0, k_1 \neq 0$. Тогда:

$$S(x, \rho) = \frac{\sin(\rho x)}{\rho}, \quad 0 < x < \frac{1}{2},$$

$$S(x, \rho) = (1 + k_1) \frac{\sin(\rho x)}{\rho} + k_1 \frac{\sin(\rho(x - 1))}{\rho}, \quad \frac{1}{2} < x < 1,$$

В этом случае все четыре серии собственных значений можно объединить в одну $\rho_n^{(0)} = \pi n, n > 0$. Система собственных функций примет вид $\{C_n(x)\sin(\pi nx), n > 0\}$, где $C_n(x)$ – кусочно-постоянная функция при фиксированном n .

Лемма 3.7. Каждой нечетной непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1,1]$ функции $\omega(x)$ поставим в соответствие функцию $\varphi(x)$, определяемую по формуле:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \omega(x), \quad 0 < x < \frac{1}{8}, \\ \varphi(x) &= (1+k_3)\omega(x) - k_3\omega\left(\frac{1}{4}-x\right), \quad \frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}, \\ \varphi(x) &= (1+k_2)(1+k_3)\omega(x) + k_3(1+2k_2)\omega\left(x-\frac{1}{4}\right) - k_2(1+k_3)\omega\left(\frac{1}{2}-x\right), \quad \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \\ \varphi(x) &= (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\omega(x) + (1+k_1)k_3(1+2k_2)\omega\left(x-\frac{1}{4}\right) + k_2(1+k_3)(1+2k_1)\omega\left(x-\frac{1}{2}\right) - \\ &- k_1k_3(1+2k_2)\omega\left(\frac{3}{4}-x\right) - k_1(1+k_3)(1+k_2)\omega(1-x), \quad \frac{1}{2} < x < 1,\end{aligned}$$

Тогда функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (3.8.19), причем $\varphi(0) = 0$. Множество, указанным образом построенных функций $\varphi(x)$, обозначим через $D(k_1, k_2, k_3)$. Лемма 3.7 доказывается непосредственной проверкой условий (3.40). Заметим, что функция $\varphi(x)$ продолжается на всю числовую ось и 2-периодическое продолжение, обозначаемое через $\tilde{\varphi}(x)$, непрерывно на числовой оси, если $\varphi(1) = 0$.

Смешанная задача для волнового уравнения

В данном пункте введем обозначение:

$$\Omega = \left(0, \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \quad (3.8.21)$$

с начальными условиями:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega \quad (3.8.22)$$

и однородными граничными условиями $u(0,t)=0, u(1,t)=0$, а также внутренне краевыми условиями (3.40). В дальнейшем будем предполагать, начальные данные $\varphi(x), \psi(x), x \in \Omega$ выбраны из множества $D(k_1, k_2, k_3)$.

Теорема 3.7. Пусть функций $\varphi(x), \psi(x) \in D(k_1, k_2, k_3)$. Предположим, что $\varphi(1) = \psi(1) = 0$. Тогда решение задачи (3.42), (3.43) с указанными граничными и внутренне-краевыми условиями имеет единственное решение, которое имеет представление:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(x+t) + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\xi) d\xi$$

где $\tilde{\varphi}$ 2-периодическое продолжение на всю числовую ось функции φ , $\tilde{\psi}$ 2-периодическое продолжение на всю числовую ось функции ψ .

Аналогичная смешанная многоточечная задача для волнового уравнения только с гладкими начальными данными изучена в работе авторов Vekbolat В., Kanguzhin В.Е., Tokmagambetov N.. Основной результат работы [38, р. 76] распространение формулы Даламбера на многоточечные задачи с гладкими данными. В то время теорема 1 обобщает формулу Даламбера на смешанные задачи для волнового уравнения с негладкими решениями. Обратим внимание на то, что в теореме 1 введен и описан новый класс начальных данных $D(k_1, k_2, k_3)$. Доказательство теоремы 1. Докажем теорему при $\psi(x) = 0$. Тогда стандартная процедура в работе автора Комеч А.И., позволяет сформулировать теорему и при других нетривиальных $\tilde{\psi}(x)$. Разложим начальную функцию $\varphi(x)$ по системе собственных функций $\{S(x, \rho_n^{(s)}), S = 1, 2, 3, 4, n \geq 0\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^4 \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(s)} S(x, \rho_n^{(s)}) \quad (3.8.23)$$

где $c_0^{(4)} = 0, c_n^{(s)} = \frac{A}{B}, A = \int_0^1 \varphi(x) S(x, \rho_n^{(s)}) dx, B = \int_0^1 S(x, \rho_n^{(s)}) S(x, \rho_n^{(s)}) dx$. Заметим, что ряд (3.8.23) сходится равномерно на Ω . Решение задачи ищем в виде:

$$u(x,t) = \sum_{s=1}^4 \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(s)}(t) S(x, \rho_n^{(s)}) \quad (3.8.24)$$

стандартная процедура [40, р. 1210] позволяет выписать коэффициенты в следующем виде

$$d_n^{(s)}(t) = C_n^{(s)} \cos \rho_n^{(s)} t \quad (3.8.25)$$

нам понадобится очевидная лемма.

Лемма 3.8. При $x \in \Omega$ справедлива формула:

$$2 \cos(\rho_n^{(s)} t) S(\rho_n^{(s)}) = \tilde{S}(x+t, \rho_n^{(s)}) + \tilde{S}(x-t, \rho_n^{(s)}),$$

где \tilde{S} продолжение на всю числовую ось функции S . Лемма 3.8 вытекает из формулы $2 \cos(t) \sin(x) = \sin(x+t) + \sin(x-t)$. подставим соотношения (3.8.25) в равенство (3.8.24) и учтем лемму 3.8. Тогда:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^4 \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(s)} \tilde{S}(x+t, \rho_n^{(s)}) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^4 \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(s)} \tilde{S}(x-t, \rho_n^{(s)})$$

отсюда вытекает представление:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(x+t) + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(x-t)$$

где $\tilde{\varphi}$ 2-периодическое продолжение на всю числовую ось функции φ . приведем некоторые примеры, проясняющие смысл теоремы 1. Разрывные решения волнового уравнения в газовой динамике называются ударными волнами. Интересно проследить за распространением ударных волн.

Пример 3.5 (продолжение). В случае $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ множество $D(0, 0, 0)$ состоит из функций из нечетных непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-1, 1]$ функций. Тогда гладкое решение смешанной задачи (3.8.21)-(3.8.22) с условиями $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(x+t) + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\xi) d\xi$$

если $\varphi(1) = \psi(1) = 0$. Геометрическая интерпретация полученного решения имеется в работе Комеч А.И.

Пример 3.5 (продолжение). В этом случае класс начальных данных $D(k_1, 0, 0)$ состоит из функций вида:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \omega(x), \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \varphi(x) &= (1+k_1)\omega(x) - k_1\omega(1-x), \quad \frac{1}{2} < x < 1, \end{aligned}$$

где $\omega(x)$ – произвольная нечетная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1, 1]$ функция. Тогда решение смешанной задачи из теоремы 1 будет непрерывным при $\varphi(1) = \psi(1) = 0$. Однако производные по переменной имеют разрывы [40, p. 1210].

3.9 Идентификация области определения оператора Штурма–Лиувилля на граф–звезде

В данном пункте приведен в основной результат диссертации, вносимый на защиту. Этот результат опубликован в работе автора [40].

В знаменитой работе Борга [41, р. 2184; 42, р. 645; 43, с. 14; 44, 45] сформулирован следующий результат: обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ – собственные значения задачи:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (3.9.1)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (3.9.2)$$

где $q(x)$ – действительная непрерывная на отрезке $[0, \pi]$;

h, H – действительные числа. Точно также обозначим через μ_1, μ_2, \dots – собственные значения уравнения (3.9.1) при граничных условиях:

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (3.9.3)$$

где $h_1 \neq h$. Тогда последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ однозначно определяют функцию $q(x)$ и числа h, h_1 и H . Таким образом, Борг вводит спектры двух эталонных задач:

E_1 – первая эталонная задача (3.9.1)– (3.9.3)

E_2 – вторая эталонная задача (3.9.1)– (3.9.2).

Последняя из эталонных задач совпадает с исходной задачей (3.9.1)– (3.9.2), которую требуется восстановить по набору спектров эталонных задач E_1 и E_2 . В работе Levitan В.М., Gasymov М.Г., сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ были двумя спектрами задач E_1 и E_2 .

В работе Плаксиной О.А., изучаются обратные задачи для операторов, порождаемых на отрезке $[0, \pi]$ операцией $l = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right)$ и общими неразделенными самосопряженными граничными условиями, которые имеют вид:

$$\begin{cases} y'(0) + \beta y(0) + e^{i\alpha} \cdot y(\pi) = 0, \\ y'(\pi) - e^{-i\alpha} \cdot y(0) + \gamma y(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.9.4)$$

где α, β, γ – вещественные числа. В работе [46-50] вводится три эталонных задач E_1, E_2 и E_3 , по спектрам которых производится восстановление функции $q(x)$ и чисел α, β, γ . Эталонная задачи E_1 задается уравнением (3.9.1) и разделенными граничными условиями [51]:

$$y(0) = 0, y'(\pi) + \gamma y(\pi) = 0. \quad (3.9.5)$$

Эталонная задачи E_2 задается уравнением (3.9.1) и неразделенным граничными условиями вида (3.9.4), только в (3.9.4) надо α заменить на α_1 , сохраняя все остальные граничные коэффициенты. Эталонная задачи E_3 совпадает с задачей (3.9.1)–(3.9.4). Оказывается, что для однозначного восстановления $q(x)$ и чисел $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1$ недостаточно задания трех спектров эталонных задач E_1, E_2 и E_3 . Для однозначности восстановления надо набор спектров эталонных задач E_1, E_2 и E_3 дополнить некоторым набором последовательностей знаков $\{\delta_n\}$, где каждое δ_n либо +1, либо -1. Отметим, что в работе [52-59] приведены необходимые и достаточные условия для того, что указанные выше четыре последовательности были тремя спектрами эталонных задач E_1, E_2 и E_3 . Аналогичные обратные спектральные задачи для дифференциальных операторы на графах изучались в [60].

Наряду с указанными постановками обратных задач по набору спектров эталонных задач представляет интерес исследовать возможность однозначного восстановления только граничных условий эталонных задач. При этом считается, что $q(x)$ коэффициент дифференциального выражения задан на всем отрезке $[0, \pi]$. Подобные задачи мы называем задачами идентификации граничных условий [61, 62]. Иногда такую задачу называют задачей идентификации области определения оператора Штурма-Лиувилля, так как область определения оператора может задаваться разными (но эквивалентными) наборами граничных условий.

Задачи идентификации граничных условий эталонных задач обычно требуют однозначного восстановления конечного числа граничных коэффициентов. В случае Борга надо восстановить всего лишь три вещественных числа h, h_1 и H . В случае Плаксиной надо восстановить четыре числа α, β, γ и α_1 . Отсюда можно понять, что для восстановления конечного числа граничных коэффициентов не обязательно задавать наборы полных спектров эталонных задач.

В работе автора Kanguzhin В.Е. доказывается, что для однозначного восстановления граничных условий достаточно от каждой эталонной задачи задать только конечное число собственных значений.

Подобный результат доказан в работе [63, р. 23] для дифференциальных операторов высших порядков на конечном отрезке. В данной работе аналогичный результат доказывается для оператора Штурма-Лиувилля на графе-звезде. При этом особое внимание уделяется нераспадающимся граничным условиям.

Пусть концы $(m+1)$ -ая стержни должны быть упруго связаны друг с другом в одном узле. Свободные концы стержней m как-то закреплены и недоступны для визуального наблюдения. Свобода видимый конец одного стержня можно ударить молотком, а собственные частоты продольных колебания

соединительных конструкций могут быть измерены. В работе говорится, что существует конечный набор собственных частот, который однозначно определяет привязку концов стержни, недоступные для визуального наблюдения $(m+1)$ -ая стержень определяется звездным графом, на котором оператор Штурма – Лиувилля определен с некоторыми граничные условия.

В работе доказана возможность однозначного восстановления области оператора Штурма-Лиувилля на звездном графе набором спектров специальных канонических проблемы. В работе было доказано, что конечного числа собственных частот достаточно для однозначного восстановления фиксации концов стержней [63, 64]. Причем общее количество собственные частоты, необходимые для однозначного восстановления граничных ограничений, не превосходить $2(m+1)^2$. В [65] задача восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений из конечного набора собственных значений краевой задачи с неразделенной границей условия были учтены. Выявление граничных повреждений для соединительных конструкций, состоящих из твердых тел остается сложной темой из-за влияния твердых тел друг на друга и экспериментальных условия. Выявление граничного повреждения затруднено, если концы соединительная конструкция недоступна для визуального осмотра. Поэтому в данной работе Собственные частоты продольных колебаний соединительных конструкций использовались для идентификации граничные повреждения, так как собственные частоты колебаний соединительных конструкций могут быть измеряется инженерными датчиками.

3.9.1 Решение задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля на граф-звезде

Пусть $\Gamma = \{V, E\}$ -граф-звезда, где V - множество его вершин, занумерованных от 0 до $m+1$; а множество E означает множество его дуг e_1, \dots, e_m [60, p. 819]. На каждой дуге e_j выполняется дифференциальное уравнение:

$$-y_j''(x_j) + p_j(x_j)y_j(x_j) = f_j(x_j), \quad 0 < x_j < b_j \quad (3.9.6)$$

В дальнейшем предполагаем, что функций $p_j(x)$, $j \geq 1$ являются вещественными непрерывными на e_j . Вершина $(m+1) \in V$ называется внутренней вершиной графа-звезды. Во внутренней вершине $(m+1)$ выполняются законы Кирхгофа [66]:

$$\begin{cases} y_{m+1}(b_{m+1}) = y_1(0) = \dots = y_m(0) \\ y'_{m+1}(b_{m+1}) = y'_1(0) + \dots + y'_m(0) \end{cases} \quad (3.9.7)$$

Вершины $0, 1, \dots, m$ называются граничными вершинами графа-звезды (рисунок 5).

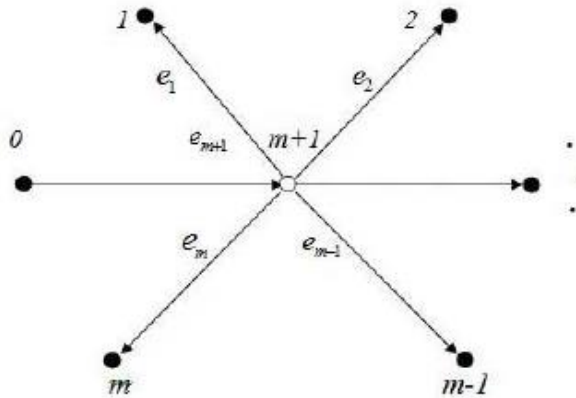


Рисунок 5 – Граф-звезда

В граничных вершинах $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ выполняется набор граничных условий:

$$U_k(y_1, \dots, y_{m+1}) = \sum_{j=1}^2 [\alpha_{kj} y_1^{(j-1)}(b_1) + \alpha_{k(2+j)} y_2^{(j-1)}(b_2) + \dots + \alpha_{k(2m-2+j)} y_m^{(j-1)}(b_m) + \alpha_{k(2m+j)} y_{m+1}^{(j-1)}(0)] = 0 \quad (3.9.8)$$

где α_{ks} – комплексные числа. Для дальнейших целей удобно ввести функций $c_j(x_j), s_j(x_j), j = 1, 2, \dots, m+1$. При каждом j $c_j(x_j), s_j(x_j)$ функций являются решениями однородного дифференциального уравнения:

$$-y_j''(x_j) + p_j(x_j)y_j(x_j) = 0, \quad 0 < x_j < b_j \quad (3.9.9)$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} c_j(0) = s_j'(0) = 1, c_j'(0) = s_j(0) = 0, & j = 1, 2, \dots, m, \\ c_{m+1}(b_{m+1}) = s_{m+1}'(b_{m+1}) = 1, c_{m+1}'(b_{m+1}) = s_{m+1}(b_{m+1}) = 0. \end{cases}$$

Поскольку граф-звезда представляет собой дерево [67, 68], то существует единственный путь, соединяющий вершину 0 с вершиной j , где $j = 1, \dots, m$. Обозначим этот путь через $S_j = e_{m+1} \cup e_j$. Указанный путь S_j удобно представлять в виде объединения интервалов $(0, b_{m+1})$ и $(b_{m+1}, b_{m+1} + b_j)$.

На объединений интервалов $S_j = (0, b_{m+1}) \cup (b_{m+1}, b_{m+1} + b_j)$ удобно ввести дифференциальное уравнение:

$$-\varphi''(x) + q_j(x)\varphi_j(x) = F_j(x) \quad x \in (0, b_{m+1}) \cup (b_{m+1}, b_{m+1} + b_j) \quad (3.9.10)$$

где

$$\begin{aligned} q_j(x) &= p_{m+1}(x), \text{ если } 0 < x < b_{m+1}, \\ q_j(x) &= p_j(x), \text{ если } b_{m+1} < x < b_{m+1} + b_j, \\ F_j(x) &= f_{m+1}(x), \text{ если } 0 < x < b_{m+1} \\ F_j(x) &= f_j(x), \text{ если } b_{m+1} < x < b_{m+1} + b_j \end{aligned}$$

В точке $x = b_{m+1}$ потребуем условия:

$$\varphi_j(b_{m+1} - 0) = \varphi_j(b_{m+1} + 0), A_j \varphi_j'(b_{m+1} - 0) = \varphi_j'(b_{m+1} + 0), \quad (3.9.11)$$

где $\{A_j\}$ - произвольные постоянные, подчиненные единственному требованию:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = 1 \quad (3.9.12)$$

Пусть A_1, A_2, \dots, A_m фиксированы так, что выполняется (3.9.12). Также считаем, что функций $\varphi_j(x), \varphi_j'(x)$ непрерывны слева, то есть $\varphi_j(b_{m+1} - 0) = \varphi_j(b_{m+1}), \varphi_j'(b_{m+1} - 0) = \varphi_j'(b_{m+1})$. Через $\Phi_j(x)$ и $\Psi_j(x)$ обозначим решения уравнения (3.9.10) при $F_j(x) \equiv 0$ на S_j , подчиненные условиям (3.9.11), а также условиям:

$$\Phi_j(b_{m+1} - 0) = \Psi_j'(b_{m+1} - 0) = 1, \Phi_j'(b_{m+1} - 0) = \Psi_j(b_{m+1} - 0) = 0 \quad (3.9.13)$$

При любом j из множества $\{1, \dots, m\}$ и $x \in S_j$ введем частное решение уравнения (3.9.10) по формуле (3.9.14):

$$\varphi_j(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} \Phi_j(x) & \Psi_j(x) \\ \Phi_j(t) & \Psi_j(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi_j'(t) & \Psi_j'(t) \\ \Phi_j(t) & \Psi_j(t) \end{vmatrix}} F_j(t) dt \quad (3.9.14)$$

Понятно, что функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$, определенные по формулам (3.9.14), в точке $x = b_{m+1}$ удовлетворяют условиям Кирхгофа (3.9.7) [69, 70]. Действительно, при $x \in (0, b_{m+1}) \cup (b_{m+1}, b_{m+1} + b_j)$ можно записать:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \int_0^x \begin{vmatrix} c_{m+1}(x) & s_{m+1}(x) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt, \quad x \in (0, b_{m+1}), \\ \varphi_j(x + b_{m+1}) &= \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} \Phi_j(x + b_{m+1}) & \Psi_j(x + b_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt + \int_0^x \begin{vmatrix} c_j(x) & s_j(x) \\ c_j(t) & s_j(t) \end{vmatrix} f_j(t) dt, \quad x \in (0, b_j). \end{aligned}$$

Заметим, что при $x \in (0, b_j)$ верно представление [71, 72]:

$$\Phi_j(x + b_{m+1}) = c_j(x), \quad \Psi_j(x + b_{m+1}) = A_j s_j(x),$$

а при $x \in (0, b_{m+1})$ верно представление $\Phi_j(x) = c_{m+1}(x)$, $\Psi_j(x) = s_{m+1}(x)$

Таким образом, можно сформулировать утверждение.

Теорема 3.8. Решение задачи Коши для уравнений Штурма-Лиувилля (3.9.6), (3.9.7) с условиями Коши в точке $x_{m+1} = 0$

$$\theta_{m+1}(0) = 0, \quad \theta'_{m+1}(0) = 0 \quad (3.9.15)$$

обозначим через $\Theta = (\theta_1(x_1), \theta_2(x_2), \dots, \theta_{m+1}(x_{m+1}))$ и оно имеет вид

$$\theta_{m+1}(x_{m+1}) = \int_0^{x_{m+1}} \begin{vmatrix} c_{m+1}(x_{m+1}) & s_{m+1}(x_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt, \quad x_{m+1} \in e_{m+1}$$

$$\theta_j(x_j) = \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & A_j s_j(x_j) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt + \int_0^{x_j} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & s_j(x_j) \\ c_j(t) & s_j(t) \end{vmatrix} f_j(t) dt, \quad x_j \in e_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где A_1, A_2, \dots, A_m – произвольные числа, подчиненные требованию (3.9.12).

Замечание 3.1. Из теоремы 3.8 следует, что решение задачи Коши (3.9.6), (3.9.7), (3.9.15) зависит от $(m-1)$ произвольных постоянных. Постоянные A_1, A_2, \dots, A_m , удовлетворяющие требованию (3.9.12), определяют в точке $x_{m+1} = b_{m+1}$ доли потоков по дугам e_1, \dots, e_m относительно потока на дуге e_{m+1} . Числа A_1, A_2, \dots, A_m будем называть константами связи.

3.9.2 Построение биортогональной системы решений по набору граничных условий

Пусть задан набор граничных условий (3.9.8) с помощью граничных форм $U_0(\cdot), \dots, U_m(\cdot)$ [73-75]. Система решений $R_j = \{r_{1j}(x_1), \dots, r_{m+1,j}(x_{m+1})\}$ при $j = 0, 1, \dots, m$ задачи (3.9.10)-(3.9.7) называется биортогональной относительно граничных форм $U_0(\cdot), \dots, U_m(\cdot)$, если выполняются требования:

$$U_k(R_j) = \delta_{kj}, \quad k, j = 0, 1, \dots, m \quad (3.9.16)$$

где δ_{kj} – символ Кронекера [76-78].

В данном пункте найдем достаточные условия существования биортогональной системы решений. Иначе говоря, каким условиям должен удовлетворять набор граничных форм $\{U_k, k = 0, 1, \dots, m\}$ для того, чтобы существовала биортогональная система решений задачи (3.9.10)-(3.9.7).

Введем матрицу:

$$T = \begin{bmatrix} U_0(c_1, c_2, \dots, c_{m+1}) & U_0^1(s_1) & U_0^2(s_2) & \dots & U_0^m(s_m) & U_0^{m+1}(s_{m+1}) \\ U_1(c_1, c_2, \dots, c_{m+1}) & U_1^1(s_1) & U_1^2(s_2) & \dots & U_1^m(s_m) & U_1^{m+1}(s_{m+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(c_1, c_2, \dots, c_{m+1}) & U_m^1(s_1) & U_m^2(s_2) & \dots & U_m^m(s_m) & U_m^{m+1}(s_{m+1}) \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

где

$$U_i^k(s_k) = \sum_{j=1}^2 \alpha_{i(2k-2+j)} s_k^{(j-1)}(b_k), \quad k \geq 1, i \geq 0, \quad (3.9.17)$$

$$U_i^{m+1}(s_{m+1}) = \sum_{j=1}^2 \alpha_{i(2m+j)} s_{m+1}^{(j-1)}(0).$$

Теорема 3.9. Пусть набор граничных форм $U_0(\cdot), \dots, U_m(\cdot)$ такой, что $\det T \neq 0$.

Тогда существует единственная система решений задачи (3.9.10)–(3.9.7), которая является биортогональной относительно форм $\{U_0, \dots, U_m\}$ [79, 80].

Доказательство теоремы 3.9. Запишем общее решение однородной системы дифференциальных уравнений (3.9.10), подчиненных условиям Кирхгофа (3.9.7):

$$y_{m+1}(x_{m+1}) = D \cdot c_{m+1}(x_{m+1}) + E \cdot s_{m+1}(x_{m+1}), \quad x_{m+1} \in e_{m+1}, \quad (3.9.18)$$

$$y_j(x_j) = D c_j(x_j) + E A_j s_j(x_j), \quad x_j \in e_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.9.19)$$

Здесь числа D, E и A_1, \dots, A_m – произвольные числа, подчиненные единственному требованию (3.9.12). Докажем, что существует R , удовлетворяющая соотношениям

$$U_0(R) = 1, U_1(R) = 0, \dots, U_m(R) = 0 \quad (3.9.20)$$

Функцию $R = (r_1(x), r_2(x), \dots, r_{m+1}(x))$ ищем в виде (3.9.18) и (3.9.19). Подставляя соотношения (3.9.18) и (3.9.19) в равенства (3.9.20), получим систему алгебраических уравнений относительно $D, E, A_1 E, A_2 E, \dots, A_m E$:

$$Tz = l_1, \quad (3.9.21)$$

где

$$z = [D, A_1 E, A_2 E, \dots, A_m E, E]^T$$

$$l_1 = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$$

Поскольку $\det T \neq 0$, то числа $E, A_1, A_2, \dots, A_m, D$ из системы (3.9.21) находятся однозначно. Следовательно, R_0 — определяется из условий (3.9.16) при $j=0$ единственным образом. Точно также проверяется, что R_1, \dots, R_m определяются из условий (3.9.16) при $j \geq 1$ единственным образом. Теорема 3.9 полностью доказана.

3.9.3 Эквивалентный набор граничных форм, имеющих интегральный вид

В данном пункте набор граничных форм $\{U_0, \dots, U_m\}$ из (3.9.8) заменим эквивалентным другим набором граничных форм $\{W_0, \dots, W_m\}$. Пусть число $A_m = 1 - A_1 - \dots - A_{m-1}$, а числа A_1, A_2, \dots, A_{m-1} — произвольные. Чтобы предъявить явный вид граничных форм $\{W_0, \dots, W_m\}$ введем следующие функций:

$$\begin{aligned} \rho_k^{(1)}(t) &= \sum_{i=0}^m r_{m+1 i}^{(0)} \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix}, t \in e_k, k \leq m, \\ \rho_{m+1}^{(1)}(t) &= \sum_{i=0}^m r_{m+1 i}^{(0)} \left(\begin{vmatrix} U_i^{m+1}(c_{m+1}) & U_i^{m+1}(s_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} + \sum_{l=1}^m \begin{vmatrix} U_i^l(c_l) & A_l U_i^l(s_l) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} \right), t \in e_{m+1}, \\ \rho_k^{(2)}(t) &= \sum_{i=0}^m r'_{m+1 i} (0) \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix}, t \in e_k, k \leq m, \\ \rho_{m+1}^{(2)}(t) &= \sum_{i=0}^m r'_{m+1 i} (0) \left(\begin{vmatrix} U_i^{m+1}(c_{m+1}) & U_i^{m+1}(s_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} + \sum_{l=1}^m \begin{vmatrix} U_i^l(c_l) & A_l U_i^l(s_l) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} \right), t \in e_{m+1}, \\ \rho_k^{(j+2)}(t) &= \sum_{i=0}^m (r'_{j i}(0) - A_j r'_{m+1 i}(b_{m+1})) \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix}, t \in e_k, k \leq m, \\ \rho_{m+1}^{(j+2)}(t) &= \sum_{i=0}^m (r'_{j i}(0) - A_j r'_{m+1 i}(b_{m+1})) \left(\begin{vmatrix} U_i^{m+1}(c_{m+1}) & U_i^{m+1}(s_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} + \sum_{l=1}^m \begin{vmatrix} U_i^l(c_l) & A_l U_i^l(s_l) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} \right), t \in e_{m+1} \end{aligned} \quad (3.9.22)$$

Теперь определим новые граничные формы по формулам:

$$W_0(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = y_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(1)}(t) (-y_k''(t) + p_k(t)y_k(t)) dt,$$

$$W_1(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = y'_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(2)}(t) (-y_k''(t) + p_k(t)y_k(t)) dt,$$

$$W_{j+1}(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(j+2)}(t) (-y_k''(t) + p_k(t)y_k(t)) dt, j = 1, \dots, m-1.$$

Теорема 3.10. Пусть, что задача (3.9.6), (3.9.7), (3.9.8) имеет единственное решение $Y = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_{m+1}(x_{m+1}))$. Тогда набор граничных условий (3.9.8) эквивалентен следующим граничным условиям:

$$W_k(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (3.9.23)$$

Граничные условия, определяемые согласно теореме 3.8, назовем каноническими граничными условиями или нормированными граничными условиями [63, р. 23; 81, 82]. Поэтому вместо того, чтобы восстанавливать граничные условия (3.9.8) будем восстанавливать граничные условия (3.9.23).

Замечание 3.2. Заметим, что функций $\rho_k^{(j)}(t)$ при фиксированном k из множество $\{1, \dots, m+1\}$ определены на дуге e_k и представляет решения однородного уравнения (3.9.9).

Доказательство теоремы 3.10. Согласно теореме 3.8 определим решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \theta_j(x_j) &= \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & A_j s_j(x_j) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt + \int_0^{x_j} \begin{vmatrix} c_j(x_j) & s_j(x_j) \\ c_j(t) & s_j(t) \end{vmatrix} f_j(t) dt, \quad x_j \in e_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ \theta_{m+1}(x_{m+1}) &= \int_0^{x_{m+1}} \begin{vmatrix} c_{m+1}(x_{m+1}) & s_{m+1}(x_{m+1}) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt, \quad x_{m+1} \in e_{m+1}. \end{aligned} \quad (3.9.24)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\mathcal{G}_j(x_j) = \theta_j(x_j) - \sum_{i=0}^m U_i(\theta) r_{ji}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, m+1 \quad (3.9.25)$$

удовлетворяет граничным условием (3.9.8). Обозначим через $V = (\mathcal{G}_1(x_1), \dots, \mathcal{G}_{m+1}(x_{m+1}))$.

Действительно, запишем равенство $\sum_{j=1}^{m+1} U_0^j(\mathcal{G}_j) = \sum_{j=0}^{m+1} U_0^j(\theta_j) - \sum_{i=0}^m U_i(\theta) \sum_{j=1}^{m+1} U_0^j(r_{ji})$, которое вытекает из тождества $U_i(Y) = \sum_{k=1}^{m+1} U_i^k(y_k)$. Величина $U_i^k(y_k)$ определяется аналогично (3.9.17). Отсюда и из соотношений биортогональности $\{R_0, \dots, R_m\}$ и $\{U_0, \dots, U_m\}$ имеем соотношение $U_0(V) = U_0(\theta) - \sum_{i=0}^m U_i(\theta) U_0(R_i) = 0$, которое подтверждает выполнение граничных условий (3.9.8). Нетрудно понять, что V является решением задачи (3.9.6), (3.9.7), (3.9.8). В силу единственности решения задачи (3.9.6), (3.9.7), (3.9.8), отсюда следует что,

$$Y = V \quad \text{или} \quad y_j(x_j) = \mathcal{G}_j(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, m+1 \quad (3.9.26)$$

Из формул (3.9.25) и (3.9.26) вытекают соотношения:

$$\theta_j(x_j) = y_j(x_j) + \sum_{i=0}^m U_i(\Theta) r_{ji}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, m+1 \quad (3.9.27)$$

Поскольку Θ удовлетворяет следующим условиям:

$$\theta_{m+1}(0) = 0, \quad \theta'_{m+1}(0) = 0, \quad \theta'_j(0) - A_j \theta'_{m+1}(b_{m+1}) = 0, \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (3.9.28)$$

Подставим правые части соотношений (3.9.27) в условия (3.9.28). В результате имеем:

$$\begin{aligned} y_{m+1}(0) + \sum_{i=0}^m U_i(\Theta) r_{m+1i}(0) &= 0, \\ y'_{m+1}(0) + \sum_{i=0}^m U_i(\Theta) r'_{m+1i}(0) &= 0, \\ y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \sum_{i=0}^m U_i(\Theta) (r'_{ji}(0) - A_j r'_{m+1i}(b_{m+1})) &= 0, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (3.9.29)$$

Теперь вычислим значения $U_0(\Theta), \dots, U_m(\Theta)$, учитывая соотношения (3.9.24). В результате имеем при $i = 0, 1, \dots, m$:

$$U_i(\Theta) = \sum_{k=1}^{m+1} U_i^k(\theta_k) = \sum_{k=1}^m \int_0^{b_{m+1}} \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & A_k U_i^k(s_k) \\ c_{m+1}(t) & s_{m+1}(t) \end{vmatrix} f_{m+1}(t) dt + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \begin{vmatrix} U_i^k(c_k) & U_i^k(s_k) \\ c_k(t) & s_k(t) \end{vmatrix} f_k(t) dt. \quad (3.9.30)$$

Правую часть соотношений (3.9.30) подставим в равенства (3.9.29). В результате получим:

$$\begin{cases} y_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(1)}(t) f_k(t) dt = 0, \\ y'_{m+1}(0) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(2)}(t) f_k(t) dt = 0, \\ y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^{b_k} \rho_k^{(j+2)}(t) f_k(t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (3.9.31)$$

Так как $f_k(t) = -y_k''(t) + p_k(t)y_k(t)$ при $k \geq 1$, то из соотношений (3.9.31) вытекает истинность теоремы 3.10.

3.9.4 Выбор эталонных задач и уточненная постановка обратной задачи

В данном пункте указан способ выбора эталонных задач, спектры которых позволят однозначно найти граничные условия исходной краевой задачи или эквивалентные им граничные условия [83-85]. То есть достаточно по спектрам эталонных задач определить функций:

$$\{\rho_k^{(j)}(t), k = 1, \dots, m+1, j = 1, \dots, m+2\}$$

На самом деле, при определении граничных коэффициентов используется не весь спектр вспомогательной эталонной задачи, а только ее конечная часть.

Количество вспомогательных эталонных задач равно количеству дуг граф-звезды. То есть построим $(m+1)$ эталонных задач. В качестве первой эталонной задачи выберем задачу (3.9.6), (3.9.7) со следующими граничными условиями:

$$W_0(y) = 0, y'_{m+1}(0) = 0, y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) = 0, j = 1, \dots, m-1 \quad (3.9.32)$$

В качестве второй эталонной задачи выберем задачу (3.9.6), (3.9.7) со следующими граничными условиями:

$$W_0(y) = 0, W_1(y) = 0, y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) = 0, j = 1, \dots, m-1. \quad (3.9.33)$$

Аналогично выбираются 3-я, 4-я, ..., $(m+1)$ -я эталонные задачи. В качестве $(m+1)$ -той эталонной задачи выберем задачу (3.9.6), (3.9.7), (3.9.23), которая эквивалентна исходной задаче (3.9.6), (3.9.7), (3.9.8).

Уточнение постановки задачи восстановления граничных условий. 1-ая задача: по заданному дифференциальному уравнению (3.9.6) и спектру первой эталонной задачи требуется однозначно восстановить первую граничную вектор-функцию $\{\rho_k^{(1)}(t), k = 1, \dots, m+1\}$. 2-ая обратная задача: по заданному дифференциальному уравнению (3.9.6), а также найденной граничной вектор-функции $\{\rho_k^{(1)}(t), k = 1, \dots, m+1\}$ и спектру второй эталонной задачи требуется однозначно восстановить вторую граничную вектор-функцию $\{\rho_k^{(2)}(t), k = 1, \dots, m+1\}$. Аналогично ставятся 3-я, 4-ая, ..., (m) -ая обратные задачи $(m+1)$ -ая обратная задача: по заданному дифференциальному уравнению (3.9.6), а также по уже найденным граничным вектор-функциям $\{\rho_k^{(1)}(t)\}, \dots, \{\rho_k^{(m)}(t)\}, k = 1, \dots, m+1$ и спектру $(m+1)$ ой эталонной задачи требуется однозначно восстановить $(m+1)$ -ую граничную вектор-функцию $\{\rho_k^{(m+1)}(t), k = 1, \dots, m+1\}$.

На самом деле будет использован не весь спектр эталонной задачи, а только ее конечная часть. В последующих пунктах более детально проработан указанный момент.

3.9.5 Теорема единственности восстановления граничных функций

Переход от краевых условий (3.9.8) к эквивалентным каноническим граничным формам позволит доказать теорему единственности восстановления граничных вектор-функций $\{\rho_k^{(m+1)}(t), k = 1, \dots, m+1\}, \dots, \{\rho_k^{(m+1)}(t), k = 1, \dots, m+1\}$. В дальнейшем эталонную задачу будем называть задачей E_s . Условимся задачу типа E_s с тем же уравнением (3.9.6), но с другими параметрами в граничных условиях (3.9.7) обозначать через \tilde{E}_s . Всюду будем считать, что если некоторый

символ обозначает объект, относящийся к задаче E_s , то этот же символ с «волной» наверху обозначает аналогичный объект задачи \tilde{E}_s .

Теорема 4.11. Фиксируем целое s из множества $\{1, \dots, m+1\}$. Пусть спектры задач E_s и \tilde{E}_s совпадают. Если $\rho_k^{(1)}(t) = \tilde{\rho}_k^{(1)}(t), \dots, \tilde{\rho}_k^{(s-1)}(t) = \tilde{\rho}_k^{(s-1)}(t), k = 1, \dots, m+1$ в $L_2(\Gamma)$ и системы корневых функций задач E_s и \tilde{E}_s полны в $L_2(\Gamma)$, то $\rho_k^{(s)}(t) = \tilde{\rho}_k^{(s)}(t)$ на $L_2(\Gamma)$.

Введем [66, р. 136; 86, 87] естественным образом метрическую топологию и меру Лебега на графе Γ . Пространство $L_2(\Gamma)$ понимается как L_2 – пространство относительно этой меры. Иначе говоря, в $L_2(\Gamma)$ введем скалярное произведение по формуле (3.9.34)

$$(y, z) = \sum_{j=1}^{m+1} (y_j, z_j) = \sum_{j=1}^{m+1} \int_0^{b_j} y_j(x_j) \overline{z_j(x_j)} dx_j, \quad y, z \in L_2(\Gamma) \quad (3.9.34)$$

Тогда условия (3.9.31) с учетом (3.9.34) примут вид:

$$\begin{cases} y_{m+1}(0) + \langle \rho^{(1)}, f \rangle = 0, \\ y'_{m+1}(0) + \langle \rho^{(2)}, f \rangle = 0, \\ y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \langle \rho^{(j+2)}, f \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= (\rho_1^{(1)}, \dots, \rho_{m+1}^{(j)}) \in L_2(\Gamma), \\ f &= (f_1, \dots, f_{m+1}) \in L_2(\Gamma). \end{aligned}$$

Заметим, что $f_j(t) = -y_j''(t) + p_j(t)y_j(t), j = 1, \dots, m+1$. Таким образом, с учетом введенных обозначений:

$$\begin{cases} W_0(y) = y_{m+1}(0) + \langle \rho^{(1)}, -y'' + py \rangle, \\ W_1(y) = y'_{m+1}(0) + \langle \rho^{(2)}, -y'' + py \rangle, \\ W_{j+1}(y) = y'_j(0) - A_j y'_{m+1}(b_{m+1}) + \langle \rho^{(j+2)}, -y'' + py \rangle, \\ j = 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (3.9.35)$$

Заметим, что здесь $py = (p_1 y_1, p_2 y_2, \dots, p_{m+1} y_{m+1})$.

Доказательство теоремы 3.11 при $s = 1$. Через $u^{(1)} = (u_1^{(1)}(x_1), u_2^{(1)}(x_2), \dots, u_{m+1}^{(1)}(x_{m+1}))$ обозначим решение задачи Коши:

$$-\frac{d^2}{dx_j^2} u_j^{(1)}(x_j) + p_j(x_j) u_j(x_j) = \lambda u_j(x_j), \quad x_j \in (0, b_j), \quad j = 1, \dots, m+1$$

$$u_{m+1}^{(1)}(0) = 1, \frac{du_{m+1}^{(1)}}{dx_{m+1}}(0) = 0, \left. \frac{du_k^{(1)}(x_k)}{dx_k} \right|_{x_k=0} - A_k \left. \frac{du_{m+1}^{(1)}(x_{m+1})}{dx_{m+1}} \right|_{x_{m+1}=b_{m+1}} = 0, k = 1, \dots, m-1.$$

Заметим, что функций $u_j^{(1)}(x_j, \lambda)$ является целыми функциями от параметра λ , поскольку по теореме 3.8 задача Коши однозначно разрешима при всех комплексных λ . Пусть $\lambda = \lambda^{(1)}$ произвольное собственное значение задачи E_1 . Тогда $u^{(1)}(\lambda^{(1)}) = (u_1^{(1)}(x_1, \lambda^{(1)}), u_2^{(1)}(x_2, \lambda^{(1)}), \dots, u_{m+1}^{(1)}(x_{m+1}, \lambda^{(1)}))$ – собственная функция задачи E_1 соответствующая собственному значению $\lambda^{(1)}$. Первое граничное условие задачи E_1 примет вид:

$$W_0(u^{(1)}(\lambda^{(1)})) = u_{m+1}^{(1)}(0, \lambda^{(1)}) + \lambda^{(1)} \langle \rho^{(1)}, u^{(1)}(\lambda^{(1)}) \rangle = 0$$

Отсюда следует, что

$$\langle \rho^{(1)}, u^{(1)}(\lambda^{(1)}) \rangle = -\frac{1}{\lambda^{(1)}}.$$

Следовательно, собственные значения задачи E_1 определяют коэффициенты Фурье функции $\rho^{(1)}$ по системе корневых функций сопряженной к задаче E_1 . Поскольку система корневых функций задачи E_1 полна в пространстве $L_2(\Gamma)$, то и система корневых функций сопряженной задачи также полна в $L_2(\Gamma)$.

Таким образом, если спектры задач E_s и \tilde{E}_s совпадают, то совпадают коэффициенты Фурье функций $\rho^{(1)}$ и $\tilde{\rho}^{(1)}$ по одной и той же полной системе пространства $L_2(\Gamma)$. Следовательно, в пространстве $L_2(\Gamma)$ функций $\rho^{(1)}$ и $\tilde{\rho}^{(1)}$ совпадают. Это доказательство соответствует случаю простых собственных значений задач E_1 и \tilde{E}_1 . В случае наличия кратных собственных значений рассуждения требуют небольшой модификации.

Доказательство теоремы 4 при $s = 2$. Через $u^{(2)} = (u_1^{(2)}(x_1), u_2^{(2)}(x_2), \dots, u_{m+1}^{(2)}(x_{m+1}))$ обозначим решение задачи Коши:

$$\frac{-d^2}{dx_j^2} u_j^{(1)}(x_j) + p_j(x_j) u_j(x_j) = \lambda u_j(x_j), x_j \in (0, b_j), j = 1, \dots, m+1$$

$$W_0(u^{(2)}) = 0, \frac{du_{m+1}^{(1)}}{dx_{m+1}}(0) = 1, \left. \frac{du_k^{(1)}(x_k)}{dx_k} \right|_{x_k=0} - A_k \left. \frac{du_{m+1}^{(1)}(x_{m+1})}{dx_{m+1}} \right|_{x_{m+1}=b_{m+1}} = 0, k = 1, \dots, m-1.$$

Пусть $\lambda = \lambda^{(2)}$ произвольное собственное значение задачи E_2 . Тогда $u^{(2)}(\lambda^{(2)}) = (u_1^{(2)}(x_1, \lambda^{(2)}), u_2^{(2)}(x_2, \lambda^{(2)}), \dots, u_{m+1}^{(2)}(x_{m+1}, \lambda^{(2)}))$ собственная функция задачи E_2 соответствующая собственному значению $\lambda^{(2)}$. Второе граничное условие задачи E_2 примет вид:

$$W_1(u^{(2)}(\lambda^{(2)})) = \frac{d}{dx_{m+1}} u_{m+1}^{(2)}(x_{m+1}, \lambda^{(2)}) \Big|_{x_{m+1}=0} + \lambda^{(2)} \langle \rho^{(2)}, u^{(2)}(\lambda^{(2)}) \rangle = 0$$

Отсюда следует, что

$$\langle \rho^{(2)}, u^{(2)}(\lambda^{(2)}) \rangle = -\frac{1}{\lambda^{(2)}}.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 3.11 при $s = 1$. В случае, когда задачи E_1 и E_2 имеют общие собственные значения требуют небольшой модификации в рассуждениях. Доказательства теоремы 3.11 при других s аналогичны. Теорема 3.11 полностью доказана.

3.9.6 Уточнение теоремы единственности в случае граничных задач

В данном пункте уточним теорему 3.11 для граничных задач. В пункте 3.9.3 данной статьи приведены формулы (3.9.22), которые связывают функций $\rho_k^{(j)}(x_k)$ при $j, k = 1, \dots, m+1$ со значениями граничных форм $\{U_i^k(c_k), U_i^k(s_k), k = 1, \dots, m+1, i = 1, \dots, m\}$. Из формулы (3.9.22) следует, что функций $\rho_k^{(j)}(x_k)$ при всех $j = 1, \dots, m+1$ является решениями однородных уравнений $-y_k''(x_k) + p_k(x_k)y(x_k) = 0, k = 1, \dots, m+1$.

Так как коэффициенты $p_1(x_1), \dots, p_{m+1}(x_{m+1})$ заданы, то решения $\{c_k(x_k), s_k(x_k), k = 1, \dots, m+1\}$ также известны. Фиксируем j из множества $\{1, \dots, m+1\}$. Пусть:

$$\rho_k^{(j)}(x_k) = h_{1k}^{(j)} c_k(x_k) + h_{2k}^{(j)} s_k(x_k), x_k \in (0, b_k), k = 1, \dots, m+1$$

с неизвестными константами $h_{1k}^{(j)}, h_{2k}^{(j)}$. В пункте 3.9.5 настоящей статьи приведена связь между коэффициентами Фурье граничной функции $\rho^{(j)} = (\rho_1^{(j)}(x_1), \dots, \rho_{m+1}^{(j)}(x_{m+1}))$ и собственными значениями задачи E_j . Напомним, что

$$\langle \rho^{(j)}, u^{(j)}(\lambda^{(j)}) \rangle = -\frac{1}{\lambda^{(j)}}.$$

где $u^{(j)}(\lambda^{(j)})$ – собственная функция задачи E_j соответствующая собственному значению $\lambda^{(j)}$.

Следовательно, получается система уравнений относительно неизвестных констант $h_{11}^{(j)}, h_{12}^{(j)}, h_{1m+1}^{(j)}, h_{21}^{(j)}, \dots, h_{2m+1}^{(j)}$.

$$\sum_{k=1}^{m+1} \left(h_{1k}^{(j)} \int_0^{b_k} c_k(x_k) \bar{u}_k^{(j)}(x_k, \lambda^{(j)}) + h_{2k}^{(j)} \int_0^{b_k} s_k(x_k) \bar{u}_k^{(j)}(x_k, \lambda^{(j)}) \right) = -\frac{1}{\lambda^{(j)}}.$$

Таким образом, для однозначного определения неизвестных констант $h_{11}^{(j)}, h_{12}^{(j)}, h_{1m+1}^{(j)}, h_{21}^{(j)}, \dots, h_{2m+1}^{(j)}$ достаточно подобрать собственные значения $\{\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \dots, \lambda_{2m+2}^{(j)}\}$ задачи E_j так, чтобы определитель

$$Z = \begin{vmatrix} \int_0^{b_1} c_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_1^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} c_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_1^{(j)}) dx_{m+1} \dots \int_0^{b_1} s_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_1^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} s_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_1^{(j)}) dx_{m+1} \\ \dots \\ \int_0^{b_1} c_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} c_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_{m+1} \dots \int_0^{b_1} s_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} s_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_{m+1} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Здесь $u^{(j)}(\lambda_1^{(j)}), \dots, u^{(j)}(\lambda_{2m+2}^{(j)})$ - собственные функций задачи E_j , которые соответствуют выбранным собственным значениям.

Лемма 3.9. Пусть $b_1 = b_2 = \dots = b_{m+1} = b$. Допустим, что коэффициенты дифференциальных выражений $p_1(x), \dots, p_{m+1}(x)$ выбраны так, что система функций $\{c_1(x), s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$ линейна независима на отрезке $[0, b]$. Пусть задача E_j имеет бесконечно много собственных значений. Существует $\{\lambda_n^{(j)}, n = n_1, \dots, n_{2m+2}\}$ набор из собственных значений задачи E_j таких, что определитель:

$$Z = \begin{vmatrix} \int_0^{b_1} c_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_1^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} c_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_1^{(j)}) dx_{m+1} \dots \int_0^{b_1} s_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_1^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} s_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_1^{(j)}) dx_{m+1} \\ \dots \\ \int_0^{b_1} c_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} c_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_{m+1} \dots \int_0^{b_1} s_1(x_1) \bar{u}_1^j(x_1, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_1 \dots \int_0^{b_{m+1}} s_{m+1}(x_{m+1}) \bar{u}_{m+1}^j(x_{m+1}, \lambda_{2m+2}^{(j)}) dx_{m+1} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Здесь $\lambda_1^{(j)} = \lambda_{n_1}^{(j)}, \dots, \lambda_{2m+2}^{(j)} = \lambda_{n_{2m+2}}^{(j)}$ - некоторые собственные значения эталонной задачи E_j .

Доказательство леммы 3.9. Предположим противное: для любого набора $\{\lambda_n^{(j)}, n = n_1, \dots, n_{2m+2}\}$ определитель $Z = 0$. Положим $n_1 = 1, \dots, n_{2m+1} = 2m+1$. Поскольку задача E_j имеет бесконечно много собственных значений, то пусть $\lambda_n^{(j)}, n = n_{2m+2}$ пробегает весь спектр задачи E_j . Так как $Z = 0$, то система однородных линейных алгебраических уравнений $Z \vec{h} = 0$, где

$$\vec{h} = [h_{11}^{(j)}, \dots, h_{1m+1}^{(j)}, h_{21}^{(j)}, \dots, h_{2m+1}^{(j)}]$$

имеет ненулевое решение. Допустим, что $h_{11}^{(j)} \neq 0$. Следовательно, коэффициенты Фурье функции $c_1(x)$ линейно выражаются через коэффициенты Фурье функций $\{s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$.

Если все коэффициенты Фурье функции $c_1(x)$ линейно выражаются через коэффициенты Фурье функций $\{s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$ то система функций $\{c_1(x), s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$ представляет линейно зависимую систему. Последнее противоречит ее выбору. Если $h_{11}^{(j)} \neq 0$ не выполняется, то требуется некоторая модификация в рассуждениях. Из леммы 3.9 и теоремы 3.11 следует утверждение.

Теорема 3.12. Фиксируем j из множества $\{1, \dots, m+1\}$. Пусть $b_1 = b_2 = \dots = b_{m+1} = b$. Допустим, что коэффициенты дифференциальных выражений $p_1(x), \dots, p_{m+1}(x)$ выбраны так, что система функций $\{c_1(x), s_1(x), c_2(x), s_2(x), \dots, c_{m+1}(x), s_{m+1}(x)\}$ линейна независима на отрезке $[0, b]$. Пусть конечные наборы собственных значений из леммы 3.9 задач E_j и \tilde{E}_j совпадают. Если $\rho^{(1)} = \tilde{\rho}^{(1)}, \dots, \rho^{(j-1)} = \tilde{\rho}^{(j-1)}$ в $L_2(\Gamma)$, то $\rho^{(j)} = \tilde{\rho}^{(j)}$ в $L_2(\Gamma)$.

При доказательстве теоремы 3.11 установлено, что собственные функций E_j и \tilde{E}_j совпадают, если совпадают соответствующие собственные значения. Этот факт играет существенную роль при доказательстве теоремы 3.12. В заключений отметим, что некоторые из приведенных здесь конструкции можно найти в работах Ballmann W., Brüning J., Carron G.; Post O. В работе Pankrashkin K. приведены примеры однородных балок с разными граничными привязками. задано бесконечно много одинаковых собственных частот поперечных колебаний. В теореме 3.12 утверждалось, что конечного числа собственных частот достаточно для уникальное восстановление граничных якорей. Это не противоречит приведенным выше результатам [14, p. 139], поскольку теорема 3.12 утверждает, что собственные частоты должны быть специально подобраны для единственного восстановления граничных анкеров балки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации найдено эффективное представление функции Грина для дифференциальных операторов второго порядка на звездных графах. В результате чего введены понятия вычетного и спектрального разложений функции Грина. Как стало ясно из дальнейших исследований, подобные разложения играют существенную роль в различных вопросах спектрального анализа.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений на компактных графах могут задаваться интегро-дифференциальными условиями. Проблема определения включенных функций в интегро-дифференциальных условиях относится к обратным задачам. Восстановление функции, входящие в интегро-дифференциальные условия, проводится в три этапа. В на первом шаге интегродифференциальные условия приводятся к нормированному виду.

На втором этапе выбирались канонические задачи, по спектрам которых восстанавливались бы интегродифференциальные условия. На заключительном этапе была предложена процедура восстановления функции, входящие в интегродифференциальные условия.

В диссертации доказана возможность однозначного восстановления области определения оператора Штурма – Лиувилля на звездном графе по множеству спектров специальных канонических задач. В частном случае, когда область определения оператора задается граничными условиями, то для однозначного восстановления граничных коэффициентов достаточно указать только конечный набор собственных значений для каждой канонической задачи. Общее количество собственных значений, необходимых для однозначного восстановления граничных коэффициентов на звездообразном графе с $(m+1)$ ребром, не превышает $2(m+1)^2$. Представляется интересным вопрос об определении минимального числа собственных значений для однозначного определения граничных коэффициентов.

В диссертации подробно описаны первые два шага восстановления функций, входящих в интегродифференциальные условия. Третий этап конструктивного восстановления функций требует своего развития. Здесь была указана только схема восстановления. Модификация процедуры восстановления представляет интерес, поскольку растет интерес к проблеме, связанной с отождествлением граничных условий дифференциальных операторов на симметричных графоподобных пространствах.

Результат диссертации может быть использован для обнаружения краевых дефектов в конструкциях, состоящих из стержней, упруго связанных в один узел. Собственные частоты продольных колебаний таких конструкций могут быть измерены техническими датчиками. На основании найденных собственных частот, применяя результаты данной диссертации, можно выявить граничные повреждения. Результаты этой диссертации носят теоретический характер, но в будущем они могут быть доведены до конструктивно реализуемых алгоритмов для инженеров.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Morel J.-M., Teissier B. Lecture Notes in Mathematics // In book: Spectral analysis on graph-like spaces. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. – P. 1-431.
- 2 Ozawa S. Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian // Duke Math. J. – 1981. – Vol. 48. – P. 767-778.
- 3 Post O. First order approach and index theorems for discrete and metric graphs // Ann. Henri Poincaré. – 2009. – Vol. 10. – P. 823-866.
- 4 Post O. Spectral analysis of metric graphs and related spaces // In book: Limits of group graphs in theory. – Berlin, Germany: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2009. – P. 109-140.
- 5 Ballmann W., Brüning J., Carron G. Regularity and index theory for Dirac-Schrödinger systems with Lipschitz coefficients // J. Math. Pures Appl. – 2008. – Vol. 9, №89. – P. 429-476.
- 6 Post O. Equilateral quantum graphs and boundary triples // <https://arxiv.org/pdf/0712.1501v2.pdf>. 25.04.2020.
- 7 Kuchment P. Quantum graphs: II. Some spectral properties of quantum and combinatorial graphs // J. Phys. A. – 2005. – Vol. 38. – P. 4887-4900.
- 8 Baker M., Rumely R. Harmonic analysis on metrized graphs // Canad. J. Math. – 2007. – Vol. 59. – P. 225-275.
- 9 Kuchment P. Quantum graphs: an introduction and a brief survey // <file:///C:/Users/Tukeyeva/AppData/Local/Temp/0802.3442.pdf>. 25.04.2020.
- 10 M. Harmer, Hermitian symplectic geometry and extension theory // J. Phys. A. – 2000. – Vol. 33. – P. 9193-9203.
- 11 Gaveau B., Okada M. Differential forms and heat diffusion on one-dimensional singular varieties // Bull. Sci. Math. – 1991. – Vol. 115. – P. 61-79.
- 12 Fulling S., Kuchment P., Wilson J.H. Index theorems for quantum graphs // J. Phys. A. – 2007. – Vol. 40. – P. 14165-14180.
- 13 Kottos T., Smilansky U. Quantum chaos on graphs // Phys. Rev. – 1997. – Vol. 79. – P. 4794-4797.
- 14 Pankrashkin K. Spectra of Schrödinger operators on equilateral quantum graphs // Lett. Math. Phys. – 2006. – Vol. 77. – P. 139-154.
- 15 Post O. Asymptotics of spectra of Neumann Laplacians in thin domains // Advances in differential equations and mathematical physics: UAB internat. conf., Differential Equations and Mathematical Physics. – Birmingham, AL, 2002. – P. 199-213.
- 16 Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0; 1)$ // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 144, №5. – С. 981-984.
- 17 Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. – 1982. – №6. – С. 12-21.

- 18 Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Известия вузов СССР. Математика. – 1964. – №2. – С. 82-93.
- 19 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
- 20 Кангужин Б.Е., Даирбаева Г., Мадибайулы Ж. Идентификация граничных условий дифференциального оператора // Вестник КазНУ. – 2019. – Т. 103, №3. – С. 13-18.
- 21 Кангужин Б.Е. Функций задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде // Вестник КазНУ. – 2018. – №1(97) – С. 67-90.
- 22 Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника: учеб. пос. – СПб.: СПбгун и П.Т., 2010. – 181 с.
- 23 Astudillo M., Kurasov P., Usman M. RT-symmetric Laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness // Adv. math. phys. – 2015. – №4. – P. 1-9.
- 24 Ахтямов А.М., Садовничий В.А., Султанаев Я.Т. Обратная задача для пучка операторов с неразделенными граничными условиями // Евразийский математический журнал. – 2010. – Т. 1, №2. – С. 5-16.
- 25 Жанай А.Ж., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н. Об одной задаче на собственные значения дифференциального уравнения третьего порядка // Математическое моделирование процессов и систем: матер. 7-й междунар. молод. науч.-практ. конф. – Уфа, 2017. – С. 14-19.
- 26 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
- 27 Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 160 с.
- 28 Bekbolat B., Kanguzhin B., Tokmagambetov N. To the question of a multipoint mixed boundary value problem for a wave equation // News of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2019. – Vol. 326, №4. – P. 76-82.
- 29 Кангужин Б.Е., Кожатаева М.Ж. Формула Даламбера в случае многоточечной задачи // Докл. НАН РК. – 1998. – №5. – С. 29-33.
- 30 Kanguzhin B.E. Propagation of nonsmooth waves under singular perturbations of the wave equation // Kazakh Mathematical Journal. – 2021. – №21(2). – P. 6-15.
- 31 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Кошкарбаев Н. Об асимптотике по спектральному параметру решений дифференциальных уравнений на дереве с условиями кирхгофа в его внутренних вершинах // Математический журнал. – 2017. – Т. 17, №4(66). – С. 37-50.
- 32 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Сеитова А.А. Асимптотика собственных значений оператора двухкратного дифференцирования с регулярными по биркгофу граничными условиями на графе-звезде // Математический журнал. – 2018. – Т. 18, №2(68). – С. 107-124.

33 Kanguzhin B., Zhapsarbaeva L., Madibaiuly Zh. Lagrange formula for differential operators and self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree // Eurasian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 10, №1. – P. 16-29.

34 Borisov D.I., Konyrkulzhayeva M.N., Perturbation of threshold of the essential spectrum of the Schrodinger operator on the simplest graph with a small edge // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 329, №239(3). – P. 248-268.

35 Бондаренко Н.П. Дискретные математические модели: учеб. пос. – Саратов, 2015. – 52 с.

36 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1986. – 256 с.

37 Kanguzhin B.E. Weinstein Criteria and Regularized traces in Case of Transverse Vibrations of an Elastic String with Springs // Differential Equations. – 2018. – Vol. 54, №1. – P. 7-12.

38 Bekbolat B., Kanguzhin B.E., Tokmagambetov N. To the Question of a Multipoint Mixed Boundary Value Problem for a Wave Equation // News of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan. – 2019. – Vol. 4, №326. – P. 76-82.

39 Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики. – М.: МГУ, 1986. – 160 с.

40 Kanguzhin B., Aimal Rasa Gh.H., Kaiyrbek Zh. Identification of the Domain of the Sturm–Liouville Operator on a Star Graph // Journal Symmetry. – 2021. – Vol. 13. – P. 1210-1217.

41 Aimal Rasa Gh.H. Asymptotic Formulas for Weight Numbers of the Boundary Problem differential operator on a Star-shaped Graph // Turkish Journal of Computer and Mathematics Education. – 2021. – Vol. 12, №13. – P. 2184-2192.

42 Aimal Rasa Gh.H. The Analytical Nature of the Green's Function in the Vicinity of a Simple Pole // International Journal of Trend in Scientific Research and Development. – 2020. – Vol. 4, Issue 6. – P. 645-655.

43 Аймал Раса Г.Х., Аузерхан Г.С., Кобыркулжаева М.Н. Функция Грина задачи Дирихле дифференциального оператора на графе – звезде при m // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. – 2019. – Т. 101, №1. – С. 14-28.

44 Бекболат Б., Нурахметов Д.Б., Aimal Rasa Gh.H. и др. On the minimality of systems of root functions of the Laplace operator in the punctured Domain // News of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2019. – Vol. 326, №4. – P. 92-109.

45 Аймал Раса Г.Х., Аузерхан Г.С., Бейсенбай А.А., Аналитическая природа функции Грина в окрестности простого полюса // Вестник КазНУ им. аль – Фараби. – 2019. – Т. 104, №4. – С. 3-11.

46 Aimal Rasa Gh.H., Аузерхан Г.С. Inception of Green function for the third-order linear differential equation that is inconsistent with the boundary problem conditions // Вестник КазНУ им. аль – Фараби. – 2021. – Т. 110, №2. – С. 27-34.

47 Aimal Rasa Gh.H., Kanguzhin B. et al. Propagation of Waves Along the Graph-Star // National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2021. – Vol. 12. – P. 21-29.

48 Borg G. Eine Umkehrung der Storm-Liouville'schen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // Acta Math. – 1945. – Vol. 78. – P. 1-96.

49 Аймал Раса Г.Х., Аузерхан Г.С. Формула Лагранжа сопряженное дифференциальное выражение третьего порядка // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан: матер. междунар. конф., посв. 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. – Алматы, 2020. – С. 1-12.

50 Aimal Rasa Gh.H., Auzerkhan.G. Green's function unperturbed boundary value problem of the operator // Матер. междунар. конф. «Фараби элемі». – Алматы, 2020. – С. 1-10.

51 Аймал Раса Г.Х., Кани Ялда, Кангужин Б.Е. Формула Даламбера в случае негладких многоточечных задач для волнового уравнения // Современные проблемы физико-математических наук и междисциплинарные исследования: сб. матер. междунар. науч.-практ. онлайн-конф., посв. 70-летию А.Д. Сариева. – Атырау, 2021. – С. 14-19.

52 Aimal Rasa Gh.H., Auzerkhan G.S. Investigating and solving the boundary and initial value problem including the third order partial differential equation by spectral method // Modern problems of biotechnology: from laboratory research to production: proceed. 2 th internat. scient.-pract. conf. – Almaty, 2021. – P. 17-18.

53 Aimal Rasa Gh.H., Kanguzhin B.E., Kaiyrbek Z. D'Alembert's Formula for the wave Equation on a Graph-Star // День работников науки Республики Казахстан: матер. традиц. междунар. апрельс. матем. конф., посв. 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. – Алматы, 2021. – С. 18-22.

55 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 330 с.

56 Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

57 Borg G. Eine Umkehrung der Storm-Liouville'schen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // Acta Math. – 1945. – Vol. 78. – P. 1-96.

58 Levitan B.M., Gasymov M.G. Determination of a differential equation by two of its spectra // Russ. Math. Surv. – 1964. – Vol. 19. – P. 1-63.

59 Plaksina O.A. Inverse problems of spectral analysis for the Storm-Liouville operators with nonseparated boundary conditions // Acta Math. – 1988. – Vol. 59. – P. 1-23.

60 Yurko V. Inverse problems for differential pencils on A-graphs // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 2017. – Vol. 25. – P. 819-828.

- 61 Kanguzhin B.E., Dairbaeva G., Madibaiuly Z. Uniqueness of the restoration of boundary conditions differential operator on a set of spectra // J. Math. Mech. Comput. Sci. – 2019. – Vol. 104. – P. 44-49.
- 62 Kanguzhin B.E., Dairbaeva G., Madibaiuly Z. Identification of boundary conditions of a differential operator // J. Math. Mech. Comput. Sci. – 2019. – Vol. 103. – P. 82-93.
- 63 Kanguzhin B.E. Recovering of two-point boundary conditions by finite set of eigenvalues of boundary value problems for higher order differential equations // UFA Math. J. – 2020. – Vol. 12. – P. 22-29.
- 64 Liu D.-Q., Yang C.-F. Inverse spectral problems for Dirac operators on a star graph with mixed boundary conditions // Math. Methods Appl. Sci. – 2021. – Vol. 44. – P. 10663-10672.
- 65 Sadovnichii V., Sultanaev Y.T., Akhtyamov A. The inverse problem of recovering the coefficients of a differential equations on a graph // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 2020. – Vol. 28. – P. 727-738.
- 66 Ao S.I., Gelman L. Electrical Engineering and Applied Computing. – London: Springer Science+Business Media, 2011. – 695 p.
- 67 Balakrishnan R., Ranganathan K.A Textbook of Graph Theory. – NY.: Springer Science+Business Media, 2012. – 273 p.
- 68 Sobolev A.V., Solomyak M. Schrodinger operators on homogeneous metric trees:spectrum in gaps // Rev. Math. Phys. – 2002. – Vol. 14. – P. 421-468.
- 69 Nurakhmetov D., Jumabayev S., Aniyarov A. et al. Symmetric Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions of Uniform Beams // Symmetry. – 2020. – Vol. 12. – P. 2097-3005.
- 70 Bondarenko N. Spectral analysis for the matrix Sturm – Liouville operator on a finite interval // Tamkang J. Math. – 2011. – Vol. 42, №3. – P. 305-327.
- 71 Freiling G., Yurko V.A. Inverse Sturm – Liouville problems and their applications. – NY.: Nova Science, 2001. – 305 p.
- 72 Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. Inequalities. – London: Cambridge University Press, 1934. – 456 p.
- 73 Moller M., Pivovarchik V. Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite – Biehler Functions, and their Applications. – Cham: Birkhauser, 2015. – 412 p.
- 74 Pivovarchik V. Inverse problem for the Sturm – Liouville equation on a star-shaped graph // Math. Nachr. – 2007. – Vol. 280, №1314. – P. 1595-1619.
- 75 Pokornyy Yu.V., Penkin O.M., Borovskikh A.V. et al. Differentsial'nye uravneniia na geometricheskikh grafakh (Differential Equations on Geometrical Graphs). – M.: Fizmatlit, 2004. – 272 p.
- 76 Joro T., Korhonen P. Extension of Data Envelopment Analysis with Preference Information. – London: Springer, 2014. – 597 p.
- 77 Yurko V.A. On recovering Sturm – Liouville operators on graphs // Math. Notes. – 2006. – Vol. 79, Issue 3(4). – P. 572-582.
- 78 Yurko V.A. Inverse spectral problems for differential operators on spatial networks // Russian Math. Surveys. – 2016. – Vol. 71, №3. – P. 539-584.

- 79 Yang C.-F., Huang Z.-Y., Yang X.-P. Trace formulas for Schrodinger systems on graphs // Turkish J. Math. – 2010. – Vol. 34, №2. – P. 181-196.
- 80 Pryadiev V.L., Kopytin A.V. On the laplacian spectrum on a graph with commensurable edges // Spectral and Evolutional problems: proced. of the Eleventh crimean autumn mathematical school sympos. – Simferopol, 2001. – P. 167-172.
- 81 Кангужин Б.Е. Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе // Вестник КазНУ. – 2018. – Т. 97, №1. – С. 67-90.
- 82 Соболев С.П. и др. Уравнения математической физики. – М.; Л.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит., 1950. – 424 с.
- 83 Kanguzhin B., Kaiyrbek Zh. et al. Identification of the Domain of the Sturm–Liouville Operator on a Star Graph // Symmetry. – 2021. – Vol. 13(7). – P. 1210-1-1210-15.
- 84 Кошляков Н.С. и др. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 768 с.
- 85 Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II // Диф. уравнения. – 2002. – Т. 38, №4. – С. 529-537.
- 86 Прядиев В.Л., Шаталов С.С. Правило параллелограмма для волновых уравнений на сетях. Визуализация решений // Современные методы теории функций и смежные проблемы: матер. Воронеж. зимн. матем. шк. – Воронеж, 2003. – С. 206-207.
- 87 Самарский А.А. и др. Численные методы математической физики. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
88. Коныркулжаева М.Н. Вычетные и спектральные разложения дифференциальных операторов второго порядка на графах // диссертация, Алматы, КазНУ 2019, -138 с.