ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

«Қорғауға жіберілді»
«Математикалық және компьютерлік пішімдеу»
кафедрасы меңгерушісі Исахов А.А.

БІТІРУ ЖҰМЫСЫ

Тақырыбы: **«АУА РАЙЫ БОЛЖАМЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІН ЗЕРТТЕУ»**

6М070500 - «Математикалық және компьютерлік пішімдеу» мамандығы

Орындаған Сайлауова Д.А.

Ғылыми жетекші
ф.-м.ғ.к, доцент Байтуленов Ж.Б.

Норма бақылаушы Карибаева М.

Алматы, 2018

Түйін

Бітіру жұмысы 60 б., 34 қолданылған әдебиеттерден тұрады.

Негізгі сөздер тізімі: термогидродинамика, априорлы бағалар, жалпылама шешім, аз шамалы параметр, термогидродинамика, шек, тізбек, интегралдық теңдік.

Зерттеу обьектісі: сығылмайтын біртексіз тұтас орта қозғалысының стационарлық емес сызықсыз температуралық пішімі.

Зерттеу мақсаты: сығылмайтын біртексіз тұтас ортаның стационарлық емес сызықсыз температуралық пішімі үшін жуық диффузиялық пішімді зерттеу.

Зерттеу әдістері: априорлы бағалау алу әдісі, жуық шешімдер тізбегін құру Галеркин әдісі, интегралдық теңдіктерде шекке көшу .

Алынған нәтижелер: сығылмайтын біртексіз тұтас ортаның стационарлық емес сызықсыз температуралық диффузиялықө көмекші есептің жалпылама, әлсіз жалпылама және күшті шешімдерінің бар болуы мен жинақталуы дәлелденген. Шешімдердің бірқалыпты бағалары алынған.

Қолдану салалары: бұл жұмыс теориялық мағынаға ие. Алынған нәтижелер ауа райын болжау, қоршаған ортаны қорғау, экология және т.б. салалары есептерін зерттеуде қолдануға болады. Сонымен бірге, жұмыстың нәтижелері мен зерттеу методикасы жоғары курс студенттері мен магистранттар үшін оқу процесінде қолдану таба алады.

Реферат

Дипломная работа состоит из 60 стр., 34 использованных литератур.

Ключевые слова: термогидродинамика, обобщенные решения, априорные оценки, последовательности, интегральные тождества, переход к пределу.

Объект исследования: нестационарная нелинейная модель термогидродинамики.

Цель исследования: исследование приближенной диффузионной нестационарной нелинейной модели термогидродинамики.

Методы: метод получения равномерных априорных оценок, метод Галеркина, методы решений интегральных уравнений, переход к пределу по выбранным последовательностям.

Результаты: при исследование приближенной диффузионной нестационарной нелинейной модели термогидродинамики, используемой для процессов прогноза погоды, доказаны существование и сходимость обобщенного и сильного решений. А также получены равномерные априорные оценки решений.

Применение: предлагаемая дипломная работа имеет теоретическое значение. Полученные результаты работы могут найти применение в прогнозировании погоды, в охране окружающей среды и т.д. Вместе с тем, описанная методика исследования и результаты работы могут быть применены для чтения спецкурсов для бакалавров последнего курса и магистрантов по соответствующей специальности.

Abstract

Graduate work 60 pages, 34 sources used.

Keywords: thermohydrodynamics, generalized solutions, a priori estimates, sequences, integral identities, passage to the limit.

Object of investigation: nonstationary nonlinear model of thermohydrodynamics.

The purpose of the study: Investigation of the approximate diffusion nonstationary nonlinear model of thermohydrodynamics.

Methods: the method of obtaining uniform a priori estimates, the Galerkin method, the methods of solving integral equations, the transition to the limit with respect to selected sequences.

Results: The existence and convergence of generalized and strong solutions are proved in an investigation of the approximate diffusion nonstationary nonlinear model of thermohydrodynamics used for weather prediction processes. We also obtain uniform a priori estimates of the solutions.

Application: the proposed thesis work has a theoretical value. The obtained results of the work can find application in weather forecasting, environmental protection, etc. At the same time, the described research methodology and the results of work can be applied to read special courses for bachelors of the last year and undergraduates in the relevant specialty.

Мазмұны

КІРІСПЕ

Тақырыптың маңыздылығы. Ауа райын болжаудың үлкен практикалық маңызы бар екені белгілі. Ауа райымен байланысты процесстер ұшу аппараттарының қозғалысы, экология, метерология, әскери қорғаныс және тағы да басқа салаларда кеңінен ескеріледі. Мұндай процестерді зерттеу термогидродинамиканың әртүрлі математикалық моделдерін қарастыруға алып келеді. Айта кетсек, атмосфералық немесе термогидродинамикалық моделдердің негізі болып қозғалыс, жылу алмасу, үзіліссіздік, ылғалдылық және атмосфералық қоспалар алмасуы теңдеулері болып табылады. Бұл теңдеулер физикалық негізгі заңдылықтардың (импульс, энергия және масса сақталу заңдарының) математикалық өрнектелуі болып табылады.

Теориялық термогидродинамика бұрыннан бері әртүрлі салалардың ғалымдарының көңілін өзіне аударып отыр. Оның эксперименттерінің көрінісі және айқындығы, негізгі теңдеулерінің салыстырмалы қарапайымдылығы және есептердің қойылымының анықтылығы біртұтас орта болып жатқан динамикалық процесстердің сандық және сапалық бейнесін толық алуға үміт берген сияқты болған. Бірақ, шын мәнінде, есептердің бұл қарапайымдылығы жалған болып шықты. Мысалы, қазірге дейін үлкен Рейнольдс сандары үшін Навье-Стокс теңдеулері жақсы жан-жақты зерттелінбеген. Себебі, бұл теңдеулер үшін кез келген уақыт аралығында және зерттелу облысының кез келген өлшемі мен кез келген тегіс берілген шамалар үшін бірмәнді шешімділігі сұрағы әлі жауабын тапқан жоқ. Бұл жолда әртүрлі әдістемелер және нәтижелер бар. Мысалы, Хопьф бұл теңдеулерге қойылған алғашқы-шекаралық есептер үшін кез келген уақытта әлсіз шешімдерінің бар екенін дәлелдеді. Бірақ жалғыздығы алынбады.

Жоғарыда аталған математикалық моделдердің шешімділігі жөнінде негізгі еңбектер ретінде С.Н.Антонцев, А.В.Кажихов, В.Н.Монахов[1] пен О.А.Ладыженская[2] монографияларын көрсетуге болады. Гидродинамиканың диффузиялық моделдерін зерттеу саласында Кажихов А.В., Смагулов Ш.С. [3], [4] еңбектерін атауға болады.

Жалпы алғанда, термогидродинамиканың Навье-Стокс типті теңдеулерін есептеу және зерттеу үлкен қиындықтарға әкеп соғады және жаңа теориялар мен әдістерді талап етеді .Мысалы, осындай типтегі теңдеулер жүйесі Коши-Ковалевский типті жүйе емес және ең бір тиімді сандық әдісті – бөлшек қадам әдісін қолдануға мүмкіндік бермейді .Сондықтан сұйықтықтың моделдерін аз шамамен аппроксимациялау есебін зерттеу маңызды қадам болып табылады. Мұнда, бұл бағытта белгілі жұмыстарды атамағанда,Ш.С. Смагуловтың [5]-[6] еңбектерін айта кетуімізге болады.

Сонымен бірге, қазіргі кезде ауа райы болжамы мен атмосфераның жалпы циркуляциясының әртүрлі математикалық моделдері құрылған және сәйкес сандық зерттеулер жүргізілген [7–13].

Ал біртексіз сығылмайтын ортаның температуралық диффузиялық емес моделін зерттеуге [14] жұмыс арналған.

Бұл дипломдық жұмыс біртексіз сығылмайтын ортаның температуралық диффузиялық емес моделінің «жеңілдетілген» түрін диффузиялық моделмен жуықтауға арналған. Жуықтама пішім үшін шешімдердің бар болуы мен диффузия коэффициентін бейнелеп тұрған параметрдің нолге ұмтылған кезде негізгі есеп шешіміне жинақталуы сұрақтары зерттеледі.

Жұмыстың мақсаты. Сығылмайтын біртексіз тұтас ортаның бір диффузиялық емес стационарлық емес моделіне үшін жасанды диффузиялы жуықтама моделін тұрғызу. Сонымен бірге, жуықтама моделдің шешімділігі мен алғашқы диффузиялық моделге жақындығын зерттеу.

Зерттеу әдістемесі. Бұл бітіру жұмыста зерттеліп отырған есептер Хопф жалпылама функциялары кеңістігінде қарастырылады. Шешімдердің бар болуы Галеркин әдісі арқылы және жуық шешімдер тізбегі үшін алынған априорлы бағалау әдісінің негізінде дәлелденеді. Жуықтама есептің шешімдерінің негізгі есеп шешіміне жинақталуы интегралдық теңдіктерде шекке көшу арқылы жүзеге асады.

Нәтижелері мен жаңалығы. Сығылмайтын біртексіз ортаның температуралық пішімі үшін жуықтама есебінің әлсәз жалпылма, жалпылама және күшті шешімдерінің бар болуы мен жинақталуы дәлелденді. Жаңалығы - бұрынғы жұмыстарға қарағанда мұнда зерттеу облысы - 3 өлшемді.

Жұмыстың құрылымы. Бұл дипломдық жұмыс кіріспеден, негізгі бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Негізгі бөлім 2 бөлімнен тұрады: бірінші бөлімінде жұмыстың нәтижелерін алу үшін қажет болған көмекші мәліметтер келтірілген, ал екінші бөлімде жуықтама есеп бойынша жүргізілген зерттеулер барысы көрсетіледі.

Нәтижелердің ғылыми негіздемесі. Бұл бітіру жұмысының нәтижелері мен қорытындылары теоремалар мен леммалар түрінде айқындалған, олар қатаң математикалық түрде дәлелденген. Бұл жұмыстың нәтижелері осы саладағы басқа да жұмыстардың нәтижелері мен зерттеулерімен үйлесім табады.

1 Көмекші мәліметтер

Бұл бөлімде біз қарастырып отырған есептерді зерттеуге қажет болатын мәліметтерге шолу жасаймыз.

1.1 Негізгі функционалдық кеңістіктер

Ω және Q арқылы R^n евклидті кеңістігінің шенелген аймақтарын белгілейік. $\overline{\Omega}$ - Ω тұйықталуы, *x* және *t* Ω немесе Q-дің нүктелерінің координаттары болсын. Әдетте, $x=(x_1, x_2,...,x_n)$ - R^n-дегі декарттық координаталар, t –уақыт. Барлық функциялар Лебег бойынша нақты жергілікті қосындыланатын, ал туындылар Л.С.Соболев түсінігі бойынша жалпылама деп есептейік. Бізге әртүрлі функциональдық кеңістіктер қажет болады [1], [2].

$L_p(\Omega)$, $(1\le p\le\infty)$ - p көрсеткішті Ω-да қосындыланатын нақты мәнді функциялар жиыны. $L_p(\Omega)$ - да норма былай анықталады:

$$\|f\|_{L_p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |f|^p d\Omega\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\le p\le\infty.$$

$p=\infty$ болған жағдайда $L_\infty(\Omega)$ кеңістігінің нормасы

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)}=\overline{\lim_{p\to\infty}}\|f\|_{L_p(\Omega)}$$

Ал $p=2$ болғанда $L_2(\Omega)$ кеңістігі гильберттік кеңістік болады да оның скаляр көбейтіндісі былай анықталады:

$$(f,g)_{2,\Omega}=\int_\Omega f\cdot g d\Omega.$$

Көп жағдайда, $1\le p\le\infty$ үшін $L_p(\Omega)$ -нің нормасын қысқаша $\|f\|_{p,\Omega}$ деп белгілейді, ал $p=2$ – жай ғана $\|f\|$ етіп белгілейді.

Қоса есептегенде *l* (*l* –натурал сан) ретке дейінгі жалпылама туындылары $L_p(\Omega)$, $1\le p\le\infty$ кеңістігінде жататын функциялар жиынын $W_p^l(\Omega)$ арқылы белгілейік. Оның нормасы:

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)}=\|f\|_{p,\Omega}^l=\sum_{|\alpha|=0}^{l}\sum_{(\alpha)}\|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)},$$

мұнда $\sum\limits_{(\alpha)}$ белгісі $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ ретті туындыларының қосындысын білдіреді.

Егер p = 2 болса, онда $W_2^l(\Omega)$- гильберт кеністігі және оның скаляр көбейтіндісі:

$$(f, g)_{2,(\Omega)}^l = \sum_{|k|=0}^{l} \sum_{(k)} \left(D^k f, D^k g\right)_{2,\Omega}.$$

l = 0 кезінде $W_2^l(\Omega)$ әдетте $L_2(\Omega)$ арқылы белгіленеді. $C(\Omega)$ кеністігі - $\overline{\Omega}$-да үзіліссіз функциялар жиыны. Нормасы:

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{\overline{\Omega}} |f|$$

$C^\alpha(\Omega)$, $0 \le \alpha \le 1$ - көрсеткіші a болатын Гельдер бойынша үзіліссіз функциялар жиыны. Норма в $C^\alpha(\Omega)$ - да норма келесі қосындымен беріледі:

$$\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} = \|f\|_{C(\Omega)} + H^\alpha(f),$$

мұнда $H^\alpha(f)$ Гельдер тұрақтысы деп аталады ($\alpha = 1$ болғанда - Липшиц тұрақтысы),

$$H^\alpha(f) = \sup_{x_1, x_2 \in \Omega} \left\{ f(x_1) - f(x_2) \cdot |x_1 - x_2|^{-\alpha} \right\}.$$

$C^\alpha(\Omega)$-дағы норма қысқаша $|f|_{\alpha,\Omega}$ арқылы белгіленеді. $\alpha = 0$ болғанда $C^0(\Omega)$ кеңістігі $C(\Omega)$ -мен бара-бар және $\|f\|_{C(\Omega)} = |f|_{0,\Omega}$.

$C^{k+\alpha}(\Omega)$, k – натурал сан, $0 \le \alpha \le 1$ - реті k –ға дейінгі туындылары көрсеткіші a-ға тең Гельдер бойынша үзіліссіз функциялар жиыны:

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\Omega)} = |f|_{k+\alpha,\Omega} = \sum_{|m|=0}^{k} \sum_{(m)} \left|D^m f\right|_{0,\Omega} + \sum_k H^\alpha\left(D^k f\right).$$

Сонымен бірге кеңістіктік айнымалысы және уақыт айнымалысы бойынша әртүрлі дифференциалдық қасиеттері бар функциялар кеңістігі де қолданылады. Егер $x=(x_1,...,x_n)$ – кеңістіктік координаттар, $x \in \Omega \subset R^n$, $t \in (0,T)$, t – уақыт болса, онда $Q = \Omega \times (0,T)$ деп белгілейік.

$L_{p,q}(Q)$, $1 \le p, q \le \infty$ - нормасы келесідей функциялар кеңістігі:

$$\|f\|_{L_{p,q}(\Omega)}=\|f\|_{p,q,Q}=\left(\int_0^T\left(\int_\Omega |f(x,t)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$p\ge 1$, l – натурал сан, $W_p^{2l,l}(Q)$ кеңістігі $2r+|s|\le 2l$ шартын қанағаттандыратын кез-келген *r* и *s*=(*s₁*,...,*sₙ*) үшін $L_p(Q)$-ге тиістілі $D_t^r D_x^s f$ түріндегі жалпылама туындылары бар $L_p(Q)$-дің элементтерінен тұрады. $W_p^{2l,l}(Q)$ -де норма

$$\|f\|_{W_p^{2l,l}(\Omega)}=\sum_{j=0}^{2l}\sum_{(2r+|s|=j)}\left\|D_t^r D_x^s f\right\|_{p,Q}.$$

теңдігімен анықталады.

$C^{k+\alpha,m+\beta}(Q)$ - *x* айнымалысы бойынша *k* –ретті туындылары, ал уақыт айнымалысы бойынша *m* –ретті туындылары бар функциялардың жиыны (*k*,*m* – теріс емес бүтін сандар), сонымен бірге, Гельдер бойынша бұл туындылар: *x* бойынша *a* көрсеткішпен, $0\le\alpha\le 1$, ал *t* бойынша $\beta, 0\le\beta\le 1$, көрсеткішпен үзілліссіз

$$\|f\|_{C^{k+\alpha,m+\beta}(Q)}=\sum_{|l|=0}^{k}\sum_{(l)}\left|D_x^l f\right|_{0,Q}+\sum_{j=1}^{m}\left|D_t^j f\right|_{0,Q}+$$

$$+H_x^\alpha\left(D_x^k f\right)+H_t^\beta\left(D_x^k f\right)+H_x^\alpha\left(D_t^m f\right)+H_t^\beta\left(D_t^m f\right).$$

Мұнда $D_x^l f$ - x бойынша $|l|=l_1+...+l_n$ - ретті туынды, $D_t^j f$ - t бойынша *j*-ретті туынды, H_x^α, H_t^β символдары арқылы *x* және *t* бойынша гельдерлік үзіліссіздік тұрақтылары белгіленген, яғни

$$H_x^\alpha(u(x,t))=\sup_{\substack{x_1,x_2\in\Omega,\\ t\in(0,T)}}\left\{|u(x_1,t)-u(x_2,t)|\cdot|x_1-x_2|^{-\alpha}\right\},$$

$$H_t^\beta(u(x,t))=\sup_{\substack{x\in\Omega\\ t_1,t_2\in(0,T)}}\left\{|u(x,t_1)-u(x,t_2)|\cdot|t_1-t_2|^{-\beta}\right\}.$$

Ары қарай, $H_x^\alpha\left(D_x^k f\right)$ - x бойынша $|k|$ ретті барлық туындылардың Гельдер тұрақтыларының қосындысы, $H_t^\beta\left(D_x^k f\right)$ - *t* бойынша Гельдер тұрақтыларының қосындысы.

Айта кету керек, жоғарыда көрсетілген кеңістіктердің барлығы толық, яғни банахтық кеңістіктер.

Кей кезде $x \in \Omega$ және $t \in (0,T)$ айнымалыларынан тәуелді функциялар мәндері Ω кеңістігінде анықталған Банах кеңістігіндегі t аргументінің функциялары ретінде қарастырылады. Мысалы, $L_q\left(0,T,W_p^l(\Omega)\right)$ - $(0,T)$-да анықталған және мәндері $W_p^l(\Omega)$-де жататын $f(t)$ функцияларының жиыны. Оның нормасы

$$\| f \|_{L_q\left(0,T,W_p^l(\Omega)\right)} = \left(\int_0^T \| f(t) \|_{W_p^l(\Omega)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} .$$

$L_q\left(0,T,L_p(\Omega)\right)$ және $L_{p,q}(Q), Q = \Omega \times (0,T)$ кеңістіктері біріне-бірі сәйкес келеді.

Сол сияқты $C^\beta\left(0,T,C^\alpha(\Omega)\right)$ - мәндері $C^\alpha(\Omega)$ -де, $0 \le \alpha \le 1$ жататын [0,T] –де анықталған және β, $0 \le \beta \le 1$ көрсеткішті Гельдер бойынша үзіліссіз функциялар. $C^\beta\left(0,T;C^\alpha(\Omega)\right)$ және $C^{\alpha,\beta}(\Omega)$ кеңістіктері арасында келесі қатынастар орынды:

$$C^\beta\left(0,T;C^\alpha(\Omega)\right) \subset C^{\alpha,\beta}(Q), \quad C^{\alpha,\beta}(Q) \subset C^{\lambda\beta}\left(0,T;C^{(1-\lambda)\alpha}(\Omega)\right),$$

мұнда $0 < \lambda < 1$.

Кей жағдайларда $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ функциялар классы қолданылады. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ Гильберт кеңістігі - $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің Ω-да финитті ақырсыз дифференциалданатын $C^\infty(\Omega)$ жиыны тығыз орналасатын ішкі кеңістігі. Мұнда *u(x)* функциясының Ω-да финиттілігі дегеніміз - сол *u(x)*-тің Ω-ның шекарасынан оң анықталған қашықтықта орналасқан, Ω-ның қандай-да бір шенелген ішкі аймағында ғана 0-ден өзгеше деген сөз.

1.2 Арнайы теңсіздіктер

Бұдан былай қолданылатын кейбір теңсіздіктерді келтірейік [1].

1. Коши теңсіздігі.

$$\left| \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \eta_j \right| \le \left(\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \eta_i \eta_j \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Бұл теңсіздік кез-келген $\vec{\xi} \in R^n$, $\vec{\eta} \in R^n$ үшін теріс емес кез-келген α_{ij} формасы үшін орындалады.

2. Юнг теңсіздігі.

$$ab \le \frac{1}{p}\varepsilon^p a^p + \frac{1}{q}\varepsilon^{-q} b^q, \qquad \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1.$$

Кез-келген $a \ge 0, b \ge 0$ нақты сандары үшін орынды.

3. Гельдер теңсіздігі.

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \le \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p \ge 1, q \ge 1.$$

$x \in \Omega$ және $t \in (0,T)$ айнымалылары бойынша анизатропты қасиетті және $Q = \Omega \times (0,T)$ аймағында анықталған *f* және *g* функциялары үшін бұл теңсіздікті келесі түрде жазуға болады:

$$\|f \cdot g\|_{q,r,Q} \le \|f\|_{\lambda q, \mu r, Q} \cdot \|g\|_{\lambda q, \mu r, Q},$$

мұнда $q \ge 1, r \ge 1, \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = 1, \quad \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} = 1, \quad \lambda \ge 1, \mu \ge 1.$

4 Гронуолл теңсіздігі.

Егер $(0,T)$ –да теріс емес функция $y(t)$ мына теңсіздікті қанағаттандырса

$$y(t) \le C + \int_0^t [A(\tau) \cdot y(\tau) + B(\tau)] d\tau.$$

мұнда $C = const > 0$, $A(t)$, $B(t)$ – $L_1(0,T)$ жиынының берілген теріс емес функциялары, онда келесі бағалау орын алады:

$$y(t) \le \exp\left\{\int_0^t A(\tau) d\tau\right\} \cdot \left[C + \int_0^t B(\tau) \cdot \exp\left\{-\int_0^\tau A(s) ds\right\} d\tau\right].$$

Сонымен бірге, $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінің шешімділік туралы негізгі теоремалар мен шекаралық есептердің шешімінің жалғыздығын дәлелдеуге қажетті болатын кейбір теңсіздіктерін келтірейік. Бұл теңсіздіктерден $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-ның $L_q(\Omega)$-ға тиістілігі туралы қағидаларды қорытып шығаруға болады[1].

Лемма 1.1. Кез-келген $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1$, $\Omega \in R^2$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \le 4\cdot\|u\|_{2,\Omega}^2\cdot\|u_{x_1}\|_{2,\Omega}\cdot\|u_{x_2}\|_{2,\Omega} \le 2\cdot\|u\|_{2,\Omega}^2\cdot\|u_x\|_{2,\Omega}^2,$$

мұнда $\|u\|_{4,\Omega} \equiv \left(\int\limits_\Omega |u|^4\,dx\right)^{\frac{1}{4}}, \quad |u_x| \equiv \left(\sum_{k=1}^{2} u_{x_k}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \equiv \int\limits_\Omega |u_x|^2\,dx \equiv \int\limits_\Omega u_x^2\,dx.$

Лемма 1.2. Кез-келген $u(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\Omega\in R^3$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \le 8\cdot\|u\|_{2,\Omega}\cdot\|u_{x_1}\|_{2,\Omega}\cdot\|u_{x_2}\|_{2,\Omega}\cdot\|u_{x_3}\|_{2,\Omega} \le \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\|u\|_{2,\Omega}\cdot\|u_x\|_{2,\Omega}^3.$$

Лемма 1.3. Кез-келген $u(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\Omega\in R^3$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\|u\|_{6,\Omega} \le (48)^{1/6}\cdot\|u_x\|_{2,\Omega}.$$

Лемма 1.4 . Кез-келген $u(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\Omega\in R^3$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\int\limits_\Omega u^2\,dx \le \frac{1}{\mu_1}\int\limits_\Omega u_x^2\,dx,$$

мұнда μ_1 саны – Ω аймағының нөлдік емес шекаралық шарт кезіндегі Δ операторының ең кіші өзіндік мәні, яғни

$$-\Delta v = \mu\cdot v, \quad v|_S = 0$$

есебінің нөлдік емес шешімі бар болатындай сандардың ең кішісі. Шенелмеген Ω аймағы үшін (1.2.9) теңсіздігі орындалмауы да мүмкін (ондай аймақ үшін $\mu_1 = 0$ болып қалуы мүмкін).

Кеңістік өлшемі 3-тен аспаған жағдайда $u(x)\in W_2^2(\Omega)$ функциялары, басқаша айтқанда, үзілліссіз функциялар болып табылатыны белгілі. Олар үшін

$$\max_{x\in\Omega}|u(x)| \le C(\Omega)\cdot\|u\|_{2,\Omega}^{(2)},$$

теңсіздігі орынды, мұнда *C* тұрақтысы Ω аймағының өлшеміне ғана тәуелді.

1.3 Тиістілік теоремалары

Функционалдық кеңістіктердің тиістілігі теориясынан кейбір теңсіздіктерді келтірейік [1], [2].

Лемма 1.5. Ω - шекарасы Г болатын бөлшекті-тегіс R^n –дегі шенелген аймақ болсын, ал Γ_r - Ω-ның қандай-да бір r-өлшемді тегіс гипербетпен қиылысуы болсын, $r \le n$. (Дербес жағдайда, егер $r=n$ болса, онда $\Gamma_r = \Omega$, егер $r=n-1$ болса Γ_r ретінде $\Gamma = \partial\Omega$ алуға болады). Онда кез-келген $f \in W_p^1(\Omega)$ функциясы үшін ($l \ge 1$ - натурал сан, $p > l$, егер $n > pl$, $r > n - pl$) Γ_r –де $f|_{\Gamma_r}$ -дің көлеңкесі бар болады және

$$f|_{\Gamma_r} \in L_q(\Gamma_r),\ q \le \frac{pr}{n-pl},\quad \left\| f|_{\Gamma_r} \right\|_{Lq(\Gamma_r)} \le C \cdot \|f\|_{W_p^l(\Omega)},$$

(егер $n = pl$ болса, онда q кез-келген, $q < \infty$). Егер $pl>n$ болса, онда f - $C^{k+\alpha}(\Omega)$-ға тиісті және Гельдер бойынша үзілліссіз функция, мұнда егер $\frac{n}{p}$ бүтін емес болса, онда $k = l - 1 - \left[\frac{n}{p}\right]$, $a = 1 + \left[\frac{n}{p}\right] - \frac{n}{p}$, ал $\frac{n}{p}$ бүтін болса, онда $a<1$, сонымен бірге

$$|f|_{k+a,\Omega} \le C \cdot \|f\|_{p,\Omega}^{(l)}.$$

Мұнда $\left[\frac{n}{p}\right]$ символы арқылы $\frac{n}{p}$ санының бүтін бөлігі белгіленген, ал C тұрақтылары f –тен тәуелсіз.

Айта кетер нәрсе, $n \ge pl$ және $q < \frac{pr}{n-pl}$ кезінде $W_p^l(\Omega)$ кеңістігінің $L_q(\Gamma_r)$-ке тиістілігі компактылы. Егер $pl > n$ болса, онда $C^k(\Omega)$-ға компакты тиісті.

$W_p^l(\Omega)$ және $L_q(\Omega)$ кеңістіктерінің арасындағы дәлірек тәуелділіктерді интерполяциялық теңсіздіктер деп аталатындар айқындайды. Осындай қатынастардың 2 класын келтірейік.

Лемма 1.6. Егер $\Omega \subset R^n$ және $f \in W_p^l(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, $1 < p, q \le \infty$ болса, онда $f \in W_r^k(\Omega)$ және

$$\|f\|_{W_r^k} \le C \cdot \|f\|_{W_p^l}^{a} \cdot \|f\|_{L_q}^{1-a},$$

мұнда $\frac{1}{r} = \frac{k}{n} + a \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{l}{n}\right) + \frac{1-a}{q},\ \frac{k}{l} \le a \le 1.$

Бұл ережеге бағынбайтын жағдай $l-k-\frac{n}{p}$ теріс емес бүтін, ал $1<p<\infty$ болғанда. Ол кезде a < 1 болады. Бұл кезде Ω міндетті түрде шенелген емес, мысалы $\Omega=R^n$ болуы мүмкін.

Лемма 1.7. Егер $u(x)\in \overset{0}{W}{}_m^1(\Omega)$ немесе $u(x)\in W_m^1(\Omega)$, бірақ $\int\limits_{\Omega}u(x)dx=0$ болса, онда

$$\|u\|_{q,\Omega}\le C\cdot\|\nabla u\|_{m,\Omega}^{a}\cdot\|u\|_{r,\Omega}^{1-a}, \qquad (1.1)$$

мұнда $a=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{n-m}{nm}\right)^{-1}$, және егер m < n, $r\le\frac{mn}{n-m}$ болса, онда $q\in\left[r,\frac{mn}{n-m}\right]$, ал егер $r>\frac{mn}{n-m}$ болса, онда $q\in\left[\frac{mn}{n-m},r\right]$. Егер $m\ge n$ болса, онда $q\in[r,\infty]$, сонымен бірге $m>n$ үшін (1.1) теңсіздігі $q=\infty$ үшін де дұрыс болады.

Ниренберг-Гальярдо[1] теңсіздіктері деп аталатын интерполяциялық қатынастардың бір түрі $L_p(\Omega)$ және $C^{k+a}(\Omega)$ кеңістіктерін байланыстырады.

$$|f|_q=\begin{cases}\|f\|_{q,\Omega}, & q>0,\\ \|f\|_{C^{k+a}(\Omega)}, & q<0,\end{cases}$$

деп алайық, мұнда $k=\left[-\frac{n}{p}\right]$, $a=-\frac{n}{p}-k$.

Лемма 1.8. λ,μ,ν - кез-келген сандар болсын, $-\infty\lambda\le\mu\le\nu<\infty$. Онда

$$|f|_{1/\mu}\le C\cdot|f|_{1/\lambda}^{\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda}}\cdot|f|_{1/\nu}^{\frac{\mu-\mu}{\nu-\lambda}} .$$

Дербес жағдайда, бұдан мына теңсіздікті аламыз

$$\|f\|_{C^k(\Omega)}\le C\cdot\|f\|_{C^{m+a}(\Omega)}^{a}\cdot\|f\|_{C(\Omega)}^{1-a},\ 0\le k\le m,\ 0<a<1,\ a=k(m+a)^{-1}.$$

1.4 Анализдің кейбір теоремалары

B банах кеңістігінің К жиыны компакты деп аталады, егер ондағы кез-келген тізбектен жинақталатын тізбекше бөліп алуға болатын болса.

Енді кейбір банах кеңістіктеріндегі жиындардың компактылық белгілерін көрсетейік.

Лемма 1.9. $C(\Omega)$-дағы функциялардың жиыны К сондағы функциялардың барлығы бірқалыпты шенелген және тең дәрежелі үзіліссіз болғанда ғана компактылы, яғни

$$\exists k_0 > 0 : \|u\|_{C(\Omega)} \le k_0,\ \forall u \in K;$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x_1 \in \overline{\Omega}, |x_1 - x_2| < \delta, \forall u \in K \Rightarrow |u(x_1) - u(x_2)| < \varepsilon .$$

$1 < p < \infty$ болғанда $L_p(\Omega)$-дағы қандай-да бір К жиынының компактылы болуы үшін сол К жиынының функциялары $L_p(\Omega)$-ның нормасы бойынша бірқалыпты шенелген және тең дәрежелі үзіліссіз болуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$\exists\ k_1 > 0 : \|u\|_{p,\Omega} \le k_1,\ \forall u \in K;$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \Delta,\ |\Delta| < \delta, \forall u \in K \Rightarrow \|u_\Delta - u\|_{p,\Omega} < \varepsilon,$$

мұнда $u_\Delta(x) = u(x + \Delta),\ u_\Delta(x) \equiv 0,\ x + \Delta \notin \Omega$ үшін.

$C^a(\Omega),\ 0 \le a < 1$, кеңістігінде $\beta > \alpha$ үшін $C^\beta(\Omega)$ кеңістігі нормасы бойынша бірқалыпты шенелген функциялар жиыны компактылы болады.

Сол сияқты әлсіз компактылық ұғымы да осылайша анықталады: В банах кеңістігінің К жиыны әлсіз компактылы деп аталады, егер оның кез-келген тізбегінде әлсіз жинақталатын тізбекше бар болса.

Лемма 1.4.2. Рефлексивті банах кеңістігінің шенелген жиыны әлсіз компактылы, және сонымен бірге, егер u - $\{u_n\}$ тізбегінің әлсіз шегі болса, онда $\|u\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \|u_n\|$.

Лемма 1.10. $L_\infty(\Omega)$ кеңістігіндегі шенелген тұйық шар *- әлсіз жинақталу тұрғысы бойынша компактылы.

*- әлсіз жинақталуды еске түсірейік: $L_\infty(\Omega)$-ның $\{u_n\}$ тізбегі u –ға *- әлсіз жинақталады, егер

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x) \cdot g(x) dx = \int_\Omega u(x) \cdot g(x) dx,\ \forall g \in L_1(\Omega).$$

Айта кететін жайт, тізбектің норма бойынша жинақталуынан әлсіз жинақталуы шығады, ал кері тұжырым дұрыс емес.

Лемма 1.11. Егер H гильберт кеңістігінің $\{u_n\}$ тізбегінің шегі $u \in H$ және $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|_H = \|u\|_H$ болса, онда $u_n \to u$ H нормасы бойынша.

Лемма 1.12. Егер Ω - шенелген аймақ болса, онда $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ $L_2(\Omega)$-ға компактылы тиісті, яғни элементтов $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-ның $\|u_a\|_{2,\Omega}^{(1)}$ нормасы бойынша бірқалыпты шенелген $\{u_a\}$ жиыны $L_2(\Omega)$-да компактылы.

Осындай тұжырым $W_2^1(\Omega)$ кеңістігі үшін де орынды, егер Ω қажетті дәрежеде «жақсы» болса (мысалы бөлшек-тегіс).

Теоремаларды дәлелдеу барысында көп жағдайларда келесі түрдегі операторлық теңдеулер қарастырылады

$$u=Au, \qquad (1.2)$$

мұнда A операторы B банах кеңістігін өзіне-өзін көшіреді. Осы теңдеудің шешімі кейде А операторының қозғалмайтын нүктесі деп аталады. Енді сол қозғалмайтын нүктенің бар болуын қамтамасыз ететін кейбір белгілі теоремаларды келтірейік [1].

Банах теоремасы. Егер А операторы B банах кеңістігінің тұйық К жиынын өзіне-өзін көшірсе: A: $K \to K$, және сығушы оператор болса, яғни

$$\|Au_1 - Au_2\|_B \le q \cdot \|u_1 - u_2\|_B, \quad q<1, \quad u_2 \in K,$$

онда K жиынында жалғыз қозғалмайтын нүкте бар болады: $u=Au$.

Шаудер теоремасы. Егер A – үзіліссізге жуық оператор болса және тұйық шенелген дөңес K жиынын өзіне-өзін көшірсе, онда кем дегенде бір $u \in K$ қозғалмайтын нүкте бар.

Еске түсіретін нәрсе, үзіліссізге жуық оператор деп кез-келген шенелген тұйық жиындв компактылы жиынға бейнелейтін үзілліссіз операторды айтады. Оператор A операторы H гильберт кеңістігінде үзілліссізге жуық болады, егер ол кез-келген H-та жинақталатын $\{x_1, x_2,...\}$ тізбегін сол H-та күшті жинақталатын $\{Ax_1, Ax_2,...\}$ тізбегіне бейнелесе.

Тихонов – Шаудер теоремасы. Егер K – В банах кеңістігінің дөңес тұйық шенелген жиыны болса және A операторы K –ны В кеңістігінің нормасы бойынша үзіліссіз өзіне-өзін көшірсе, онда K-да жалғыз қозғалмайтын нүкте бар.

Болашақта қарастырылатын сызықты стационарлық есептердің шешімділігі Рисс теоремасына сүйенеді.

Рисс теоремасы. H гильберт кеңістігіндегі $l(u)$ сызықты функционалы $a \in H$ бекітілген элементінің қандай-да бір $u \in H$ элементке скаляр көбейтіндісі ретінде беріледі $: l(u) = (a,u)$. a элементі l операторы арқылы бірмәнді анықталады.

Ал сызықсыз стационарлық есептердің шешімділігі дәлелдеу үшін

Лерэ – Шаудер принципі қолданылады. H сепарабелді гильберт кеңістігінде сызықсыз үзіліссізге жуық А операторы үшін (1.2) теңдеуі берілсін. Осы теңдеудің шешімінің бар болуын келесі принцип қамтамасыз етеді.

Лерэ – Шаудер принципі. Егер кез келген $\lambda \in [0,1]$ үшін

$$x = \lambda \cdot Ax$$

теңдеуінің барлық мүмкін болатын шешімдері қандай-да бір $|x| \le \rho$ шарының сыртына шығып кетпесе, онда (1.2) теңдеуінің осы шарда кем дегенде бір шешімі бар.

Бұл принциптің ыңғайлығы - жалғыз шешімі жоқ есептерді де зерттеуге мүмкіндік беретіндігі.

1.5 Дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің қасиеттері

Гидродинамиканың теңдеулер жүйесінің шеттік есептерін зерттеу кезінде бізге параболалық және эллиптикалық теңдеулердің жалпы теориясының мәліметтері қажет болады [9].

Ω - шекарасы Γ - C^{2+a}, $0 < a < 1$ класына тиістілі R^n –дегі шенелген аймақ болсын. Мынадай параболалық теңдеуді қарастырайық:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f, \ (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{1.3}$$

оның бастапқы және шекаралық шарттары келесідей болсын:

$$u|_S = \varphi(x,t), \ S = \Gamma \times (0,T), \ \Gamma = \partial\Omega, \ u|_{t=0} = u_0(x). \tag{1.4}$$

Мұнда L - эллиптикалық оператор:

$$Lu = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x,t) \cdot u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) \cdot u_{x_i} + a(x,t) \cdot u,.$$

$$\nu|\xi|^2 \le \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2, \ \nu, \mu = const > 0, \ |\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Шекара $\Gamma \in C^{2+a}$, $0 < a < 1$, оң жағы мен коэффициенттерінің тегістік дәрежесі мынадай болсын:

$$\left(a_{ij}(x,t), a_i(x,t), a(x,t), f(x,t)\right) \in C^{a,a/2}(Q),$$

ал бастапқы және шекаралық шамалар:

$$u_0(x) \in C^{2+a}(\Omega), \quad \varphi(x,t) \in C^{2+a,1+a/2}(S)$$

және олар келісілген болсын, яғни

$$u_0(x) = \varphi(x,t)|_{t=0}, \quad x \in \Gamma$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)|_{t=0} = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x,0) \cdot u^0_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,0) \cdot u^0_{x_i} + a(x,0) \cdot u_0(x) + f(x,0), \quad x \in \Gamma.$$

Онда (1.3), (1.4) есебінің кез-келген шешімі үшін

$$|u|_{2+a,1+a/2,Q} \le C\left(|f|_{a,a/2,Q} + |\varphi|_{2+a,1+a/2,S} + |u_0|_{2+a,\Omega}\right).$$

бағасы орынды.

Егер

$$u_0 \in W_p^2(\Omega), \ \varphi \in W_p^{2,1}(S), \ f \in L_p(Q), \ p>1, \ p \neq \frac{3}{2},$$

$$\Gamma \in C^2, \ a_{ij} \in C(Q), \ a_i \in L_r(Q), \ a \in L_S(Q),$$

$$r = \begin{cases} \max(p, n+2), & p \neq n+2 \\ n+2+\varepsilon, & p = n+2 \end{cases} \quad s = \begin{cases} \max(p,(n+2)/2), & p \neq (n+2)/2 \\ (n+2)/2+\varepsilon, & p = (n+2)/2, \varepsilon > 0 \end{cases}$$

болса және $u_0(x) = \varphi(x,t)|_{t=0}, \ x \in \Gamma$ - келісімділік шарты орындалса, онда

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \le C \cdot \left(\|f\|_{p,Q} + \|\varphi\|_{W_p^{2,1}(S)} + \|u_0\|^{(2)}_{p,\Omega} \right).$$

бағасы орындалады.

Енді Ω аймағында екінші ретті эллиптикалық теңдеу үшін Дирихле есебін қарастырайық:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \cdot u_{x_i} + a(x) \cdot u = f, \quad u|_{\Gamma} = \varphi, \qquad (1.5)$$

мұнда (a_{ij}, a_i, a) коэффициенттері мен f –оң жағы $C^a(\Omega)$ кеңістігіне тиесілі, ал $\varphi \in C^{2+a}(\Gamma)$. Әдетте (1.5)-те $a_{ij}=a_{ji}$ деп есептелінеді.

$$\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \le \sum_{i.j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \le \mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad \nu,\mu = const > 0, \tag{1.6}$$

Онда (1.5) есебінің барлық *u(x)* шешімі үшін

$$|u|_{2+a,\Omega} \le C\cdot\left(|f|_{a,\Omega} + |\varphi|_{2+a,\Omega} + |u|_{0,\Omega}\right). \tag{1.7}$$

априорлы бағасы орынды. Мұнда, егер шешімнің жалғыздығы теоремасы орындалса, онда (1.7)-те соңғы қосылғышын алып тастауға болады.

$$|u|_{0,\Omega} \le C\cdot\left(|\varphi|_{0,\Omega} + |f|_{0,\Omega}\right)$$

Ондай жағдай, мысалы, $a(x)\le 0$ болғанда максимум принципі бойынша жүзеге асады.

Егер $\Gamma\in C^2$, $\varphi\in W_p^2(\Gamma)$, $f\in L_p(\Omega)$, $p > 1$ болса, ал (1.5) теңдеуінің коэффициенттері (1.6) шартын қанағаттандырса, $a_{ij}\in C(\Omega), a_i\in L_q(\Omega), a\in L_{q_1}(\Omega)$, мұнда $q>n$, $p\le n$ болғанда және $q=p$, $p\ge n,$ болғанда, $q_1 = \frac{1}{2}q,$ онда

$$\|u\|_{p,\Omega}^{(2)} \le C\cdot\left(\|f\|_{p,\Omega} + \|\varphi\|_{p,\Gamma}^{(2)} + \|u\|_{p,\Omega}\right),$$

бағасы орындалады. Сонымен бірге, егер $a(x)\le 0$ болса, онда оң жақтағы $\|u\|_{p,\Omega}$ нормасын алып тастауға болады.

2 Термогидродинамиканың моделін диффузиялық моделмен жуықтау

2.1 Есептің қойылымы және жалпылама шешім

Сонымен, мұнда термогидродинамиканың қарастырылатын бір моделі ретінде тығыздығы айнымалы түрде анықталған және тұтқырлығы температурадан экспоненциалды түрде тәуелді болтын моделін алайық. Яғни, ньютондық ортаның реологиялық моделін алайық. Орта сығылмайды деп есептейміз. Яғни, келесі теңдеулер жүйесін қарастырамыз:

$$\frac{1}{P_r}\rho^*\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right)=-\Gamma\nabla p+divD-\vec{\Lambda}\rho^*-Ra\cdot\rho^*\cdot\theta\cdot\vec{e}$$

$$\rho^*\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\theta\right)=div(\lambda(\theta,\rho)\nabla\theta)+D:D, \qquad (*)$$

$$\frac{\partial\rho^*}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\rho^*=0,$$

мұнда

$D=\left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right\}\cdot D_0\rho^*\vec{v}_0$ - деформация жылдамдығы тензоры,

$D{:}D$ - тензордың екіеселі жиналымы.

$\vec{v}$ - сұйықтық жылдамдығы,

ρ^* - біртексіз орта тығыздығы,

θ, p - температура мен қысым.

Бұл кезде жылдамдық пен уақыттың сипаттамалы мәндері сәйкесінше $K/L_0\rho_0C_p$ және $L_0^2\rho_0C_p/K$ болады, мұнда L_0 - областың сипаттамалы өлшемі. (*) жүйесіне келесі өлшемсіз параметрлер кіреді:

$P_r=\vec{v}_0\rho_0C_p/K$ - Прандль саны,

$Ra=L_0^2\rho_0C_pT_0ag/\vec{v}_0K$ - Релей саны,

$D_0=\vec{v}_0K/T_0L_0^kC_p^2\rho_{0,}$ - тұтқыр диссипация параметрі,

және $\Gamma=\rho_0L_0^2C_p/K\vec{v}_0$, $\Lambda=L_0^2\rho_0C_pg/\vec{v}_0K$ параметрлері мен $\vec{\Lambda}=(0,0,\Lambda),\vec{e}=(0,0,1)$ векторлары. Мұнда нөл индексі сипаттамалы мәндерді білдіреді.

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right),\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

(*) жүйесі үшін алғашқы-шекаралық шарттар

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \quad \rho^*|_{t=0} = \rho_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\vec{v} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad \theta = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T],$$

түрінде болады. Мұнда $\partial\Omega$ - Ω облысы шекарасы. Сонымен бірге

$$0 < m \le \rho_0(x) \le M < \infty.$$

шарты орындалады деп есептейік.

Мұнда $\frac{1}{P_r}, \upsilon$ физикалық коэффициентерінің мәндері жеткілікті аз. Ал (*) жүйесі күрделі әрі сызықсыз. Қазіргі кезде бұл жүйе үшін шешімнің бар болуы мен жалғыздығы теоремасын дәлелдеу мүмкін емес болып отыр. Сондықтан біз (*) – ның жеңілдетілген моделін алып қарастырамыз. Тұтқырлық температура мен тығыздықтан тәуелсіз деп аламыз. Диссипативті мүшелерін есекермейік. Онда келесі жүйені аламыз:

$$\frac{1}{P_r}\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\Gamma\nabla p + \upsilon\Delta\vec{v} - Ra\cdot\rho\cdot\theta\cdot\vec{e},$$

$$\rho\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\theta\right) = \Delta\theta, \qquad (**)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\rho = 0, \qquad div\vec{v} = 0,$$

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \rho|_{t=0} = \rho_0(x), \theta|_{t=0} = \theta_0(x),$$

$$\vec{v} = \theta = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < m \le \rho_0(x) \le M < \infty.$$

Біртексіз сұйықтықтың бұл моделі [14] жұмыстарда зертелді, онда 2-өлшемді облыста жалпылама және күшті шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы зерттелінді. Бұл (**) моделінде диффузиялық процесс жоқ деп саналды. Бірақ накты табиғи жағдайларда диффузиялық процесс әрдайым болады. Сондықтан математикалық модельдеу кезінде әрқашанда диффузия процесін ескеру қажет.

Осы бөлімде диффузиялық емес біртексіз сұйықтық моделінің аппроксимациясын әртекті сұйықтықтың диффузиялық моделімен және оның математикалық дәйектемесімен зерттейтін боламыз (диффузия коэффициентінің нөлге ұмтылуы кезіндегі есептің дұрыс қойылуы, шешімдердің сәйкестігі).

Біртексіз сығылмайтық сұйықтықтың (**) температуралық моделін қарастырамыз және оңай болу үшін бірге тең P_r, Ra коэффициенттерін есептейміз.Сонда:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\cdot\vec{v}\right)=\upsilon\Delta\vec{v}-\nabla p+\rho\theta\vec{e},$$

$$\rho\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\cdot\theta\right)=\Delta\theta, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\rho=0, \qquad div\vec{v}=0,$$

$$\vec{v}\big|_{t=0}=\vec{v}_0(x), \ \ \theta\big|_{t=0}=\theta_0(x), \ \ \ \rho\big|_{t=0}=\rho_0(x), \tag{2.2}$$

$$\vec{v}\big|_{\partial\Omega}=\theta\big|_{\partial\Omega}=0.$$

Әрі қарай параметрлері аз теңдеулерді қарастыратын боламыз:

$$\rho^{\varepsilon}\left(\frac{\partial \vec{v}^{\varepsilon}}{\partial t}+(\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{v}^{\varepsilon}\right)=\upsilon\Delta\vec{v}^{\varepsilon}-\nabla p^{\varepsilon}+\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\vec{e}+\varepsilon(\nabla\rho^{\varepsilon}\nabla)\vec{v}^{\varepsilon},$$

$$\rho^{\varepsilon}\left(\frac{\partial \theta^{\varepsilon}}{\partial t}+(\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\theta^{\varepsilon}\right)=\Delta\theta^{\varepsilon}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \rho^{\varepsilon}}{\partial t}+(\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\rho^{\varepsilon}=\varepsilon\Delta\rho^{\varepsilon}, \qquad div\vec{v}^{\varepsilon}=0,$$

Бастапқы және шеаралық шарттармен:

$$\vec{v}^{\varepsilon}\big|_{t=0}=\vec{v}_0(x), \ \ \theta^{\varepsilon}\big|_{t=0}=\theta_0(x), \ \ \ \rho^{\varepsilon}\big|_{t=0}=\rho_0(x),$$

$$\vec{v}^{\varepsilon}\big|_{\partial\Omega}=\theta\big|_{\partial\Omega}=0, \qquad \left.\frac{\partial\rho^{\varepsilon}}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega}=0, \tag{2.4}$$

мұндағы $\vec{n}-\partial\Omega$. шекарасындағы сыртқы нормаль

Бұл бөлімде (2.3)-(2.4) есепбінің жалпылама шешімі жайлы теореманы зерттейміз. Айта кету керек, температураны ескермеген есеп [1], [2] жұмыстарында зерттелген.

Анықтама 2.1 $\vec{v}^{\varepsilon}, \theta^{\varepsilon}, \rho^{\varepsilon}$ функциялары (2.3)-(2.4) көмекші есебінің жалпылама шешімі деп аталады,егер

$$\vec{v}^{\varepsilon}(t) \in L_{\infty}(0,T;V_0(\Omega)) \cap L_2(0,T;V_1(\Omega)),$$

$$\theta^{\varepsilon}(t) \in L_{\infty}(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),$$

$$\rho^{\varepsilon}(t) \in L_{\infty}\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right) \cap L_2(0,T;W) \cap W_p^1\left(0,T;L_q(\Omega)\right),$$

$$p \in \left[\frac{4}{3},2\right],\ q \in [1,2],\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{2q} \ge 1;$$

$0 < m \le \rho^{\varepsilon}(x,t) \le M < \infty$ барлық $Q = [0,T] \times \Omega,$ болғанда $Q,$-де диффузия теңдеуі толығымен орындалады.

Барлық

$$\vec{\phi}(t) = \vec{\phi}(t,x) \in W_2^1(0,T;V_1(\Omega)), \qquad \psi(t) = \psi(t,x) \in W_2^1\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),$$

$\vec{\phi}(T) = \psi(T) = 0$ болғанда интегралды теңдік дұрыс деп саналады.

$$\int_Q \Big\{\left(\rho^{\varepsilon}\vec{v}^{\varepsilon}, \vec{\phi}_t + \left(\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{\phi}\right) - \varepsilon\Big[\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon},\nabla\right)\vec{\phi}, \vec{v}^{\varepsilon}\right) -$$

$$-\upsilon\left(\vec{v}_x^{\varepsilon}, \vec{\phi}_x\right) + \left(\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\left(\vec{e},\vec{\phi}\right)\right)\Big]\Big\}dt + \int_{\Omega}\left(\rho_0(x)\vec{v}_0(x), \vec{\phi}(0)\right)dx,$$

$$\int_Q \Big\{\left(\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}, \psi_t + \left(\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi, \theta^{\varepsilon}\right)\right) - \left(\nabla\theta^{\varepsilon}, \nabla\psi\right)\Big\}dt + \int_{\Omega}\rho_0\theta_0\psi_0 dx,$$

Мұнда:

$$\left(\vec{v}_x^{\varepsilon}, \vec{\phi}_x\right) = \int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial v_i^{\varepsilon}}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}dx,\ dx = dx_1dx_2dx_3.$$

Анықтама 2.2. $\vec{v}^{\varepsilon}, \theta^{\varepsilon}, \rho^{\varepsilon}$ функциялары (2.3)-(2.4) көмекші есебінің әлсіз жалпылама шешімдері деп аталады,

егер

$$\vec{v}^{\varepsilon}(t) \in L_{\infty}(0,T;V_0(\Omega)) \cap L_2(0,T;V_1(\Omega)),$$

$$\theta^{\varepsilon}(t) \in L_{\infty}(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),$$

$$\rho^{\varepsilon}(t) \in L_{\infty}(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;W(\Omega)), \quad 0 < m \le \rho^{\varepsilon}(t) \le \mathrm{M} < \infty,$$

Барлық

$$\vec{\phi}(t) \in W_2^1(0,T;V_1(\Omega)), \psi(t) \in W_2^1\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),$$

$$\eta(t) \in W_2^1\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right), \quad \vec{\phi}(T) = \psi(T) = \eta(T) = 0,$$

Интегралдық теңдіктері орындалса.

$$\int_Q \left\{ \left(\rho^{\varepsilon}\vec{v}^{\varepsilon}, \vec{\phi}_t + \left(\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{\phi}\right) - \varepsilon\left[\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon},\nabla\right)\vec{\phi}, \vec{v}^{\varepsilon}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \upsilon\left(\vec{v}_x^{\varepsilon}, \vec{\phi}_x\right) + \left(\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\left(\vec{e},\vec{\phi}\right)\right)\right\} dt + \int_{\Omega} \left(\rho_0(x)\vec{v}_0(x), \vec{\phi}(0)\right) dx,$$

$$\int_Q \left\{ \left(\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}, \psi_t + \left(\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\psi - \nabla\theta^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi\right)\right\} dt = \int_{\Omega} \rho_0\theta_0\psi(0)dx,$$

$$\int_Q \left\{ \left(\rho^{\varepsilon}, \eta_t + \vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\eta\right) - \lambda\left(\nabla\rho^{\varepsilon},\nabla\eta\right)\right\} dt + \int_{\Omega} \rho_0\eta(0)dx = 0.$$

W кеңістігінде $\psi(x)$, $\left.\dfrac{\partial\psi}{\partial\,\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0.$ функциясынан тұратын $W_2^2(\Omega)$, скаляр кеңістігі орналасқан.

Априорлы бағалар. Параболалық теңдеулер үшін максимум принципі бойынша келесі баға орынды:

$$0 < m \le \rho^{\varepsilon}(t) \le \mathrm{M} < \infty.$$

Элементарлы түрлендіру арқылы (2.3) теңдеуін $\vec{v}^{\varepsilon}(t), \theta^{\varepsilon}(t)$ в $L_2(\Omega)$.теңдеуіне көбейтеміз.

$$\left(\rho \frac{\partial \vec{v}^{\varepsilon}}{\partial t} + (\vec{v}^{\varepsilon} \cdot \nabla)\vec{v}^{\varepsilon}, \vec{v}^{\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho\left|\vec{v}^{\varepsilon}\right|^2 + (\vec{v}^{\varepsilon} \cdot \nabla)\rho^{\varepsilon}\left|\vec{v}^{\varepsilon}\right|^2\right] - \frac{\left|\vec{v}^{\varepsilon}\right|^2}{2}\left(\rho_t^{\varepsilon} + (\vec{v}^{\varepsilon} \cdot \nabla)\rho^{\varepsilon}\right),$$

$$-\varepsilon\left((\nabla\rho^{\varepsilon} \cdot \nabla)\vec{v}^{\varepsilon}, \vec{v}^{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon}{2}\left|\vec{v}^{\varepsilon}\right|^2 \nabla\rho^{\varepsilon},$$

Диффузия теңдеуін ескере отырып табамыз.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho^{\varepsilon}\left|\vec{v}^{\varepsilon}\right|dx + \upsilon\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{V_1}^2 = \int_{\Omega}\theta^{\varepsilon}\rho^{\varepsilon}\left(\vec{e} \cdot \vec{v}^{\varepsilon}\right)dx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho^{\varepsilon}\left|\theta^{\varepsilon}\right|dx + \left\|\theta_{x}^{\varepsilon}\right\|^2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left\|\rho^{\varepsilon}\right\|^2 + \varepsilon\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|^2 = 0.$$

Оң жақ интегралды бағалай отырып келесі түрде табамыз

$$\int_{\Omega}\theta^{\varepsilon}\rho^{\varepsilon}\left(\vec{e} \cdot \vec{v}^{\varepsilon}\right)dx \le \max\left|\rho^{\varepsilon}\right|\left\|\theta^{\varepsilon}\right\|\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|,$$

Әдеттегідей баға шығарамыз

$$\begin{aligned}&\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;V_0(\Omega))} + \left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,T;V_1(\Omega))} + \\ &+ \left\|\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)} \le C < \infty,\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\left\|\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \varepsilon\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}^2 \le C < \infty.$$

Мұндағы C тұрақтысы есеп мәліметтеріне байланысты және ε кіші параметрге тәуелді емес.

Енді диффузия теңдеуіне назар аударайық және оны $\Delta\rho^{\varepsilon}(x,t)$, теңдеуіне көбейтеміз, сосын Ω бойынша интегралдаймыз.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|^{2}+\varepsilon\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|^{2}=\left(\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\rho^{\varepsilon},\Delta\rho^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)}. \tag{2.6}$$

Осы қатынастың оң бөлігі интегралдағаннан кейін келесі түрде болады

$$\left(\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\rho^{\varepsilon},\Delta\rho^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)}=-\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon},\nabla\rho^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)}.$$

Интерполяциялық теңсіздікті қолдана отырып [8]

$$\begin{aligned}&-\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon},\nabla\rho^{\varepsilon}\right)\le\left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|_{V_0(\Omega)}\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}^{2}\le\\&\le C\left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|_{V_0(\Omega)}\left\|\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(\Omega)}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Олай болса (2.6) және (2.7) келесі қатынас шығады

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|^{2}+\varepsilon\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|^{2}\le\frac{\varepsilon}{2}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|^{2}+C_1^{\varepsilon}\left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|_{V_1(\Omega)}^{2},$$

(2.5) теңдеуін пайдалана отырып, келесі теңдеуді аламыз

$$\max_{0\le t\le T}\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}(t)\right\|\le C_1^{\varepsilon}<\infty,\quad \int_0^T\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|^{2}dt\le C_2^{\varepsilon}<\infty. \tag{2.8}$$

Алынған теңсіздіктен және (2.3) теңдеуден $\left\|\rho^{\varepsilon}(t)\right\|_{L_2(0,T;W(\Omega))}$. бағалау шығады. (2.5) енгізу және теңсіздік теоремасының көмегімен $\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\rho^{\varepsilon}$ өрнегінің шектеулерімен дәлелденеді $L_r\left(0,T;L_S(\Omega)\right)$, мұндағы $s\in[1,3]$, $r\in[1,\infty]$; $\frac{1}{r}+\frac{3}{2s}\ge\frac{3}{2}$ үшөлшемді есепте және $s\in[2,\infty)$, $\tau\in[1,\infty]$; $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\ge 1$ екі өлшемді есепте. Олай болса диффузия теңдеуінен тікелей келесі шығады.

$$\frac{\partial\rho^{\varepsilon}}{\partial t}\in L_p\left(0,T;L_q(\Omega)\right),\ q\in[1,2],\quad p\in[4/3,2],\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{2q}\ge 1.$$

Уақыт бойынша локальді емес тағы бір бағалауды аламыз, мұндағы тұрақты есептегі мәліметтерге байланысты. Бұл бағалау келешекте жуықтау шешімдерінің $L_2(Q)$тізбегіне кепілдік береді $\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}(x,t)$, $\theta_N^{\varepsilon}(x,t)$, олар жалпы шешімі бар теореманы дәлелдегенде Галеркин әдісі бойынша орындалады.

Лемма 2.1. Кез-келген δ : $0<\delta<T$ теңсіздігі үшін дұрыс болады.

$$\int_0^{T-\delta} \left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t+\delta)-\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t)\right\|^2 dt \le N_1\sqrt{\delta},$$

$$\int_0^{T-\delta} \left\|\theta^{\varepsilon}(t+\delta)-\theta^{\varepsilon}(t)\right\|^2 dt \le N_2\sqrt{\delta}.$$

Дәлелдеу. δ және $t,\ 0<t\le T-\delta,$ мәндерін тіркейміз және (2.3) теңдеуін $\tau\in(t,t+\delta)$. уақыт интервалында қарастырамыз. (2.3) теңдеуін $\vec{\phi}(t)$, $\psi(t)$ скалярлы түрде көбейтеміз $L_2(\Omega)$, соған сәйкес қарапайым түрлендіруден кейін (2.9) теңдігіне келеміз.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\left(\rho^{\varepsilon}\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon},\vec{\phi}\right)_{L_2(\Omega)}=\left(\rho^{\varepsilon}\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{\phi}-\varepsilon\left(\nabla\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{\phi},\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\Big)_{L_2(\Omega)}-\\
&-\upsilon\left(\rho^{\varepsilon},\vec{\phi}\right)+\left(\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\left(\vec{e}\cdot\vec{\phi}\right)\right),\qquad \tau\in[t,t+\delta],\\
&\frac{d}{d\tau}\left(\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\cdot\psi\right)_{L_2(\Omega)}=\left(\left(\rho^{\varepsilon}\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\psi,\theta^{\varepsilon}\right)-\left(\nabla\theta^{\varepsilon},\nabla\psi\right),
\end{aligned}\tag{2.9}$$

τ t-дан $t+\delta,$ дейін (2.9) бойынша интегралдаймыз, сосын

$$\vec{\phi}=\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t+\delta)-\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t);\quad \psi=\theta^{\varepsilon}(t+\delta)-\theta^{\varepsilon}(t).$$

теңдеуіне қоямыз.

$$\rho^{\varepsilon}(t+\delta)\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t+\delta)-\rho^{\varepsilon}(t)\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t)$$

өрнегін

$$\rho^{\varepsilon}(t+\delta)\left[\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t+\delta)-\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t)\right]+\left[\rho^{\varepsilon}(t+\delta)-\rho^{\varepsilon}(t)\right]\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t),$$

түрде жазамыз, сосын өрнектердің айырмашылығы байқалады.

$$\rho^{\varepsilon}(t+\delta)\theta^{\varepsilon}(t+\delta)-\theta^{\varepsilon}(t)\rho^{\varepsilon}(t)=$$

$$=\rho^{\varepsilon}(t+\delta)\left[\theta^{\varepsilon}(t+\delta)-\theta^{\varepsilon}(t)\right]+\left[\rho^{\varepsilon}(t+\delta)-\rho^{\varepsilon}(t)\right]\theta^{\varepsilon}(t).$$

Диффузия теңдеуін $[t,t+\delta]$ интервалында қайта жазамыз.

$$\frac{d}{d\tau}\left(\rho^{\varepsilon}(\tau),\varphi\right)_{L_2(\Omega)}=\left(\rho^{\varepsilon}(\tau)\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(\tau),\nabla\varphi\right)_{L_2(\Omega)}-\varepsilon\left(\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau)\cdot\nabla\varphi\right), \tag{2.10}$$

t -дан $t+\delta$,-дейін интегралдаймыз, нәтижесінде (2.11) аламыз.

$$\begin{aligned}&\left(\rho^{\varepsilon}(t+\delta)-\rho^{\varepsilon}(t),\varphi\right)=\\&=\int_{t}^{t+\delta}\left\{\left(\rho^{\varepsilon}(\tau)\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(\tau),\nabla\right)\varphi-\varepsilon\left(\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau),\nabla\quad\right)\varphi\right\}d\tau,\end{aligned} \tag{2.11}$$

Енді осы өрнекті қоямыз $\varphi \quad \vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t)\cdot\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t+\delta)-\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t)\right)$, нәтижеде (2.9) теңдеуін келесі түрде жазамыз.

$$\begin{aligned}&\left\|\sqrt{\rho^{\varepsilon}(t+\delta)}\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t+\delta)-\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t)\right)\right\|^2=\\&=\int_{t}^{t+\delta}\left(\rho^{\varepsilon}\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t),\nabla\right)\vec{\phi},\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t)\Big|_{L_2}-\upsilon\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t),\phi\right)_{L_2(\Omega)}+\\&+\left(\theta^{\varepsilon}(\tau)\rho^{\varepsilon}(\tau)\left(\vec{e}\cdot\vec{\phi}\right)\right)_{L_2(\Omega)}-\varepsilon\left(\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau),\nabla\right)\phi,\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(\tau)\Big)_{L_2(\Omega)}+\\&+\left(\left(\rho^{\varepsilon}(\tau)\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(\tau),\nabla\right)\varphi\right)_{L_2(\Omega)}+\varepsilon\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau),\nabla\right)\varphi\right)_{L_2(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.12}$$

Мұнда
$$\vec{\phi}(t)=\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t+\delta)-\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t),\quad \varphi(t)=\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t),\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t+\delta)-\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t)\right).$$

(2.10) теңдеуді $\tau\in[t,t+\delta],\ \varphi=\eta=\theta^{\varepsilon}\left(\theta^{\varepsilon}(t+\delta)-\theta^{\varepsilon}(t)\right)$ бойынша интегралдаймыз.

$$\left(\rho^{\varepsilon}(t+\delta)-\rho^{\varepsilon}(t),\eta(t)\right)=$$

$$=\int_{t}^{t+\delta}\left\{\left(\rho^{\varepsilon}(t)\vec{v}^{\varepsilon}(\tau),\nabla\right)\eta(t)\right)_{L_2(\Omega)}-\varepsilon\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau)\cdot\nabla\right)\eta(t)\right)_{L_2(\Omega)}\right\}d\tau,$$

(2.9) теңдеуі арқылы (2.13) теңдеуін аламыз

$$\left\|\sqrt{\rho^{\varepsilon}(t+\delta)-\rho^{\varepsilon}(t)}\,\theta^{\varepsilon}(t)\right\|^{2}=$$

$$=\int_{t}^{t+\delta}\left\{\left(\rho^{\varepsilon}(t)\vec{v}^{\varepsilon}(\tau),\nabla\psi\right)\theta^{\varepsilon}(t)+\left(\nabla\theta^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi\right)_{L_{2\backslash(\Omega)}}+\right. \tag{2.13}$$

$$\left.+\left(\left(\rho^{\varepsilon}(\tau)\cdot\vec{v}(\tau)\right);\nabla\eta(t)\right)_{L_2(\Omega)}-\varepsilon\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau)\cdot\nabla\right)\eta(t)\right)_{L_2(\Omega)}\right\}d\tau.$$

$$\psi=\theta^{\varepsilon}(t+\delta)-\theta^{\varepsilon}(t),\quad \eta(t)=\theta^{\varepsilon}(t)\cdot(t+\delta)-\theta^{\varepsilon}(t).$$

(2.12), (2.13) t бойынша $[0,T]$ интервалында интегралдаймыз және бірінші бөліктегі әрбір қосылғыш үшін қажет деген теңсіздікті дәлелдейміз. ε -нан тұратын қосылғыштарды бағалауға толығырақ тоқталайық, Мысалы $\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau)\cdot\nabla\right)\varphi\right)_{L_2(\Omega)}$

$$\int_{0}^{T-\delta}\int_{t}^{t+\delta}\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau)\cdot\nabla\right)\vec{v}^{\varepsilon}(t),\vec{v}^{\varepsilon}(t+\delta)\right)_{L_2(\Omega)}d\tau dt\le$$

$$\le\int_{0}^{T-\delta}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(t)\right\|_{V_1(\Omega)}\cdot\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(t+\delta)\right\|_{L_4(\Omega)}dt\int_{t}^{t+\delta}\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau)\right\|_{L_4(\Omega)}d\tau.$$

Гельдердің теңсіздігі мен енгізу теоремасын қолдана отырып мына қорытынды жасауға болады.

$$\int_{t}^{t+\delta}\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau)\right\|_{L_4(\Omega)}d\tau\le.\int_{t}^{t+\delta}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}(\tau)\right\|\,d\tau\le C\sqrt{\delta}\left(\int_{t}^{t+\delta}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}(\tau)\right\|^{2}\,d\tau\right)^{1/2}.$$

Қалған екі көбейткіштер үшін келесіні аламыз

$$\int_0^{T-\delta} \left\| \vec{v}^{\varepsilon}(t) \right\|_{V_1(\Omega)} \cdot \left\| \vec{v}^{\varepsilon}(t+\delta) \right\|_{L_4(\Omega)} dt \le C \left(\int_0^{T-\delta} \left\| \vec{v}^{\varepsilon}(t) \right\|^2_{V_1(\Omega)} dt \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int_0^{T-\delta} \left\| \vec{v}^{\varepsilon}(t+\delta) \right\|^2_{V_1(\Omega)} dt \right)^{1/2} \le C \int_0^{T} \left\| \vec{v}^{\varepsilon}(t) \right\|^2_{V_1(\Omega)} dt.$$

Осылайша, бағалау

$$\left| \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \left(\left(\nabla \rho^{\varepsilon}(\tau) \cdot \nabla \right) \vec{v}^{\varepsilon}(t), \vec{v}^{\varepsilon}(t+\delta) \right)_{L_2(\Omega)} d\tau dt \right| \le$$

$$\le C\sqrt{\delta} \int_0^{T} \left\| \vec{v}^{\varepsilon}(t) \right\|^2_{V_1(\Omega)} dt \cdot \left(\int_0^{T} \left\| \Delta \rho^{\varepsilon}(t) \right\|^2 dt \right)^{1/2} \le C\delta^{1/2}.$$

Бұдан әрі біз бағалаймыз

$$\int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \left(\left(\nabla \rho^{\varepsilon}(\tau) \cdot \nabla \right) \vec{v}^{\varepsilon}(t), \vec{v}^{\varepsilon}(t+\delta) \right)_{L_2(\Omega)} d\tau dt \le J_1 =$$

$$= \int_0^{T-\delta} \int_t^{t+\delta} \left\| \nabla \rho^{\varepsilon}(\tau) \right\|_{L_4(\Omega)} \cdot \left\| \nabla \vec{v}^{\varepsilon}(t+\delta) \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \vec{v}^{\varepsilon}(\tau) \right\|_{L_4(\Omega)} d\tau dt.$$

$$\int_t^{t+\delta} \left\| \nabla \rho^{\varepsilon}(\tau) \right\|_{L_4(\Omega)} \left\| \vec{v}^{\varepsilon}(\tau) \right\|_{L_4(\Omega)} d\tau \le$$

$$\le \int_t^{t+\delta} \max_{\Omega} \left| \rho^{\varepsilon}(\tau) \right|^{1/2} \cdot \left\| \Delta \rho^{\varepsilon}(\tau) \right\|^{1/2}_{L_2(\Omega)} \left\| \vec{v}^{\varepsilon}(\tau) \right\|_{V_1(\Omega)} d\tau \le$$

$$\leq C\int_t^{t+\delta}\left\|\Delta\rho^\varepsilon(\tau)\right\|^{1/2}\cdot\left\|\vec{v}^\varepsilon(\tau)\right\|d\tau\leq$$

$$\leq C\int_t^{t+\delta}\left\|\Delta\rho^\varepsilon(\tau)\right\|d\tau\cdot\left(\int_t^{t+\delta}\left\|\vec{v}^\varepsilon(\tau)\right\|^2_{V_1(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq C\delta^{1/2}\left(\int_t^{t+\delta}\left\|\Delta\rho^\varepsilon(\tau)\right\|^2d\tau\right)^{1/2}\left(\int_t^{t+\delta}\left\|\vec{v}^\varepsilon(\tau)\right\|^2_{V_1(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\leq C\delta^{1/2}.$$

Сонымен $J_1\leq C\delta^{1/2}$.

$$J_2=\left|\int_0^{T-\delta}\int_t^{t+\delta}\left(\left(\nabla\rho^\varepsilon(\tau)\vec{v}^\varepsilon(\tau)\cdot\nabla\right)\vec{v}^\varepsilon(t),\vec{v}^\varepsilon(t+\delta)\right)d\tau dt\right|\leq$$

$$\leq\max_{\Omega\times[0,T]}\left|\rho^\varepsilon(\tau)\right|\int_0^{T-\delta}\int_t^{t+\delta}\left(\left|\vec{v}^\varepsilon(\tau)\right|\left|\nabla\vec{v}^\varepsilon(t)\right|\vec{v}^\varepsilon(t+\delta)\right)d\tau dt\leq$$

$$\leq \mathrm{M}\int_0^{T-\delta}\int_t^{t+\delta}\left\|\nabla\vec{v}^\varepsilon(t)\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\vec{v}^\varepsilon(\tau)\right\|_{L_4(\Omega)}\left\|\vec{v}^\varepsilon(t+\delta)\right\|_{L_4(\Omega)}dtd\tau\leq$$

$$\leq\int_0^{T-\delta}\left\|\nabla\vec{v}^\varepsilon(t)\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\vec{v}^\varepsilon(t+\delta)\right\|_{L_4(\Omega)}dt\int_t^{t+\delta}\left\|\vec{v}^\varepsilon(\tau)\right\|_{V_1(\Omega)}d\tau\leq$$

$$\leq C\delta^{1/2}\int_0^{T-\delta}\left\|\vec{v}^\varepsilon(t)\right\|_{V_1(\Omega)}d\tau\cdot\left(\int_0^{T}\left\|\vec{v}^\varepsilon(\tau)\right\|_{V_1(\Omega)}d\tau\right)^{1/2},$$

$$J_3=\left|\int_0^{T-\delta}\int_t^{t+\delta}\left(\left(\nabla\rho^\varepsilon(\tau)\cdot\nabla\right)\theta^\varepsilon(t)\cdot\theta^\varepsilon(t)\right)d\tau dt\right|\leq$$

$$\leq\int_0^{T-\delta}\left\|\nabla\theta^\varepsilon(t)\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\theta^\varepsilon(t)\right\|_{L_4(\Omega)}dt\cdot\int_t^{t+\delta}\left\|\nabla\rho^\varepsilon(\tau)\right\|_{L_4(\Omega)}d\tau\leq$$

$$\leq C\int_0^{T-\delta}\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}(t)\right\|^2 dt\int_t^{t+\delta}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}(\tau)\right\| d\tau \leq$$

$$\leq C\delta^{1/2}\int_0^{T-\delta}\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}(t)\right\| dt\cdot\left(\int_0^{T}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}(\tau)\right\|^2 d\tau\right)^{1/2} \leq C\delta^{1/2}.$$

$$J_3=\int_0^{T-\delta}\int_t^{t+\delta}\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau)\cdot\nabla\right)\vec{v}^{\varepsilon}(t),\vec{v}^{\varepsilon}(t+\delta)\right)_{L_2(\Omega)}d\tau dt\leq$$

$$\leq\int_0^{T-\delta}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(t+\delta)\right\|_{V_1(\Omega)}\int_t^{t+\delta}\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}(\tau)\right\|_{L_4(\Omega)}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(\tau)\right\|_{L_4(\Omega)}d\tau dt.$$

Енгізу теоремасын қолдана отырып t бойынша және τ бойынша интегралдау ретімен соңғы қатынастың оң бөлігін бағалап келесіні аламыз

$$C\int_0^{T}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}(\tau)\right\|\cdot\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(\tau)\right\|_{V_1(\Omega)}\int_{\tau-\delta}^{\tau}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(t+\delta)\right\|_{V_1}dx d\tau\leq$$

$$\leq C\delta^{1/2}\left(\int_0^{T}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(t)\right\|_{V_1(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^{T}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}(\tau)\right\|^2 d\tau\right)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^{T}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(\tau)\right\|^2_{V_1(\Omega)}d\tau\right)^{1/2}\leq C\delta^{1/2}.$$

Сонымен қатар $t\in[T,T+\delta]$ кезінде $\vec{v}^{\varepsilon}(t)=0$ аламыз.

Лемма 2.1. Дәлелденді.

Алынған бағалаудың көмегімен (2.3)-(2.4). есептің жалпы шешімін дәлелдеуге болады. Ол үшін Галеркин әдісін қолданамыз. Шешімді осы түрде іздейтін боламыз

$$\vec{v}_N^{\varepsilon}=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^N(t)\vec{\omega}_j,\qquad \theta_N^{\varepsilon}=\sum_{j=1}^{N}\beta_j^N(t)\psi_j.$$

$\{\vec{\omega}_j\}, \{\psi_j\}$ жүйесі $V_1, \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ базисінде анықталған. $\alpha_j^N(t), \beta_j^N(t)$ – әдеттегі дифференциалды теңдеулер жүйесінде анықталады.

$$
\begin{gathered}
\left(\rho^{\varepsilon}\left[(\mathrm{v}_N^{\varepsilon})_t + (\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}\right], \vec{\omega}_j\right)_{L_2(\Omega)} + \upsilon\left(\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}, \vec{\omega}_j\right)_{V_1(\Omega)} + \\
+\left(\theta_N^{\varepsilon}\rho_N^{\varepsilon}, (\vec{\omega}_j\cdot\vec{e})\right)_{L_2(\Omega)} + \varepsilon\left(\nabla\rho_N^{\varepsilon}\cdot\nabla\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}, \vec{\omega}_j\right)_{L_2(\Omega)}, \quad j=\overline{1,N},
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

$$
\begin{gathered}
\left(\rho_N^{\varepsilon}\left((\theta_N^{\varepsilon})_t + (\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\theta_N^{\varepsilon}, \psi_j\right)\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\nabla\theta_N^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi_j\right)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad j=\overline{1,N}, \\
\frac{\partial\rho_N^{\varepsilon}}{\partial t} + (\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\rho_N^{\varepsilon} = \varepsilon\Delta\rho_N^{\varepsilon},
\end{gathered}
\tag{2.15}
$$

$$
\begin{gathered}
\left.\frac{\partial\rho_{\varepsilon}^N}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\rho_{\varepsilon}^N\right|_{t=0} = \rho_0^N(x), \\
\left.\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{N}\alpha_i\vec{\omega}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\vec{\omega}_j, \vec{\mathrm{v}}_0\right)\vec{\omega}_j, \\
\left.\theta_N^{\varepsilon}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{N}\beta_i\psi_j = \sum_{j=1}^{N}\left(\theta_0, \psi_j\right)\psi_j.
\end{gathered}
\tag{2.16}
$$

$\rho_0^N(x)$, $\left.\dfrac{\partial\rho_0^N}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,$ шартын қанағаттандырады, $\rho_0^N(x), N = 1,2,\ldots,$ тізбегі $\rho_0(x),\ L_q(\Omega), W_2^1(\Omega),\ 0 < q < \infty,\ \rho_0^N(x) \in C^2(\Omega).$ кеңістікте сәйкес келеді. (2.14) - (2.16) теңдеулерінің шешімі дәлелденеді, бұдан басқа бағалау орны бар

$$
\begin{gathered}
\max_{0\le t\le T}\left\|\nabla\rho_N^{\varepsilon}\right\|^2 + \int_0^T\left\|\Delta\rho_N^{\varepsilon}\right\|^2 dt \le C_{\varepsilon} < \infty, \\
\max_{0\le t\le T}\left\|\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}\right\|^2 + \int_0^T\left\|\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}\right\|_{V_1(\Omega)}^2 dt \le C < \infty, \\
\max_{0\le t\le T}\left\|\theta_N^{\varepsilon}\right\|^2 + \int_0^T\left\|\theta_N^{\varepsilon}\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}^2 dt \le C < \infty,
\end{gathered}
\tag{2.17}
$$

Және де

$$\int_0^{T-\delta}\left(\left\|\vec{v}_N^{\varepsilon}(t+\delta)-\vec{v}^{\varepsilon}(t)\right\|^2+\left\|\theta^{\varepsilon}(t+\delta)-\theta^{\varepsilon}(t)\right\|^2\right)dt\le\delta^{1/2}C. \quad (2.18)$$

(2.17) -(2.18) мынандай қатынас аламыз.

$$\lim_{N\to\infty}\vec{v}_N^{\varepsilon}\to\vec{v}^{\varepsilon} * \text{ әлсіз } L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),$$

$$\lim_{N\to\infty}\theta_N^{\varepsilon}\to\theta^{\varepsilon} * \text{ әлсіз } L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),$$

$$\lim_{N\to\infty}\theta_N^{\varepsilon}\to\theta^{\varepsilon} \text{ әлсіз } L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),$$

$$\lim_{N\to\infty}\vec{v}_N^{\varepsilon}\to\vec{v}^{\varepsilon} \text{ әлсіз } L_2(0,T;V_1(\Omega)), \quad (2.19)$$

$$\lim_{N\to\infty}\vec{v}_N^{\varepsilon}\to\vec{v}^{\varepsilon} \text{ күшті } L_2(Q),$$

$$\lim_{N\to\infty}\theta_N^{\varepsilon}\to\theta^{\varepsilon} \text{ күшті } L_2(Q),$$

$$\lim_{N\to\infty}\rho_N^{\varepsilon}\to\rho^{\varepsilon} \text{ әлсіз } L_2(Q).$$

(2.19) қатынасы (2.14) - (2.16) теңдіктерінде $N\to\infty$ кезде шекке көшеді. Сонымен, біз келесіні дәлелдедік.

Теорема 2.1. $\vec{\mathrm{v}}_0 \in V_0, 0 < m \le \rho_0 \le \mathrm{M} < \infty,\ \theta_0(x) \in L_2(\Omega), \quad \rho_0(x) \in W_2^1(\Omega).$ болсын делік, олай болса (2.3)-(2.4) көмекші есебінің кем дегенде бір жалпылама шешімі бар болады және ол үшін мынадай бағалаулар орындалады:

$$\left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;V_0)} + \left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,T;V(\Omega))} \le C < \infty,$$

$$\left\|\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2\Omega)} + \left\|\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)} \le C < \infty,$$

$$0 < m \le \rho^{\varepsilon}(t) \le \mathrm{M} < \infty, \quad \sqrt{\varepsilon}\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le C < \infty,$$

$$\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le C_{\varepsilon}, \quad \left\|\rho_t^{\varepsilon}\right\|_{L_2(Q)} \le C_{\varepsilon} < \infty,$$

Мұнда $C_{\varepsilon} \to \infty,\ \varepsilon \to 0,\ \ C\ \ \varepsilon$-нан тәуелді емес. $V_0 - V_1(\Omega)$ кеңістігінің $L_2(\Omega)$ нормасы бойынша тұйықтамасы.

Ал $\varepsilon \to 0$ болғанда (2.3)-(2.4) көмекші есебінің жалпылама шешімі (1.1)-(1.2) негізгі есебінің жалпылама шешіміне ұмтылады. Келесідей теорема орынды болады

Теорема 2.2. $\vec{\mathrm{v}}_0 \in V_0,\ \ 0 < m \le \rho_0 \le \mathrm{M} < \infty, \quad \theta_0(x) \in L_2(\Omega), \quad \rho_0(x) \in L_\infty(\Omega).$ болсын делік. Олай болса (2.3)-(2.4) көмекші есебінің кем дегенде бірі әлсіз жалпылама шешімі бар болады және ол үшін мынадай бағалаулар орындалады:

$$\left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;V_0)} + \left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,T;V_1(\Omega))} \le C < \infty,$$

$$\left\|\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2\Omega)} + \left\|\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)} \le C < \infty,$$

$$\left\|\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega))} + \left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_2(Q)} \le C < \infty, \quad 0 < m \le \rho^{\varepsilon} \le \mathrm{M} < \infty,$$

Мұнда C барлық уақытта ε-ға тәуелді емес.

Ал $\varepsilon \to 0$ болғанда (2.3)-(2.4) көмекші есебінің әлсіз жалпылама шешімі (1.1)-(1.2) негізгі есебінің әлсіз жалпылама шешіміне ұмтылады.

Бұл жағдайда галеркиндік жуықтау $\left(\rho_N^{\varepsilon}\right)_t,\ \Delta\rho_N^{\varepsilon},\ \ L_2$ бағалауда орны бомайды және Галеркин әдісінде шектік көшуде қосымша дәйектемелерді қажет етеді.

Біріншіден, $\int_0^t \left\|\nabla\rho^N(\tau)\right\|^2 d\tau \le C_1 < \infty,\ \forall t \in [0,T],\ \ \forall N,$

теңсіздігі $\rho_0(x)$. тұжырымда дұрыс болып қалады. Бұл жерден шығатыны, кез-келген $\varepsilon_1,\ 0<\varepsilon_1<T,$ үшін $t_n,\ 0\le t_n\le\varepsilon_1$ нүктесі болады, $\left\|\nabla\rho^N(t_n)\right\|^2 \le C_1\varepsilon_1^{-1},$ кері жағдайда $t=\varepsilon$ кезде ол нүкте болмайды. (2.15) теңдеуін $\Delta\rho^N(x,t)$ көбейту үшін және (t_n,T), интервалында бағалауды шығаруды қайталай отырып

$$\left\|\nabla\rho_N^\varepsilon(t_n)\right\| + \varepsilon\int_{t_n}^t \left\|\Delta\rho_N^\varepsilon(\tau)\right\|^2 d\tau \le \left\|\nabla\rho_N^\varepsilon(t_n)\right\|^2 + C\int_{t_n}^t \left\|\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon(\tau)\right\|_{V_1(\Omega)}^2 d\tau,\ t_n\le t\le T\,.$$

теңдеуін аламыз.

Осылайша $0\le t_n\le\varepsilon_1,$ болса, онда қорытындылаймыз.

$$\max_{\varepsilon\le t\le T}\left\|\nabla\rho_\varepsilon^N(t)\right\|^2 + \varepsilon\int_{\varepsilon_1}^T \left\|\Delta\rho_\varepsilon^N\right\|^2 dt \le C\left(\varepsilon_1^{-1} + \int_0^T \left\|\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\right\|^2\right) \le N_{\varepsilon_1}\,.$$

Осылайша, $Q_{\varepsilon T} = \Omega\times(\varepsilon_1,T)$ цилиндрде (2.18) типтегі теңсіздік орындалады, сонымен қатар тұрақтылар ε_1, тәуелді болады, n-ге тәуелді болмайды. Сондықтан $\vec{\mathrm{v}}^N$ жүйесі кез-келген $\varepsilon_1>0.$ болған кезде

$$L_2(Q_{\varepsilon_1 T}) = L_2([\varepsilon_1;T]\times\Omega)$$

сәйкес деп санауға болады.

(2.14), (2.15) теңдіктеріне көшуде күрделі мүшелері $N\to\infty$ болған кезде

$\mathrm{E} = \int_Q \left(\left(\rho_N^\varepsilon(t)\cdot\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\vec{\omega}\cdot\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\right)dxdt,$ цилиндрінде орындалады,

мұндағы $\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon$ өте сәйкес келеді, ал екінші екінші қосынды $Q_{\varepsilon_1} = \Omega\times(0,\varepsilon_1)$ цилиндрі бойынша интеграл $\varepsilon_1\to 0$ кезде нөлге тең болады, сонымен қатар шамалармен бағаланады.

$\mathrm{M}\max|\nabla\vec{\omega}|\max_{0\le t\le T}\left\|\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\right\|^2\varepsilon_1\to 0,\quad \varepsilon_1\to 0$ ұмтылғанда.

Көбейткіші ε боп келетін интегралдық мүшелерде шекке былайша көшеміз:

$$\lim_{N\to\infty}\int_Q\left(\left(\nabla\rho_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\vec{\omega}\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\right)=\lim_{N\to\infty}\int_{Q_{\varepsilon_1 T}}\left(\left(\nabla\rho_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\vec{\omega}\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\right)dxdt+$$

$$+\lim_{N\to\infty}\int_{Q_T/Q_{\varepsilon_1 T}}\left[\left(\nabla\rho_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\vec{\omega}\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\right]dxdt=\int_{Q_{\varepsilon_1 T}}\left(\left(\nabla\rho_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\vec{\omega}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\right)dxdt+$$

$$+\int_{Q_{\varepsilon_1 T}}\left(\left(\nabla\rho_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\vec{\omega}\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\right)dxdt.$$

Себебі

$$\int_{Q/Q_{\varepsilon_1 T}}\left(\left(\nabla\rho_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\vec{\omega}\cdot\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\right)dxdt,\le\max\left|\vec{\omega}\right|\cdot\left\|\nabla\rho_N^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}\cdot\max_{0\le t\le T}\left\|\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}\le C\varepsilon_1.$$

$\varepsilon_1\to 0$ ұмтылғанда

$$\lim_{N\to\infty}\int_Q\left(\left(\nabla\rho_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\vec{\omega}\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\right)dxdt=\int_Q\left(\left(\nabla\rho_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\vec{\omega}\vec{\mathrm{v}}_N^\varepsilon\right)dxdt.$$

теңдеуін аламыз.

Басқа қосындыларда шекке көшу орындалады.

$$\lim_{N\to\infty}\int_Q\left(\rho_N^\varepsilon\left(\nabla\rho_N^\varepsilon\cdot\nabla\right)\psi,\theta_N^\varepsilon\right)dxdt=\int_Q\left(\rho\left(\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\cdot\nabla\right)\psi,\theta^\varepsilon\right)dxdt.$$

Теорема 2.2 толығымен дәлелденді.

Ескерту. 2.2 тeopeманы дәлелдегеннен көріп отырғанымыздай (2.3)-(2.4) есептерінің жалпы шешімі

$$\frac{\partial\rho^2}{\partial t}+\left(\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\cdot\nabla\right)\rho^\varepsilon=\varepsilon\Delta\rho^\varepsilon,$$

теңдеуін қанағаттандырады. $Q_{\varepsilon_1 T}$, $\varepsilon_1>0$ циллиндердің барлық жерінде.

2.2 Күшті шешім

Алдымен сұйықтықтың 2-өлшемді жағдайда болсын. (2.3) теңдеуін скалярлы түрде $L_2(\Omega)$ көбейтеміз, $\vec{v}_t^{\varepsilon}$:

$$\frac{\upsilon}{2}\frac{d}{dt}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{V_1(\Omega)}^2+\left(\rho^{\varepsilon}\vec{v}_t^{\varepsilon},\vec{v}_t^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)}+\left(\left(\rho^{\varepsilon}\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{v}^{\varepsilon},\vec{v}_t^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)}=$$

$$=\varepsilon\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{v}^{\varepsilon},\vec{v}_t^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)}+\left(\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\left(\vec{e},\vec{v}_t^{\varepsilon}\right)\right)_{L_2(\Omega)} \tag{2.20}$$

(2.20) теңдеуіндегі қосынды мүшелерге Гельдер теңсіздігін қолданамыз.

$$\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{v}^{\varepsilon},\vec{v}_t^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)}\le\left\|\vec{v}_t^{\varepsilon}\right\|\left\|\vec{v}_x^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}\cdot\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)},$$

$$\left|\left(\left(\rho^{\varepsilon}\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{v}^{\varepsilon},\vec{v}_t^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)}\right|\le \mathrm{M}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|\left\|\vec{v}_x^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}\cdot\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}, \tag{2.21}$$

$$\left|\left(\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\left(\vec{e},\vec{v}_t^{\varepsilon}\right)\right)_{L_2(\Omega)}\right|\le M\left\|\theta^{\varepsilon}\right\|\cdot\left\|\vec{v}_t^{\varepsilon}\right\|.$$

Екінші теңдеуді (2.3) көбейтеміз

$$\left(\rho^{\varepsilon}\theta_t^{\varepsilon},\theta_t^{\varepsilon}\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|^2+\left(\rho^{\varepsilon}\left(\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\theta^{\varepsilon},\vec{\theta}_t^{\varepsilon}\right)=0. \tag{2.22}$$

Гельдер теңсіздігі бойынша (2.22) интегралдың сол бөлігін бағалаймыз

$$\left|\left(\left(\rho^{\varepsilon}\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\theta^{\varepsilon},\theta_t^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)}\right|\le \mathrm{M}\left\|\theta_t^{\varepsilon}\right\|\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}\cdot\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}. \tag{2.23}$$

[1] сияқты $\tilde{\Delta}$ операторын енгіземіз, осылайша $\tilde{\Delta}\vec{u}=P_{V_1}\Delta\vec{u},\quad \forall\vec{u}\in W_2^2(\Omega)\cap V_1,$ формуласы бойынша әрекет етеді, мұндағы P_{V_1} – V_1.векторлық кеңістігіндегі жобалау операторы. [2], [5] дәлелденген $\tilde{\Delta},\Delta,$ кейбір қасиеттерін қолданамыз,

$$\left\|\vec{u}\right\|_{W_2^2(\Omega)}\le C\left\|\tilde{\Delta}\vec{u}\right\|_{L_2(\Omega)},\quad \forall\vec{u}\in W_2^2(\Omega)\cap V_1, \tag{2.24}$$

$$\|\Delta\vec{u}\|_{W_2^2(\Omega)} \le C\|\Delta\vec{u}\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall\vec{u}\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),$$

Сонымен теорема мен теңсіздіктен шығатыны

$$\|\vec{u}_x\|_{L_4(\Omega)} \le C\|\tilde{\Delta}\vec{u}\|_{L_2(\Omega)}^{1/2}\|\vec{u}\|_{V_1}^{1/2}. \tag{2.25}$$

Осы қатынас пен Юнг теңсіздігінің көмегімен (2.20)-ден (2.22) оңай шығарамыз.

$$\frac{\upsilon}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\|_{V_1(\Omega)}^2 + m\|\vec{\mathrm{v}}_t^\varepsilon\| \le$$
$$\le \delta\|\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\|^2 + C_\delta\left(\|\Delta\rho^\varepsilon\|^2 + \|\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\|_{V_1(\Omega)}^2\right)\cdot\|\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\|_{V_1(\Omega)}^2 + C\|\theta^\varepsilon\|^2\|\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\|_{V_1(\Omega)}^2, \tag{2.26}$$

$$\frac{d}{dt}\|\theta_x^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + m\|\theta_t^\varepsilon\|^2 \le \delta\|\Delta\theta^\varepsilon\|^2 + C_\delta\|\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\|_{V_1(\Omega)}^2\cdot\|\nabla\theta^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2, \tag{2.27}$$

Келесі есептеулер $\|\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\|, \|\Delta\theta^\varepsilon\|$ бағалауға бағытталған, бағалау $\|\vec{\mathrm{v}}_t^\varepsilon\|, \|\theta_t^\varepsilon\|$, арқылы орындалады, сосын, сәйкес үлгіні таңдай отырып $\delta > 0$, (2.26), (2.27) қатынастары $\|\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\|_{V_1(\Omega)}, \|\theta^\varepsilon\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}$. үшін дифференциалды теңсіздігіне тең болады. (2.3), (2.4) теңдеулерін $\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon(t)$ және $\Delta\theta^\varepsilon(t)$, көбейтеміз, (2.3), (2.4) стационарлы түрде қарастырамыз

$$\upsilon\|\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 = \left(\rho\vec{\mathrm{v}}_t^\varepsilon, \tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\right) + \left((\rho\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\cdot\nabla)\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon, \tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)} -$$
$$-\varepsilon\left((\nabla\rho^\varepsilon\cdot\nabla)\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon, \tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\right) + \left(\rho^\varepsilon\theta^\varepsilon\vec{e}\cdot\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\right), \tag{2.28}$$

$$\|\Delta\theta^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 = \left(\rho\theta_t^\varepsilon, \Delta\theta^\varepsilon\right) + \left((\rho\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\cdot\nabla)\theta^\varepsilon, \Delta\theta^\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)}. \tag{2.29}$$

Бастапқы екі қосынды (2.28), (2.29) стандартты бағаланады

$$\left|\left(\rho^\varepsilon\vec{\mathrm{v}}_t^\varepsilon, \tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)}\right| \le \delta\|\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\|^2 + C_\delta\|\vec{\mathrm{v}}_t^\varepsilon\|^2,$$

$$\left|\left(\rho^{\varepsilon}\left(\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{v}^{\varepsilon},\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)}\right|\le\delta\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^2+C_{\delta}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^4_{V_1(\Omega)},$$

$$\left|\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{v}^{\varepsilon},\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}\right)\right|\le\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}\right\|\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}\cdot\left\|\nabla\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}\le$$

$$\le\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}\right\|\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\cdot\left\|\nabla\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\cdot\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\le$$

$$\le C\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^{3/2}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\cdot\left\|\nabla\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\le\delta\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^2+C_{\delta}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|^2\left\|\nabla\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^2,$$

$$\left|\left(\left(\rho\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\theta^{\varepsilon},\Delta\theta^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega)}\right|\le\mathrm{M}\left\|\Delta\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}\cdot\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}\le$$

$$\le C\left\|\Delta\theta^{\varepsilon}\right\|^{3/2}\cdot\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\left\|\nabla\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^{1/2}_{L_2(\Omega)}\le$$

$$\le\delta\left\|\Delta\theta^{\varepsilon}\right\|^2+C_{\delta}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^2_{V_1(\Omega)}\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Осы теңсіздіктердің көмегімен дифференциалды теңсіздік аламыз

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^2_{V_1(\Omega)}+\left\|\theta\right\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)}\right)+\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}\right\|^2+\left\|\Delta\theta^{\varepsilon}(t)\right\|^2\le$$

$$\le\mathrm{A}(t)\left(\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(t)\right\|^2_{V_1(\Omega)}+\left\|\theta^{\varepsilon}(t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)}\right),\tag{2.30}$$

$$\mathrm{A}(t)=\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(t)\right\|^2_{V_1(\Omega)}+\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\in L_1(0,T).$$

Дифференциалды теңсіздікті (2.30) шеше отырып

$$\max_{0\le t\le T}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(t)\right\|^2_{V_1(\Omega)}+\int_0^T\left\|\vec{v}^{\varepsilon}_t(t)\right\|^2_{L_2(\Omega)}dt\le C<\infty,\tag{2.31}$$

$$\max_{0\le t\le T}\left\|\theta^{\varepsilon}(t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}+\int_0^T\left\|\theta_t^{\varepsilon}(t)\right\|^2_{L_2(\Omega)}\le C<\infty. \qquad (2.32)$$

Теңдеулерін аламыз.

Анықтама 2.3. $\vec{v}^{\varepsilon},\rho^{\varepsilon},p^{\varepsilon},\theta^{\varepsilon},$ функциясының жиынын (2.3)-(2.4) есептерінің күшті шешімі деп атайды, егер олар (2.3)-(2.4) теңдеулеріне жататын туындылардың бірге қосындыланатын болса және сәйкес өлшем бойынша жүйені қанағаттандырады.

Теорема 2.3. Егер $\vec{v}_0(x)\in V_1(\Omega),\ \rho_0(x)\in W_2^1(\Omega),\ \theta_0(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),$ $0<m\le\rho_0(x)\le \mathrm{M}<\infty$ болса және жазықтықта ағатын болса, онда кез-келген соңғы $(0,T)$ уақыт интервалында (2.3)-(2.4) есептерінің бір ғана күшті шешімі бар болады.

Енді біртұтас орта 3-өлшемді облыста болсын, онда:

Теорема 2.4. $\vec{v}_0(x)\in V_1(\Omega),\ \rho_0(x)\in W_2^1(\Omega)$ және $0<m\le\rho_0(x)\le \mathrm{M}<\infty,\ \theta_0(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega).$ болсын делік. Олай болса $(0,T_0),$ уақыт интервалында (2.3)-(2.4) үшөлшемді есебінің шешімі бар болады, оның шамалары

$\left\|\vec{v}_0\right\|_{V_1(\Omega)},\quad \left\|\rho_0\right\|_{W_2^1(\Omega)},\quad \left\|\theta_0\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}$ мәндерімен анықталады.

Дәлелдеу. Расында да, еске сала кетейік, галеркиндік жуықтаулар (2.33) (2.34) қатынастарынан табылады.

$$\left(\rho_N^{\varepsilon}\left(\left(\vec{v}_N^{\varepsilon}\right)_t+\left(\vec{v}_N^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{v}_N^{\varepsilon}\right)-\varepsilon\left(\nabla\rho_N^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{v}_N^{\varepsilon},\vec{\phi}(t)\right)=$$
$$=\left(\upsilon\Delta\vec{v}_N^{\varepsilon}-\nabla\rho_N^{\varepsilon}+\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\vec{e},\vec{\phi}(t)\right), \qquad (2.33)$$

$$\left(\rho_N^{\varepsilon}\left(\left(\theta_N^{\varepsilon}\right)_t+\left(\vec{v}_N^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\theta_N^{\varepsilon}+\nabla\theta_N^{\varepsilon}\right),\psi(t)\right)=0,$$
$$\frac{\partial\rho_N^{\varepsilon}}{\partial t}+\left(\vec{v}_N^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\rho_N^{\varepsilon}=\varepsilon\Delta\rho_N^{\varepsilon}. \qquad (2.34)$$

$\vec{\phi}, \psi$ еркін функциясы үшін дұрыс деп саналады және ол келесі түрде болады:

$$\vec{\phi}(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{H}_j(t)\vec{\omega}_j(x), \quad \psi = \sum_{j=1}^{N} h_j(t)\psi_j(x), \quad \vec{\omega}_j(x), \psi_j(x) - \quad \tilde{\Delta}, \Delta$$

операторларының жеке функцияларының базисі.

(2.33), (2.34) $\vec{\phi} = \sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_j^N(t)\right)_t \cdot \vec{\omega}_j, \quad \psi = \sum_{j=1}^{N}\left(h_j(t)\right)_t \cdot \psi_j$ қабылдасақ. Сонда $\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}, \theta^{\varepsilon}$ үшін бағалаулар (2.26), (2.27) алынады. Енді біз $\{\vec{\omega}_j\}, \{\psi_j\}$ спектрлік есептің шешімі екенін еске саламыз.

$$\upsilon\Delta\vec{\omega}_j - \nabla p_j = \lambda_j \vec{\omega}_j,$$

$$div\vec{\omega}_j = 0, \quad \vec{\omega}_j\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\Delta\psi_j = \Re_j \psi_j, \qquad \psi_j\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

Және

$$\vec{\phi} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \alpha_j^N(t)\vec{\omega}_j, \qquad \psi = \sum_{j=1}^{N} \Re_j \psi_j \beta_j^N(t).$$

Жоғары да айтылғандай $\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}, \theta_N^{\varepsilon}$ (2.31), (2.32) үшін бағалауды аламыз. Осыдан кейін, келесі қатынасты алу қиындық тудырмайды.

$$\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon} \overset{N\to\infty}{\to} \vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon} \text{ әлсіз } L_2\left(0,T; W_2^2(\Omega) \cap V_1(\Omega)\right),$$

$$\left(\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}\right)_t \overset{N\to\infty}{\to} \vec{\mathrm{v}}_t^{\varepsilon} \text{ әлсіз } L_2\left(0,T; V_0(\Omega)\right),$$

$$\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon} \overset{N\to\infty}{\to} \mathrm{v}^{\varepsilon} \quad * \text{ әлсіз } L_\infty\left(0,T; V_1(\Omega)\right),$$

$$\theta_N^{\varepsilon} \overset{N\to\infty}{\to} \theta^{\varepsilon} \text{ әлсіз } L_2\left(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),$$

$$\left(\theta_N^{\varepsilon}\right)_t \overset{N\to\infty}{\to} \theta_t^{\varepsilon} \text{ әлсіз } L_2\left(0,T; L_2(\Omega)\right),$$

$$\theta_N^\varepsilon \overset{N\to\infty}{\to} \theta^\varepsilon \text{ әлсіз } L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),$$

$$\vec{v}_N^\varepsilon \overset{N\to\infty}{\to} \vec{v}^\varepsilon \text{ күшті } L_2(0,T;V_0(\Omega)),$$

$$\theta_N^\varepsilon \overset{N\to\infty}{\to} \theta^\varepsilon \text{ күшті } L_2(0,T;L_2(\Omega)).$$

Бұдан кейін (2.33), (2.34) теңдіктеріне көшеміз, $N\to\infty$. кезінде (2.3)-(2.4) есептерінің шешімі $\rho^\varepsilon, \vec{v}^\varepsilon, \theta^\varepsilon$ болатынын оңай аңғаруға болады.

Теорема 2.3 толығымен дәлелденді.

Жалпы үшөлшемді есепте үлкен туындылардың априорлы бағасын қорытындылауға қысқаша тоқталайық. Үшөлшемді жағдайларда (2.25) - (2.30) есептеулерді қайталаймыз, келесі теңсіздікті аламыз

$$\frac{d}{dt}\left\|\vec{v}^\varepsilon\right\|_{V_1(\Omega)} + \left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon\right\|^2 \le \left[\left\|\vec{v}^\varepsilon(t)\right\|_{V_1(\Omega)}^6 + \left\|\Delta\rho^\varepsilon(t)\right\|^6\right], \tag{2.35}$$

$$\frac{d}{dt}\left\|\theta^\varepsilon(t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}^2 + \left\|\Delta\theta^\varepsilon\right\|^2 \le \left\|\vec{v}^\varepsilon(t)\right\|_{V_1(\Omega)}^6 + \left\|\nabla\theta^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}^4. \tag{2.36}$$

Диффузия теңдеуін $\Delta\rho_t^\varepsilon$ көбейтеміз және Ω аймағы бойынша интегралдаймыз, нәтижесінде

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Delta\rho^\varepsilon\right\|^2 + \left\|\nabla\rho_t^\varepsilon\right\|^2 = -\left(\left(\vec{v}^\varepsilon\cdot\nabla\rho^\varepsilon\right),\Delta\rho_t^\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)}.$$

Теңдеуін аламыз. Оң бөлікті интегралдағаннан кейін бағалаймыз

$$\left(\left(\vec{v}^\varepsilon\cdot\nabla\right)\rho^\varepsilon,\Delta\rho_t^\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= -\left(\left(\vec{v}^\varepsilon\cdot\nabla\right)\nabla\rho^\varepsilon,\nabla\rho_t^\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)} - \left(\left(\nabla\rho_t^\varepsilon\cdot\nabla\right)\vec{v}^\varepsilon,\nabla\rho_t^\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)} \le \tag{2.37}$$

$$\le C\left\|\nabla\rho_t^\varepsilon\right\|\left[\max_\Omega\left|\vec{v}^\varepsilon\right|\cdot\left\|\Delta\rho^\varepsilon\right\| + \left\|\vec{v}_x^\varepsilon\right\|_{L_3(\Omega)}\left\|\nabla\rho_t^\varepsilon\right\|_{L_6(\Omega)}\right].$$

Енгізу теоремасынан аламыз:

$$\max_{\Omega}\left|\vec{v}^{\varepsilon}\right| \le C\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(\Omega)}^{1/2}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{V_1(\Omega)}^{1/2},$$

$$\left\|\vec{v}_x^{\varepsilon}\right\|_{L_3(\Omega)} \le C\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(\Omega)}^{1/2}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{V_1(\Omega)}^{1/2}, \qquad (2.38)$$

$$\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_6(\Omega)} \le C\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

(2.37), (2.38) теңдеулерін пайдаланып

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\|^2 + \left\|\nabla\rho_t^{\varepsilon}\right\|^2 \le C\left\|\nabla\rho_t^{\varepsilon}\right\|\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\| \left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{V_1(\Omega)}^{1/2}\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}(t)\right\|^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left\|\nabla\rho_t^{\varepsilon}\right\|^2 + \delta\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}(t)\right\|^2 + C_{\delta}\left(\left\|\vec{v}^{\varepsilon}\right\|_{V_1(\Omega)}^6 + \left\|\rho^{\varepsilon}\right\|_{W_2^2(\Omega)}^6\right)$$

(2.35), (2.36) қоямыз және соңғы теңсіздіктен

$$y(t) = \frac{\upsilon}{2}\left\|\vec{v}^{\varepsilon}(t)\right\|_{V_1(\Omega)}^2 + \varepsilon\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}(t)\right\|^2 + \left\|\theta^{\varepsilon}(t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}^2,$$

болатынын тұжырымдай отырып

$$\frac{d}{dt}y(t) + \left\|\nabla\rho^{\varepsilon}(t)\right\|^2 + m\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}(t)\right\|^2 + \left\|\Delta\theta^{\varepsilon}\right\|^2 \le C(y(t))^3.$$

Дифференциалдық теңсіздік аламыз.

Осы теңсіздіктен шығатыны, $[0,T_0]$ аз уақыт бөлігінде оның шамалары $y(t)$ функциясында

$$y(0) = \frac{\upsilon}{2}\left\|\vec{v}_0\right\|_{V_1(\Omega)}^2 + \left\|\theta_0\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}^2 + \varepsilon\left\|\Delta\rho_0^{\varepsilon}\right\|^2,$$

мәндермен анықталады,

$\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}(t)\right\| + \left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^{\varepsilon}(t)\right\|^2$ шектелген, оны қосамыз

$$\max_{0\le t\le T_0}\left[\left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t)\right\|_{V_1(\Omega)}+\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}(t)\right\|\right]\le C<\infty,$$

$$\int_0^{T_0}\left(\left\|\nabla\rho_t^{\varepsilon}(t)\right\|^2+\left\|\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}(t)\right\|^2\right)dt\le C<\infty, \tag{2.39}$$

$$\int_0^{T_0}\left\|\Delta\theta^{\varepsilon}\right\|^2dt+\max_{0\le t\le T_0}\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}(t)\right\|^2\le C<\infty.$$

(2.33), (2.34) теңдеулерінен галеркиндік жуықтаулар $\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon},\rho_N^{\varepsilon},\theta_N^{\varepsilon}$, үшін мынадай бағалау аламыз, (2.39) сияқты.

$$\max_{0\le t\le T_0}\left[\left\|\theta_N^{\varepsilon}(t)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}+\left\|\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}(t)\right\|_{V_1(\Omega)}+\left\|\rho_N^{\varepsilon}(t)\right\|_{W_2^1(\Omega)}\right)\le C<\infty,$$

$$\int_0^{T_0}\left(\left\|\nabla\left(\rho_N^{\varepsilon}\right)_t(t)\right\|^2+\left\|\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}(t)\right\|^2+\left\|\Delta\theta_N^{\varepsilon}(t)\right\|^2\right)dt\le C<\infty.$$

Осылайша, біз қатынастарды аламыз

$$\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}\overset{N\to\infty}{\to}\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t)\text{ әлсіз } L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\cap V_1(\Omega)\right),$$

$$\theta_N^{\varepsilon}\overset{N\to\infty}{\to}\theta^{\varepsilon}(t)\text{ әлсіз } L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),$$

$$\rho_N^{\varepsilon}\overset{N\to\infty}{\to}\rho^{\varepsilon}(t)\text{ әлсіз } L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right),$$

$$\vec{\mathrm{v}}_N^{\varepsilon}\overset{N\to\infty}{\to}\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t)\text{ күшті } L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right),$$

$$\theta_N^{\varepsilon}\overset{N\to\infty}{\to}\theta^{\varepsilon}(t)\text{ күшті } L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right).$$

(2.3)-(2.4) есебінің $\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}(t),\rho^{\varepsilon}(t),\theta^{\varepsilon}(t)$ күшті шешімдері екенін анғарамыз. Сонымен, теорема 2.4 толығымен дәлелденді.

2.3 Диффузия коэффициенті $\varepsilon \to 0$ болғанда жинақтылық

Біртексіз сұйықтықтың температуралық моделін қарастырамыз

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = \upsilon\Delta\vec{v} - \nabla p + \rho\theta\vec{e}, \tag{2.40}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\theta\right) = \Delta\theta, \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\rho = 0, \qquad div\vec{v} = 0, \tag{2.42}$$

$$\vec{v}\big|_{t=0} = v_0(x),\ \theta\big|_{t=0} = \theta_0(x),\ \rho\big|_{t=0} = \rho_0(x) \quad , \tag{2.43}$$

$$\vec{v}\big|_{\partial\,\Omega} = 0, \quad \theta\big|_{\partial\,\Omega} = 0. \tag{2.44}$$

Сонымен қатар біртексіз сұйықтықтардың диффузиялық моделін қарастырамыз.

$$\rho^{\varepsilon}\left(\frac{\partial \vec{v}^{\varepsilon}}{\partial t} + (\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{v}^{\varepsilon}\right) = \upsilon\Delta\vec{v}^{\varepsilon} - \nabla p^{\varepsilon} + \varepsilon(\nabla\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{v}^{\varepsilon} + \rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\vec{e}, \tag{2.45}$$

$$\rho^{\varepsilon}\left(\frac{\partial \theta^{\varepsilon}}{\partial t} + (\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\theta^{\varepsilon}\right) = \Delta\theta^{\varepsilon}, \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial \rho^{\varepsilon}}{\partial t} + (\vec{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\rho^{\varepsilon} = \varepsilon\Delta\rho^{\varepsilon}, \qquad div\vec{v}^{\varepsilon} = 0, \tag{2.47}$$

$$\vec{v}^{\varepsilon}\big|_{t=0} = v_0(x),\ \theta^{\varepsilon}\big|_{t=0} = \theta_0(x),\ \rho^{\varepsilon}\big|_{t=0} = \rho_0(x), \tag{2.48}$$

$$\vec{v}^{\varepsilon}\big|_{\partial\,\Omega} = 0, \quad \theta^{\varepsilon}\big|_{\partial\,\Omega} = 0,\ \frac{\partial \rho^{\varepsilon}}{\partial \vec{n}} = 0. \tag{2.49}$$

$\Omega \subset E^2$ деп есептейміз, $\partial\Omega \subset C^2$ аймағында

Теорема 2.5.

$$\vec{v}_0(x) \in V_1(\Omega), \quad 0 < m \le \rho_0(x) \le M, \quad \theta_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),$$

болсын делік, олай болса (2.40) - (2.49) есептерінің шешімі

(2.40) - (2.44) есептерінің шешіміне $\varepsilon \to 0.$болғанда жинақталады. 2.5 теореманы дәлелдеу үшін алдымен

Лемма 2.2.

Егер

$$\vec{\mathrm{v}}_0(x) \in V_1(\Omega),\ 0 < m \le \rho_0(x) \le \mathrm{M} < \infty,\ \theta_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Онда мынандай бағалау бар

$$0 < m \le \rho^{\varepsilon}(x,t) \le \mathrm{M},\ \left\|\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^2 \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)} \le C < \infty.$$

$$\left\|\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)} + \left\|\theta_t^{\varepsilon}\right\|_{L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right)} \le C < \infty,$$

$$\left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^2 \cap V_1(\Omega)\right)} + \left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;V_1(\Omega))} + \left\|\vec{\mathrm{v}}_t^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,T;V_1(\Omega))} \le C < \infty,$$

$C -$ тұрақтысы ε тәуелді емес.

Дәлелдеу. Параболалық теңдеулердің принциптерімен

$$0 < m \le \rho^{\varepsilon}(t) \le \mathrm{M} < \infty.$$

Бұдан басқа, бірқалыпты априорлы бағалауды алу оңай

$$\left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,T;V_1(\Omega))} +$$

$$+\left\|\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_2\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)} \le C < \infty.$$

(3.8) теңдеуін $\Delta\rho^{\varepsilon}$ көбейту арқылы Ω интегралдаймыз

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|^2 + \int_{\Omega}\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\rho^{\varepsilon}\Delta\rho^{\varepsilon}dx + \varepsilon\left\|\Delta\rho^{\varepsilon}\right\| = 0$$

Интегралды келесі жолмен бағалаймыз

$$\int_{\Omega}\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\rho^{\varepsilon}\Delta\rho^{\varepsilon}dx = -\int_{\Omega}\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\rho^{\varepsilon}\nabla\rho^{\varepsilon}dx =$$

$$= -\int_{\Omega} \left(\nabla \vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon} \cdot \nabla\right) \rho^{\varepsilon} \nabla \rho^{\varepsilon} dx \le \left\|\nabla \mathrm{v}^{\varepsilon}\right\| \left\|\nabla \rho^{\varepsilon}\right\|^{2}_{L_4(\Omega)} \le$$

$$\le \max\left|\rho^{\varepsilon}\right| \left\|\Delta \rho^{\varepsilon}\right\| \le \left\|\nabla \mathrm{v}^{\varepsilon}\right\| \left\|\Delta \rho^{\varepsilon}\right\| \le \le \frac{\varepsilon}{2}\left\|\Delta \rho^{\varepsilon}\right\|^{2} + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\nabla \vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|^{2}.$$

Осыдан (2.50) теңдеуін аламыз

$$\left\|\nabla \rho^{\varepsilon}\right\|^{2}_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \varepsilon \int_0^T \left\|\Delta \rho^{\varepsilon}\right\|^{2} dt \le \frac{C}{\varepsilon}. \tag{2.50}$$

(2.49) теңдеуін $\frac{1}{\rho}\Delta\theta^{\varepsilon}$ көбейтеміз

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla \theta^{\varepsilon}\right\|^{2} + \left\|\Delta \theta^{\varepsilon}\right\|^{2} = \int_{\Omega} \left(\nabla \vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon} \cdot \nabla\right) \theta^{\varepsilon} \cdot \nabla \theta^{\varepsilon} dx,$$

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon} \cdot \nabla \theta^{\varepsilon}\right) \nabla \theta^{\varepsilon} dx \le \left\|\nabla \vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\| \left\|\nabla \theta^{\varepsilon}\right\|^{2}_{L_4(\Omega)} \le$$

$$\le C\left\|\nabla \vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|^{2} \left\|\Delta \theta^{\varepsilon}\right\| \left\|\nabla \theta^{\varepsilon}\right\| \le \frac{1}{2}\left\|\Delta \theta^{\varepsilon}\right\|^{2} + C\left\|\nabla \vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|^{2} \left\|\nabla \theta^{\varepsilon}\right\|^{2}.$$

интегралдаудан кейін бөлік бойынша

$$\left\|\nabla \theta^{\varepsilon}\right\|^{2}_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \int_0^T \left\|\Delta \theta^{\varepsilon}\right\|^{2}_{L_2(\Omega)} dt \le C < \infty. \tag{2.51}$$

Енді біз (2.45) теңдеуді $\frac{1}{\rho}\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}$ скалярлы түрде коюбейтеміз $L_2(\Omega)$ аймағында, нәтижесінде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|^{2}_{V_1(\Omega)} + \frac{\upsilon}{\mathrm{M}}\left\|\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}\right\|^{2} \le \int_{\Omega} \left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon} \cdot \nabla\right) \vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon} \cdot \tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon} dx +$$

$$+ \varepsilon \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^{\varepsilon}} \left(\nabla \rho^{\varepsilon} \cdot \nabla \vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right) \cdot \tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon} dx + \int_{\Omega} \theta^{\varepsilon} \rho^{\varepsilon} \vec{e} \cdot \tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon} dx. \tag{2.52}$$

Интегралды енгізу теоремасы арқылы бағалаймыз.

$$\int_\Omega \left(\vec{v}^\varepsilon \cdot \nabla\right)\vec{v}^\varepsilon \tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon dx \le \left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon\right\| \left\|\nabla\vec{v}^\varepsilon\right\|_{L_4(\Omega)} \left\|\vec{v}^\varepsilon\right\|_{L_4(\Omega)} \le$$

$$\le \delta \left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\nabla\vec{v}^\varepsilon\right\|^4_{L_2(\Omega)} C\delta,$$

$$\varepsilon\int_\Omega \frac{1}{\rho^\varepsilon}\left(\nabla\rho^\varepsilon \cdot \nabla\right)\vec{v}^\varepsilon \cdot \tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon dx \le \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}} \left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon\right\| \left\|\nabla\rho^\varepsilon\right\|_{L_4(\Omega)} \left\|\nabla\vec{v}^\varepsilon\right\|_{L_4(\Omega)} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}} \left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon\right\| \max_\Omega \left|\rho^\varepsilon\right| \left\|\Delta\rho^\varepsilon\right\|^{1/2} \left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon\right\|^{1/2}_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le C\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon\right\|^{3/2}_{L_2(\Omega)} \varepsilon \left\|\Delta\rho^\varepsilon\right\|^{1/2} \left\|\vec{v}^\varepsilon\right\|^{1/2}_{V_1(\Omega)} \le \delta \left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon\right\|^2 + C_\delta \varepsilon^2 \left\|\Delta\rho^\varepsilon\right\|^2 \cdot \left\|\vec{v}^\varepsilon\right\|^2_{V_1(\Omega)},$$

$$\int_\Omega \rho^\varepsilon\theta^\varepsilon \cdot \vec{\ell}\,\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon dx \le \mathrm{M}\left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

(2.52)-ден δ кіші болғанда дифференциалды теңсіздік шығады

$$\frac{d}{dt}\left\|\vec{v}^\varepsilon\right\|^2_{V_1(\Omega)} + \left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon\right\|^2 \le \varepsilon^2 \left\|\Delta\rho^\varepsilon\right\|^2 \left\|\vec{v}^\varepsilon\right\|^2_{V_1(\Omega)} + C\left\|\vec{v}^\varepsilon\right\|^4_{V_1(\Omega)}. \tag{2.53}$$

Бұдан бірқалыпты бағалау шығады

$$\max_{0\le t\le T}\left\|\vec{v}^\varepsilon\right\|^2_{V_1(\Omega)} + \int_0^T \left\|\tilde{\Delta}\vec{v}^\varepsilon\right\|^2 dt \le C < \infty. \tag{2.54}$$

Сонымен қатар $\varepsilon^2\int_0^T \left\|\Delta\rho^\varepsilon\right\|^2 dt \le C < \infty$, интегралы шектеулі, ол (2.50) бағалаудан шығады.Сонымен лемма 2.2 дәлелденді.

Лемма 2.2 келесі қатынас шығады.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \vec{v}^\varepsilon \to \vec{v} \text{ әлсіз } L_2\left(0,T;W_2^2 \cap V_1(\Omega)\right),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\theta^{\varepsilon}\to\theta \text{ әлсіз } L_2\left(0,T;W_2^2\cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\rho^{\varepsilon}\to\rho * \text{ әлсіз } L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\vec{\text{v}}^{\varepsilon}\to\vec{\text{v}} \text{ күшті } L_2(0,T;L_2(\Omega)),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\theta^{\varepsilon}\to\theta \text{ күшті } L_2(0,T;L_2(\Omega)),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\theta_t^{\varepsilon}\to\theta_t \text{ күшті } L_2(0,T;L_2(\Omega)),$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\vec{\text{v}}_t^{\varepsilon}\to\vec{\text{v}}_t \text{ әлсіз } L_2(0,T;L_2(\Omega)).$$

Енді (2.45) теңдеуін $\vec{\phi}(x,t)\in C^1\left(0,T;W_2^2(\Omega)\cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$ көбейтеміз, (2.46) теңдеуін $\psi(x,t)\in C^1(0,T;W_2^1(\Omega))$ көбейтеміз, (2.47) теңдеуін $\varphi(x,t)\in C^1(0,T;W_2^1(\Omega))$ көбейтеміз және $Q=[0,T]\times\Omega$, бойынша интегралдаймыз, нәтиесінде мына теңдіктерді аламыз

$$\left(\vec{\text{v}}^{\varepsilon}\rho^{\varepsilon},\vec{\phi}_t+(\vec{\text{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\phi}+(\nabla\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla)\vec{\phi}\right)_{L_2(Q)}=$$
$$=\left(\upsilon\Delta\vec{\text{v}}^{\varepsilon}-\nabla\rho^{\varepsilon},\vec{\phi}\right)_{L_2(Q)}+\left(\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon}\vec{\ell}\cdot\vec{\phi}\right)_{L_2(\Omega)}+\int_{\Omega}\rho_0\vec{\text{v}}_0\phi(0)dx, \tag{2.55}$$

$$\left(\rho^{\varepsilon}\theta^{\varepsilon},\psi_t+(\vec{\text{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\psi\right)-\left(\Delta\theta^{\varepsilon},\psi\right)=\int_{\Omega}\rho_0\theta_0\psi(0)dx\,, \tag{2.56}$$

$$\left(\rho^{\varepsilon},\varphi_t+(\vec{\text{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\varphi\right)_{L_2(\Omega)}+\left(\nabla\rho^{\varepsilon},\nabla\varphi\right)\cdot\varepsilon=\int_{\Omega}\rho_0\varphi(0)dx\,. \tag{2.57}$$

Әрі қарай (2.55) - (2.57) $\varepsilon\to 0$ шегімен көшеміз. $\varepsilon\to 0$ шегіне көшудің қиынырақ орнына тоқталайық

$$\varepsilon\int_0^T\int_\Omega(\nabla\rho^\varepsilon\cdot\nabla)\vec{\phi}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\rho^\varepsilon dx\le \mathrm{M}\varepsilon\int_0^T\left(\left\|\nabla\rho^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\right\|_{L_4(\Omega)}\left\|\nabla\vec{\phi}\right\|_{L_4(\Omega)}\right)dt\le$$

$$\le\varepsilon\mathrm{M}\varepsilon\int_0^T\left\|\nabla\rho^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\right\|_{V_1\ (\Omega)}\left\|\nabla\vec{\phi}\right\|_{L_4(\Omega)}dt\le$$

$$\le C\varepsilon\max_t\left\|\nabla\rho^\varepsilon\right\|\int_0^T\left\|\nabla\vec{\phi}\right\|_{L_4(\Omega)}\le C\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\left\|\nabla\vec{\phi}\right\|_{L_4(\Omega)}\le C\sqrt{\varepsilon},$$

яғни

$$\varepsilon\int_0^T\int_\Omega(\nabla\rho^\varepsilon\cdot\nabla)\vec{\phi}\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon\rho^\varepsilon dx\to 0\ ,\ \varepsilon\to 0$$

және

$$\int_0\varepsilon\int_0^T\nabla\rho^\varepsilon\nabla\varphi dx\to 0\ ,\varepsilon\to 0$$

$\varepsilon\to 0$ кезде (2.57) теңдігі интегралды теңдікке көшеді.

$$\left(\rho,\varphi_t+(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)\varphi\right)=\int_\Omega\rho_0\varphi(0)dx\ .$$

$\varepsilon\to 0$ кейін (2.55), (2.56)-ден (2.40), (2.41) теңдеулерін аламыз. Сонымен, 2.5 теоремасы толығымен дәлелденді.. Енді (2.45) - (2.49) есептерінің шешімін $\varepsilon\to 0$ кезде (2.40) - (2.44) есептерінің шешіміне ұқсастығын бағалаймыз. $\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon=\vec{\mathrm{v}}+\vec{w},\ p^\varepsilon=p+q,\ \rho^\varepsilon=\rho+\pi,\ \theta^\varepsilon=\theta+H$ деп аламыз.

Сонда (2.40) - (2.49) бойынша теңдеуді аламыз.

(3.6) - (3.10) теңдеулерінің жалпы шешімі (3.1) - (3.5) теңдеулерінің жалпы шешіміне ұмтылатындығын дәлелдейміз. Ол ушін $\vec{\mathrm{v}}^\varepsilon-\vec{\mathrm{v}}=\vec{w},\ \theta^\varepsilon-\theta=\mathrm{H},\ \rho^\varepsilon-\rho=\pi,\ p^\varepsilon-p=q$ белгілеп аламыз.

(3.1) - (3.10) теңдеулер бойынша

$$\rho^{\varepsilon}\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}+\pi\frac{\partial\,\vec{\mathrm{v}}}{\partial t}+\rho^{\varepsilon}\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{w}+\pi\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\right)\vec{\mathrm{v}}=$$

$$=\upsilon\Delta\vec{w}-\nabla q+\varepsilon\left(\nabla\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{w}+\left(\nabla\pi\cdot\nabla\right)\vec{\mathrm{v}}+ \tag{2.58}$$

$$+\mathrm{H}\rho^{\varepsilon}\vec{e}+\theta^{\varepsilon}\pi\vec{e},\qquad div\vec{w}=0,$$

$$\pi^{\varepsilon}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial t}+\pi\frac{\partial\theta}{\partial t}+\pi\left(\left(\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\theta^{\varepsilon}\right)+\rho\left(\vec{w}\cdot\nabla\right)\theta^{\varepsilon}+\rho\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\right)\mathrm{H}=\Delta\mathrm{H}, \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}+\vec{w}\cdot\nabla\rho+\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\right)\pi=\varepsilon\left(\Delta\pi+\Delta\rho\right). \tag{2.60}$$

(2.58), (2.59), (2.60) $\vec{w},\mathrm{H},\pi$ көбейтеміз және Ω бойынша интегралдаймыз. Нәтижесінде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\rho^{\varepsilon}}\,\vec{w}\right\|^{2}+\frac{1}{2}\left(\rho_{t}^{\varepsilon},\vec{w}^{2}\right)+\left(\pi\vec{w}_{t},\vec{w}\right)+\left(\left(\rho^{\varepsilon}\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\right)\vec{w},\vec{w}\right)+$$

$$+\left(\rho^{\varepsilon}\cdot\vec{w}\cdot\nabla\right)\vec{\mathrm{v}},\vec{w})+\left(\pi\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\right)\vec{\mathrm{v}},\vec{w}\right)=\upsilon\left\|\nabla\vec{w}\right\|^{2}+\varepsilon\left(\left(\nabla\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{w},\vec{w}\right)+ \tag{2.61}$$

$$+\varepsilon\left(\nabla\pi\cdot\nabla\right)\vec{\mathrm{v}},\vec{w})+\left(\mathrm{H}\rho^{\varepsilon}\vec{e}+\theta^{\varepsilon}\pi\vec{e},\vec{w}\right),$$

$$\left(\rho\mathrm{H}_{t},\mathrm{H}\right)+\left(\pi\theta_{t},\mathrm{H}\right)+\left(\left(\pi\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\theta^{\varepsilon},\mathrm{H}\right)+$$

$$+\left(\rho\left(\vec{w}\cdot\nabla\right)\theta^{\varepsilon},\mathrm{H}\right)+\left(\rho\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\right)\mathrm{H},\mathrm{H}\right)+\left\|\nabla\mathrm{H}\right\|^{2}=0, \tag{2.62}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\left\|\pi\right\|^{2}}{\partial t}+\left(\left(\vec{w}\cdot\nabla\rho\right)\mathrm{H}+\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\right)\pi,\pi\right)+\varepsilon\left(\nabla\pi+\nabla\rho,\nabla\pi\right)=0\,. \tag{2.63}$$

Енді Гельдер теңсіздігі бойынша (2.61) - (2.63) бағалаймыз

$$\left|\left(\pi,\vec{\mathrm{v}}_{t},\vec{w}\right)\right|\leq\max\left|\vec{\mathrm{v}}_{t}\right|\left\|\pi\right\|\left\|\vec{w}\right\|,$$

$$\frac{1}{2}\left(\rho_{t}^{\varepsilon}\vec{w}^{2}\right)+\left(\left(\rho^{\varepsilon}\cdot\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{w},\vec{w}\right)+\varepsilon\left(\left(\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\vec{w},\vec{w}\right)=0$$

$$\left|\left(\rho^{\varepsilon}(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{w},\vec{w}\right)\right|\le\max\left|\rho^{\varepsilon}\cdot\nabla\vec{\mathrm{v}}\right|\,\|\vec{w}\|^{2},$$

$$\left|\left(\pi(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)\vec{\mathrm{v}},\vec{w}\right)\right|\le\max\left|(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)\vec{\mathrm{v}}\right|\,\|\pi\|\,\|\vec{w}\|,$$

$$\varepsilon\left|\left((\nabla\pi\cdot\nabla)\vec{\mathrm{v}},\vec{w}\right)\right|\le\varepsilon\max|\nabla\vec{\mathrm{v}}|\,\|\nabla\pi\|\,\|\vec{w}\|\le\varepsilon\cdot\delta\|\nabla\pi\|^{2}+C\delta\cdot\varepsilon\|\vec{w}\|^{2},$$

$$\left|\left(\left(\mathrm{H}\rho^{\varepsilon}+\theta^{\varepsilon}\cdot\pi\right)\vec{\ell},\vec{w}\right)\right|\le C\left(\|\mathrm{H}\|\cdot\|\vec{w}\|+\|\pi\|\cdot\|\vec{w}\|\right),$$

$$\left|\left(\pi\theta_{t},\mathrm{H}\right)\right|\le\|\pi\|\cdot\|\mathrm{H}\|\max|\theta_{t}|,$$

$$\frac{1}{2}\left|\left(\rho_{t},\mathrm{H}^{2}\right)\right|\le\frac{1}{2}\max|\rho_{t}|\,\|\mathrm{H}\|^{2},$$

$$\left|\left(\pi\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\theta^{\varepsilon},\mathrm{H}\right)\le\max\left|\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right|\,\|\pi\|_{L_2(\Omega)}\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}\|\mathrm{H}\|_{L_2(\Omega)}\le$$

$$\le C\left\|\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\left\|\Delta\theta^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\|\pi\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\mathrm{H}\|_{L_2(\Omega)}\le$$

$$\le\delta\|\nabla\mathrm{H}\|^{2}+C\left\|\tilde{\Delta}\vec{\mathrm{v}}\right\|\left\|\Delta\theta^{\varepsilon}\right\|\|\pi\|^{2}_{L_2(\Omega)},$$

$$\left|\left(\rho(\vec{w}\cdot\nabla)\theta^{\varepsilon},\mathrm{H}\right)\right|\le\max|\rho|\,\|\vec{w}\|_{L_2(\Omega)}\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}\|\mathrm{H}\|_{L_4(\Omega)}\le$$

$$\le C\|\mathrm{H}\|^{1/2}\|\mathrm{H}\|^{1/2}\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|_{L_4(\Omega)}\cdot\|\vec{w}\|\le$$

$$\le\left\|\nabla\theta^{\varepsilon}\right\|^{2}_{L_4(\Omega)}\|\vec{w}\|^{2}+\delta\|\mathrm{H}\|^{2}+C\delta\|\mathrm{H}\|^{2},$$

$$\left(\rho(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)\mathrm{H},\mathrm{H}\right)\le\max_{\Omega}|\rho\vec{\mathrm{v}}|\,\|\nabla\mathrm{H}\|\cdot\|\mathrm{H}\|\le\delta\|\nabla\mathrm{H}\|^{2}+C\delta\|\mathrm{H}\|^{2},$$

$$\left|\left((\vec{w}\cdot\nabla)\rho,\mathrm{H}\right)+\left((\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)\pi,\pi\right)\right|=\left|(\vec{w}\cdot\nabla)\rho,\mathrm{H}\right|\le\max|\nabla\rho|\,\|\vec{w}\|\,\|\mathrm{H}\|,$$

$$\varepsilon\left(\nabla\pi+\nabla\rho,\nabla\pi\right)\ge\varepsilon\|\nabla\pi\|^{2}-\varepsilon\|\nabla\rho\|\,\|\nabla\pi\|\ge\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla\pi\|^{2}-\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla\rho\|^{2}.$$

(2.61) - (2.63)-да Гронуолла леммасын қолдана отырып осы бағалауды қоямыз

$$\max_{0\le t\le T}\left(\|\vec{w}\|^2+\|\pi\|^2+\|\mathrm{H}\|^2\right)+\int_0^T\left(\|\nabla\vec{w}\|^2+\|\nabla\mathrm{H}\|^2\right)dt+\varepsilon\int_0^T\|\nabla\pi\|^2\,dt\le C\varepsilon. \qquad (2.64)$$

Осыдан келесі шығады

$$\int_0^T\left\|\nabla\rho^{\varepsilon}\right\|^2 dt\le C<\infty. \qquad (2.65)$$

Салдар. Біртексіз сұйықтықтың диффузиялық моделінің шешімі ε бойынша бірқалыпты (2.65) бағалаудан тұрады.

ҚОРЫТЫНДЫ

Зерттеу нәтижелері бойынша қысқаша қорытындылар:

Бұл бітіру жұмысында сығылмайтын біртексіз біртұтас ортаның стационарлық емес диффузиялық емес 3 өлшемді температуралық пішімін негізгі есеп ретінде қарастырып, оны шенелген облыста диффузиялық көмекші есеппен жуықтадық, яғни жуықтама есепте негізгі есептің теңдеулеріне көмекші параметр енгізіп, оны диффузия коэффициенті ретінде қарастырдық. Сонда мұндағы негізгі зерттеу – көмекші есептің қандай да бір шешімдерінің бар болуы мен көмекші параметрдің нолге ұмтылған сәтінде сол шешімдердің көмекші негізгі физикалық есептің сәйкес шешімдеріне жинақталуын дәлелдеу.

Бітіру жұмысында алынған нәтижелер:

- көмекші есептің жалпылама шешімі бар болу мен негізгі есептің сәйкес жалпылама шешіміне жинақталу дәлелденді,
- көмекші есептің әлсіз жалпылама шешімі бар болу мен негізгі есептің сәйкес әлсіз жалпылама шешіміне жинақталу дәлелденді,
- көмекші есептің күшті шешімі бар болу мен негізгі есептің сәйкес күшті шешіміне жинақталуы анықталды,
- Жалпылама және әлсіз жалпылама шешімдер үшін 3 өлшемді жағдайда кез келген уақыт бойындағы априорлы бағалар алынды
- Күшті шешімдер үшін 2 өлшемді есепте кез келген уақыт барысында , ал 3 өлшемді облыс үшін жеткілікті «аз» уақыт арасында бірқалыпты априорлы бағалары алынды.

Қойылған міндеттерді шешу толықтығын бағалау:

Жұмыстың мақсаты. Сығылмайтын біртексіз тұтас ортаның бір диффузиялық емес стационарлық емес моделіне үшін жасанды диффузиялы жуықтама моделін тұрғызу. Сонымен бірге, жуықтама моделдің шешімділігі мен алғашқы диффузиялық моделге жақындығын зерттеу.

Зерттеу әдістемесі. Бұл бітіру жұмыста зерттеліп отырған есептер Хопф жалпылама функциялары кеңістігінде қарастырылады. Шешімдердің бар болуы Галеркин әдісі арқылы және жуық шешімдер тізбегі үшін алынған априорлы бағалау әдісінің негізінде дәлелденеді. Жуықтама есептің шешімдерінің негізгі есеп шешіміне жинақталуы интегралдық теңдіктерде шекке көшу арқылы жүзеге асады.

Нәтижелері мен жаңалығы. Сығылмайтын біртексіз ортаның температуралық пішімі үшін жуықтама есебінің әлсәз жалпылма, жалпылама және күшті шешімдерінің бар болуы мен жинақталуы дәлелденді. Жаңалығы - бұрынғы жұмыстарға қарағанда мұнда зерттеу облысы - 3 өлшемді.

Нәтижелердің ғылыми негіздемесі. Бұл бітіру жұмысының нәтижелері мен қорытындылары теоремалар мен леммалар түрінде айқындалған, олар қатаң математикалық түрде дәлелденген. Бұл жұмыстың нәтижелері осы саладағы басқа да жұмыстардың нәтижелері мен зерттеулерімен үйлесім табады.

Алынған нәтижелер қойылған мақсаттар мен міндеттерді толықтай қамти алады.

Нәтижелерді нақты қолдану бойынша ұсынымдар мен бағдарларын дамыту:

Бұл жұмыс теориялық мағынаға ие. Алынған нәтижелер ауа райын болжау, қоршаған ортаны қорғау, экология және т.б. салалары есептерін зерттеуде қолдануға болады. Сонымен бірге, жұмыстың нәтижелері мен зерттеу методикасы жоғары курс студенттері мен магистранттар үшін оқу процесінде қолдану таба алады.

ПАЙДАЛАНҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородной жидкости. Новосибирск, «Наука», 1983, с. 317.

2. О.А.Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Изд. «Наука», М. 1970, с. 288.

3. Кажихов А.В., Смагулов Ш.С. О корректности краевых задач в одной диффузионной модели неоднородной жидкости. ДАН СССР, т.234, N 2, 330-332, 1976.

4. Кажихов А.В., Смагулов Ш.С. О корректности краевых задач в одной диффузионной модели неоднородной жидкости. - В кн: Численные методы механики сплошной среды, 1976, ВЦ СО АН СССР, т. 7, N 4, с. 75 - 93.

5. Смагулов Ш.С. О параболической аппроксимации уравнений Навье-Стокса. В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Том 10б N 1, 1979, ВЦ и ИТПМ СО АН СССР, с. 112 - 124.

6. Смагулов Ш.С. Аппроксимации уравнений одной модели неоднородной жидкости. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды. ВЦ СО АН СССР, 1977, т. 8, N 2, с. 112 - 124.

7. Энциклопедия систем жизнеобеспечения. Знания об устойчивом развитии. М.: Магистр-Пресс, 2005. Т. 1.

8. Дымников В.П. Моделирование климата и его изменений // Глобальные изменения природной среды и климата: избр. науч. тр.М., 1997. С. 21-231. Ж-97/21138.

9. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1998.

10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

11. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.; СПб.: Физматлит, 2001.

12. Калиткин Н.Н.Численные методы. М.: Наука, 1978.

13. Рындин Е.А. Методы решения задач математической физики. М., 2003.

14. Бердалиев Д.А. Теорема существования обобщенного решения температурной диффузионной модели неоднородной жидкости //Вестник КазГУ, сер. мат., мех., инф., Алматы, 1998, №11, с.27-34.

15. Магзумова Э.М., Смагулов Ш.С., Фараг М.Х. К теории ε-аппроксимации уравнений Навье-Стокса. Вестник КазГУ, серия мат.,мех.,инф., Алматы,1998, с.87-90

16. Куттыкожаева Ш.Н., Шеркешбаева Б.К. Эллиптико-параболическая аппроксимация диффузионной модели неоднородной жидкости // Вестник КазГУ, серия мат., мех., инф. -Алматы, 2001. - №4(27). -С.99-108.

17. Джаикбаев А.М., Исаев С.А. О параболической аппроксимации диффузионной модели неоднородной жидкости // Моделирование в механике. – Новосибирск, 1990. –Т.4(21), №6. –С.27-40.

18. Шеркешбаева Б.К. ε-аппроксимация для уравнений ветровых течений в океане. Вестник КазГУ, серия мат., мех., инф., №2(16), Алматы, 1999, с.143-152.

19. Соболевский П.Е., Васильев В. В. Об одной ε-аппроксимации уравнений Навье-Стокса. - В кн. Численные методы механики сплошной среды Т.9, N5 -Новосибирск, 1978.

20. Байтуленов Ж.Б. Корректность стационарной задачи в одной диффузионной модели неоднородной жидкости. Вестник КазГУ, №4(18), серия мат.,мех.,инф., Алматы,1999, С.3-8

21.Солонников В.А. О разрешимости начально-краевой задачи для уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости // Зап.науч. семинаров Ленинградского отделения мат. инт.-та АН СССР. -1976. - Т.56. – С.128-142.

22.Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. - М.: Мир, 1981. – 408с.

23.Солонников В.А., Щадилов В.Е. Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье-Стокса // Тр. Мат. ин-та АН СССР. -1973. - Т.125. - С.196-210.

24.Рагулин В.В., Смагулов Ш.С. О гладкости решения одной краевой задачи для уравнений Навье-Стокса // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980. - Т.11, №4. - С.113-121.

25.Владимиров Н.Н., Кузнецов Б.Г., Яненко Н.Н. Численные расчеты симметричного обтекания пластинки потоком вязкой несжимаемой жидкости. –В. кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, 1966, С29-35.

26.Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. –408с.

27.Temam R. Une methode d'appraximation de la solution des equations de Navie-Stokos. Bull. Sos. Math., France, 1968, 115-152.

28.Соболевский П.Е., Васильев В. В. Об одной ε-аппроксимации уравнений Навье-Стокса. - В кн. Численные методы механики сплошной среды Т.9, N5 -Новосибирск, 1978.

29.Смагулов Ш.С. К теории аппроксимации уравнений гидродинамики. –В кн.: Численные методы в механике жидкости и газа. ИТПМ СОАН СССР, Новосибирск, 1980, С116-121.

30.Кузнецов Б.Г., Смагулов Ш.С. Аппроксимация уравнений гидродинамики. –В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1975, №2, ВЦ СОАН СССР, С158-175.

31.Кузнецов Б.Г., Смагулов Ш.С. О скорости сходимости решении одной системы уравнений с малым параметром к решению уравнений Навье-Стокса. –В. кн.: Математические модели течения жидкости. ИТПМ СОАН СССР, Новосибирск, 1978, С158-175.

32.Кузнецов Б.Г., Смагулов Ш.С. Об аппроксимации уравнений Навье-Стокса уравнениями эволюционного типа. Механики четверти конгрес. Сентември, 1981, Варна, Болгария, С677-682.

33.Яненко Н.Н., Кузнецов Б.Г., Смагулов Ш.С. On the Approximation of the Navier-Stokes Equations for an incompressible fluid by Evolutinary –Type Equation. Mir . Publishers. Moscow. 1985.

34. Джаикбаев А.М., Исаев С.А. О параболической аппроксимации диффузионной модели неоднородной жидкости // Моделирование в механике. – Новосибирск, 1990. –Т.4(21), №6. –С.27-40.