

Министерство Образования и Науки Республики Казахстан
Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби

Мухаметкалиев А. М.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ТОМСОНА
ПРИ НАГРЕВЕ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

по специальности 6М070500 – “Математическое и компьютерное
моделирование”

Алматы, 2018

Министерство Образования и Науки Республики Казахстан

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби

Механико – математический факультет

“Допущен к защите”

Заведующим кафедрой математического
и компьютерного моделирования

к.м.н.

“ ” _____ 2018

Исахов А.А.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему: “МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ТОМСОНА
ПРИ НАГРЕВЕ”

по специальности 6М070500 – “Математическое и компьютерное
моделирование”

Выполнил

Мухаметкалиев А. М.

Научный руководитель

Профессор

Харин С. Н.

Нормоконтролер

Карибаева М. А.

Алматы, 2018

РЕФЕРАТ

Выпускная работа изложена на 65 страницах машинописного текста, состоит из введения, литературного обзора, экспериментальной части, обсуждения результатов, заключения и списка использованной литературы, содержащего 72 библиографические ссылки, включает 8 рисунков, 3 таблицы.

Ключевые слова: эффект Томсона, нагрев, электрические контакты, сопротивление, туннельный эффект, термоэлектрический эффект.

Объектами исследования являются эффект Томсона, коэффициент Томсона, металлы при нагреве.

Целью работы является построить математическую модель эффекта Томсона, а также сравнить две модели с усредненным коэффициентом Томсона и с зависящими от температуры коэффициентами;

В процессе работы использованы программы: Matlab, Origin

В результате работы выведена математическая модель эффекта Томсона, были сравнены две модели с усредненным коэффициентом Томсона и с зависящими от температуры коэффициентами

Практическая значимость. Точные решения, полученные для коммерческого модуля термоэлектрического охладителя, при условии, что температура включает в себя эффект Томсона. Положительный коэффициент Томсона привел к небольшому улучшению работы термоэлектрического устройства, в то время как отрицательный коэффициент Томсона привел к небольшому снижению производительности. Сравнение точного решения и идеального уравнения по мощности охлаждения и коэффициенту производительности широкого диапазона температурных различий имеет схожее значение. Таким образом, эффект Томсона применим для типичных коммерческих термоэлектрических охладителей, а также идеальное уравнение эффективно улучшает производительность.

ТҮЙІН

Бұл дипломдық жұмыс машинажазба мәтінінің 65 бетінде баяндалған және кіріспеден, әдебиеттік шолудан, тәжірибелік бөлімнен, нәтижелерді талдаудан, қорытындыдан және әдебиеттер тізімінен, 72 библиографиялық сілтемеден, 8 суреттен және 3 кестеден тұрады.

Түйінді сөздер: Томсон әсері, электрикалық контакттар, қарсылық, туннельді әсері, термоэлектрикалық әсері.

Зерттеу нысандары: Томсон әсері, Томсон коэффициенті, металдар қыздырған кезде.

Жұмыс мақсаты: Томсон әсерінің математикалық моделін құру, сондай-ақ, екі үлгіні орташа Томсон коэффициентімен және температураға тәуелді коэффициенттерімен салыстыру.

Жұмыс процесінде қолданылған әдістер: Matlab, Origin

Жұмыс нәтижесінде Томсон әсерінің математикалық моделін құрастырылды, сондай-ақ, екі үлгіні орташа Томсон коэффициентімен және температураға тәуелді коэффициенттері салыстырылған.

Практикалық құндылығы. Коммерциялық термоэлектрикалық салқындатқыш модуліне алынған нақты шешім, температура Томсон әсерін қамтыған жағдайда. Томсонның оң коэффициенті термоэлектрической құрылғысының жұмысын сәл жақсартуға әкелді, ал Томсонның теріс коэффициенті өнімділіктің шамалы төмендеуіне әкелді. Дәл ерітіндіні және идеалды салқындатқыш күш теңдеуін және температура айырмашылығының кең ауқымының өнімділік қатынасын салыстыру ұқсас мәнге ие. Осылайша, Томсон әсері әдеттегі коммерциялық термоэлектрлік салқындатқыштарға қолданылады және идеалды теңдеу өнімділікті тиімді арттырады.

ABSTRACT

Graduation work explained on 65 pages of typewritten text, consists from introduction, literary survey, experimental part, discussion of results, conclusion and list of used literature, maintaining 72 bibliographic references, includes 8 pictures and 3 tables.

Key words: Thomson effect, heating, electrical contacts, resistance, tunneling effect, thermoelectric effect.

Objects of investigation are Thomson effect, Thomson coefficient, metals on heating.

Purpose of work is to construct a mathematical model of the Thomson effect, and also to compare the two models with the averaged Thomson coefficient and with temperature-dependent coefficients.

Methods: Matlab, Origin

Result of research is a mathematical model of the Thomson effect was derived; two models were compared with the averaged Thomson coefficient and with temperature-dependent coefficients.

Practical significance. The exact solutions obtained for the commercial thermoelectric cooler module, provided that the temperature includes the Thomson effect. The positive Thomson coefficient led to a slight improvement in the operation of the thermoelectric device, while the Thomson's negative coefficient led to a slight decrease in performance. Comparison of the exact solution and the ideal cooling power equation and the performance ratio of a wide range of temperature differences is of similar importance. Thus, the Thomson effect is applicable to typical commercial thermoelectric coolers, and an ideal equation effectively improves performance.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	7
ВВЕДЕНИЕ	8
1 ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ	10
1.1 Решение задачи	11
1.2 Приведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	12
1.3 Особые случаи	15
1.4 Результаты	16
2 ОЦЕНКА ЭФФЕКТА ТОМСОНА	19
2.1 Нагрев идеальных контактов с эффектом Томсона	20
2.2 Особые случаи	25
3 ЯВЛЕНИЕ МОСТА	29
3.1 Симметричный квазистационарный мост	30
3.1.1 Видимая часть моста	31
3.1.2 Скрытая часть моста	33
3.1.3 Температурное поле видимой части моста	34
3.1.4 Температурное поле скрытой части моста	36
3.1.5 Температурное поле твердой области электрода	38
3.1.6 Уравнения для неизвестной константы	39
3.2 Асимметричный квазистационарный мост	42
3.2.1 Видимая часть моста	42
3.2.2 Температурное поле видимой части моста с эффектом Томсона	43
3.2.3 Температурное поле скрытой части (справа) моста	44
3.2.4 Температурное поле в области D_3 (правая твердая область)	45
3.2.5 Температурное поле в скрытой части области жидкого моста D_4	46
3.2.6 Температурное поле в области D_5 (левая сплошная область)	47
3.2.7 Результаты	49
4 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА КОНТАКТНОГО МОСТА	51
4.1 Дифференциальные уравнения и граничные условия.	52
4.1.1 Уравнения для свободных границ.	53
4.2 Результаты решения	54
4.3 Механизм разрыва моста	56
4.4 Критерии моста	58
4.5 Самоподдерживаемая эрозия моста.	58
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	60
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	61
ПРИЛОЖЕНИЕ	65

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

λ	Теплопроводность
ρ	Электрическое сопротивление
σ_{Th}	Коэффициент Томсона
Φ	Электрический потенциал
θ	Температура
ξ	Эллипсоидная поверхность
f	Радиус пленки
W	Термическое сопротивление
d	Толщина пленки
λ_f	Теплопроводность тонкой пленки
ρ_f	Электрическая стойкость тонкой пленки
Π	Тепловой поток
y_z	dy / dz
j	Плотность тока
α	Температурный коэффициент электросопротивления
b	Температурный коэффициент эффекта Томсона.
R_{cr}	Сопротивление сжатию
Н.У.	Начальные условия
Г.У.	Граничные условия

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Электрические контакты входят в состав практически любой цепи — от устройств микроэлектроники до токоведущих систем высоковольтных электрических аппаратов. Рабочие токи при этом могут составлять от микроампер до сотен килоампер. Следствием этого является чрезвычайно широкое разнообразие типов контактных устройств. В каждом устройстве происходит механическое контактирование двух (или более) физически различных проводников, которое обеспечивает возможность прохождения сквозь них электрического тока. Особенность прохождения тока через электрические контакты заключается в том, что проводящей является не вся видимая поверхность соприкосновения проводников, а некоторая совокупность так называемых контактных пятен, составляющих лишь незначительную ее часть. Это приводит к тому, что плотность тока, а следовательно, и плотность мощности джоулева нагрева в окрестности контактных пятен может быть на несколько порядков больше, чем вдали от них. Такое неравномерное распределение мощности вызывает неравномерный нагрев. В окрестности контактных пятен наблюдаются значительные градиенты температуры. Особенно сильно это проявляется при нагреве благодаря эффекту Томсона.

Целью работы является построить математическую модель эффекта Томсона, сравнить две модели с усредненным коэффициентом Томсона и с зависящими от температуры коэффициентами, а также использовать результаты для повышения эффективности электрических контактов

Практическая значимость. Точные решения, полученные для коммерческого модуля термоэлектрического охладителя, при условии, что температура включает в себя эффект Томсона. Положительный коэффициент Томсона привел к небольшому улучшению работы термоэлектрического устройства, в то время как отрицательный коэффициент Томсона привел к небольшому снижению производительности. Сравнение точного решения и идеального уравнения по мощности охлаждения и коэффициенту производительности широкого диапазона температурных различий имеет схожее значение. Таким образом, эффект Томсона применим для типичных коммерческих термоэлектрических охладителей, а также идеальное уравнение эффективно улучшает производительность.

Соответствующие количественные оценки для сильноточных контактов приведены в [2]. Хорошо известно, что в неравномерно нагретых проводниках, помимо тока проводимости, возбуждаются термоэлектрические токи [3], возмущающие распределение мощности (эффект Томсона). Возникает вопрос о том, насколько сильное влияние они оказывают на нагрев контактов, в частности сильноточных. К настоящему времени в научной и технической литературе единого мнения на этот счет не сложилось. Более того, можно встретить диаметрально противоположные утверждения, касающиеся необходимости учета эффекта Томсона при расчете нагрева сильноточных

контактов [4,5]. В настоящей работе мы сделали количественные оценки, позволяющие проанализировать вклад токов различной природы в нагрев контактов.

Стоит заметить, что коэффициент Томсона может быть как положительным, так и отрицательным для разных металлов, и даже изменять знак при изменении температуры для одного и того же материала. Для некоторых металлов, таких как Ag, Cu, Au, Pt, зависимости практически линейные, для других (Mo, W) зависимости оказываются более сложными, нелинейными и немонотонными.

Термоэлектрические токи практически не оказывают влияния на нагрев контактов. Справедливость этого предположения подтверждается сравнением зависимости температуры в центре контактного пятна T_0 от времени, рассчитанной в двух приближениях: с учетом Термоэлектрических токов и без них, когда нагрев осуществляется только токами проводимости.

В процессе моделирования численно решается система уравнений. Учитывая малую длительность нагрева, расчеты можно проводить, пренебрегая теплообменом между контактной системой и окружающим воздухом, задав адиабатические условия для тепловых полей на внешней границе системы. Итак, в работе проанализировано влияние Термоэлектрических токов на импульсный нагрев электрических контактов. Показано, что для контактов их влияние на нагрев в широком диапазоне температур пренебрежимо мало. Это позволяет решать соответствующие задачи в упрощенной постановке, учитывая только токи проводимости, что существенно упрощает проведение расчетов.

Таким образом, при достаточно слабых термоэлектрических токах возмущение мощности эффектом Томсона пропорционально величине термотока. Когда термоток превосходит ток проводимости, то возмущение мощности оказывается квадратичным. В результате грубая оценка роли эффекта Томсона в данной токоведущей системе сводится к выяснению, является ли безразмерная величина малой, или нет.

1. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ

Температурная асимметрия в закрытых и открытых электрических контактах является одним из основных факторов, влияющих на направление переноса материала при мостике и дуге. В области низких температур текущее смещение температуры обусловлено многими факторами, включая термоэлектрические эффекты[1].

Эффект Томсона возникает из-за большой массы материала из-за температурной зависимости коэффициента - избытка, вызывающего максимальное смещение температуры в замкнутых контактах и в жидком мостике, что еще больше влияет на эволюцию дуги. Фактически эффект Томсона - это комбинация эффекта Зеебека и эффекта Пельтье. В эффекте Зеебека, если на концах проводника имеется градиент температуры, напряжение будет генерироваться пропорционально температуре. В то время как эффект Пельтье является обратным эффектом Зеебека. Когда когда-либо ток проходит от одного конца проводника к другому, один конец будет холодным, а другой будет горячим (т. е. будет температурным градиентом). Он состоит в дополнительной передаче тепла электрическими носителями от более нагретых до менее нагретых областей. Этот эффект положителен, когда направления тока и теплового потока одинаковы и отрицательны, когда они различны. Другими словами, положительный эффект Томсона действует так, как будто перенос тепла осуществляется носителями положительного тока. В противном случае эффект считается отрицательным. Передача материала с одного электрода на другой, поскольку он может быть получен Томсона эффект, действует бок о бок с джоулевым нагревом области сужения контакта.

Эффект может быть продемонстрирован на проводе, который нагревается током через него, в то время как концы стержня удерживаются на одной и той же низкой температуре. Без этого эффекта самая жаркая часть будет находиться в середине стержня. Но с положительным эффектом самая горячая секция смещается в направлении потока тока, то есть к катоду, поскольку катодная сторона имеет больший температурный градиент[2].

В этой работе показано, что направление переноса металла зависит от смещения самой горячей изотермы к аноду (или) к катоду, вызванного взаимным воздействием джоулева нагрева и термоэлектрическими эффектами.

Оценка эффекта Томсона часто основана на предположении, что мощность q_T , генерируемая в единице объема за счет эффекта Томсона, пропорциональна скалярному произведению градиента температуры и градиента электрического потенциала

$$q_T = \frac{\sigma_T}{\rho} \text{grad } \theta \cdot \text{grad } \varphi \quad (1.1)$$

Однако в публикациях описано математическое моделирование эффекта Томсона (см. пример [5]) значение коэффициента Томсона усредняется по температуре. Это предложение следует исследовать и проверять. Таким

образом, коэффициент Томсона θ рассматривается как линейная функция температуры

$$\sigma_T(\theta) = \sigma_0(1 + b\theta) \quad (1.2)$$

Это предположение создает нелинейную задачу для температурного поля и требует новых методов его решения. Перемещение сечения с максимальной температурой из геометрического центра за счет эффекта Томсона следует сравнить для двух моделей с усредненным коэффициентом Томсона и с зависящими от температуры коэффициентами [3]. Это главная цель работы.

1.1 Решение задачи

Выше было показано, что стационарная температура [4] и электромагнитные поля в замкнутых электрических контактах в случае аксиальной симметрии могут быть описаны системой уравнений в частных производных для температуры $\theta(r, z)$ и электрического потенциала $\varphi(r, z)$.

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \theta) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}^2 \varphi = 0$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \varphi\right) = 0$$

Для добавления термина Томсона

$$\operatorname{div}(\lambda_i \operatorname{grad} \theta_i) + \frac{\sigma_{Ti}}{\rho_i} \operatorname{grad} \theta_i \cdot \operatorname{grad} \varphi_i + \frac{1}{\rho_i} \operatorname{grad}^2 \varphi_i = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho_i} \operatorname{grad} \varphi_i\right) = 0 \quad (1.1.2)$$

то уравнения в цилиндрических координатах становятся формой

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\sigma_T}{\rho} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.1.3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.1.4)$$

Граничные условия

На контактном месте $z = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0$

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (1.1.5) \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \quad (1.1.6)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (1.1.7) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \quad (1.1.8)$$

На контактной плоскости вне контактного пятна $z=0$, $r_0 < r < \infty$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z} = 0 \quad (1.1.9) \qquad \frac{\partial \theta_2}{\partial z} = 0 \quad (1.1.10)$$

На границе контакта $z = \infty$, *or* $r = \infty$, $z < 0$

$$\theta_1 = 0 \quad (1.1.11) \qquad \varphi_1 = -U_c / 2 \quad (1.1.12)$$

и для $z = \infty$, *or* $r = \infty$, $z > 0$

$$\theta_2 = 0 \quad (2.1.13) \qquad \varphi_1 = U_c / 2 \quad (1.1.14)$$

Где $\lambda = \text{константа}$, $\rho = \rho_0(1 + \alpha \theta)$ и $\sigma = \sigma_0(1 + b \theta)$.

Отсюда выражение (1.1.3) и (1.1.4) можно записать

$$\lambda \Delta \theta + \frac{\sigma_T}{\rho} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \left(\frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right) = 0 \quad (1.1.15)$$

$$\Delta \phi - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] = 0 \quad (1.1.16)$$

1.2 Приведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Метод решения можно получить из предположения, что идентичность эквипотенциальных и изотермических поверхностей в контактах, которая правильна для стационарных полей в линейном корпусе, сохраняет безопасность и для нелинейного корпуса [6]. В линейном случае эти поверхности являются эллипсоидами вращения $\frac{r^2}{\xi^2 + r_0^2} + \frac{z^2}{\xi^2} = 1$ (1.1.17)

$$\text{(или)} \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s + \sqrt{s^2 + 4r_0^2 z^2}}, \quad s = r^2 + z^2 - r_0^2$$

Поэтому, если $\xi(r, z) = \text{const}$ требуется эквипотенциальная и изотермическая поверхность, то электромагнитные и температурные поля могут быть охарактеризованы только одной координатой ξ вместо двух независимых переменных r и z . Это мотивация для попытки найти решение уравнений (1.1.15) и (1.1.16) в виде

$$\varphi = \varphi(\xi), \quad \theta = \theta(\xi), \quad \xi = \xi(r, z) \quad (1.1.18)$$

Квадрат градиента записывается в виде:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 = \left[\left(\frac{d\phi}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{d\phi}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right] = \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

или

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 (\nabla\xi)^2 \quad (1.1.18 \text{ а})$$

где

$$(\nabla\xi)^2 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2$$

Для оператора Лапласа $\Delta\theta$ мы используем выражения:

$$\Delta\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{\partial\xi}{\partial r} \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2 + \frac{d\theta}{d\xi} \frac{\partial^2\xi}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{\partial\xi}{\partial z} \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 + \frac{d\theta}{d\xi} \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}$$

Таким образом

$$\Delta\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{d\theta}{d\xi} \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\xi}{\partial r} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} \right)$$

или

$$\Delta\theta = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} (\nabla\xi)^2 + \frac{d\theta}{d\xi} \Delta\xi \quad (1.1.18 \text{ б})$$

Аналогично

$$\Delta\phi = \frac{d^2\phi}{d\xi^2} (\nabla\xi)^2 + \frac{d\phi}{d\xi} \Delta\xi \quad (1.1.18 \text{ в})$$

Также

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \left(\frac{d\xi}{dr}\right)^2 \frac{d\phi}{d\xi} \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 \frac{d\phi}{d\xi}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z} \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \frac{d\phi}{d\xi} \left[\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dr}\right)^2 \right] = \frac{d\theta}{d\xi} \cdot \frac{d\phi}{d\xi} (\nabla\xi)^2 \quad (1.1.18 \text{ г})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} \frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial\rho}{\partial z} = \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 (\nabla\xi)^2 \quad (1.1.18 \text{ д})$$

Полагая выражения (1.1.18 а) - (1.1.18д) в уравнениях (1.1.15) - (1.1.16), получим $[\lambda\rho(\theta)\theta''(\xi) + \phi'(\xi)^2 + \sigma_T\theta'(\xi)\phi'(\xi)](\nabla\xi)^2 + \lambda\rho(\theta)\theta'(\xi)\nabla^2\xi = 0$ (1.1.19)

$$[(\rho(\theta)\phi''(\xi) - \rho'(\theta)\theta'(\xi)\phi'(\xi))(\nabla\xi)^2 + \rho(\theta)\phi'(\xi)\nabla^2\xi = 0 \quad (1.1.20)$$

Таким образом, если существует решение в форме (2.1.18), то отношение $\nabla^2 \xi / (\nabla \xi)^2$ должно быть не зависящий от переменных r и z , он должен зависеть от единственной переменной ξ .

$$\text{где } \frac{\nabla^2 \xi}{(\nabla \xi)^2} = \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} \quad (1.1.21)$$

Этот результат ожидается, поскольку температурная зависимость потенциала в любой точке электромагнитного поля может меняться с физической точки зрения только величиной, а не конфигурацией эквипотенциальной поверхности [7], которая остается неизменной как для линейных, так и для нелинейных задач, то уравнение (1.1.19) следует заменить уравнением

$$\lambda \theta''(\xi) + \lambda \theta'(\xi) \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} + \frac{\sigma_T}{\rho} \theta'(\xi) \phi'(\xi) + \frac{1}{\rho} \phi'(\xi)^2 = 0 \quad (1.1.23)$$

тогда как уравнение для электрического потенциала $\phi'(\xi) = \frac{I\rho}{2\pi(r_0^2 + \xi^2)}$ (1.1.24)

Заменяя выражение (1.1.24) в (1.1.23) получим

$$\lambda \theta''(\xi) + \lambda \theta'(\xi) \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} + \frac{I\sigma_T}{2\pi(r_0^2 + \xi^2)} \theta'(\xi) + \frac{I^2 \rho}{4\pi^2 (r_0^2 + \xi^2)^2} = 0 \quad (1.1.25)$$

Введем новую переменную u используя формулу

$$u = \arctan \frac{\xi}{r_0}$$

Тогда

$$\theta_i'(\xi) = \theta_i'(u) \frac{r_0}{r_0^2 + \xi^2}, \quad \theta_i''(\xi) = \theta_i''(u) \frac{r_0^2}{(r_0^2 + \xi^2)^2} - \theta_i'(u) \frac{2r_0\xi}{(r_0^2 + \xi^2)^2}$$

и выражение преобразуется в:

$$\theta''(u) + \frac{I\sigma_T}{2\pi r_0 \lambda} \theta'(u) + \frac{I^2 \rho}{4\pi^2 r_0^2 \lambda} = 0 \quad (1.1.26)$$

Граничные условия:

$$\theta_1(0) = \theta_2(0), \quad \theta_1'(0) = \theta_2'(0), \quad \theta_1(-\pi/2) = 0, \quad \theta_2(\pi/2) = 0 \quad (1.1.27)$$

Принимая во внимание $\rho = \rho_0(1 + \alpha\theta)$, $\lambda = \text{константа}$ и $\sigma_{th} = \sigma_0(1 + b\theta)$

Получаем выражение

$$\theta''(u) + \frac{I\sigma_0(1 + b\theta)}{2\pi r_0 \lambda} \theta'(u) + \frac{I^2 \rho_0(1 + \alpha\theta)}{4\pi^2 r_0^2 \lambda} = 0$$

$$\theta''(u) + \frac{I\sigma_0}{2\pi r_0 \lambda} \theta'(u) + \frac{I\sigma_0 b}{2\pi r_0 \lambda} \theta \theta'(u) + \frac{I^2 \rho_0 \alpha}{4\pi^2 r_0^2 \lambda} \theta + \frac{I^2 \rho_0}{4\pi^2 r_0^2 \lambda} = 0$$

Используя следующее

$$B = \frac{I^2 \rho_o}{4\pi^2 r_o^2 \lambda} \qquad P = \frac{I \sigma_o}{2\pi r_o \lambda}$$

$$A = B \cdot \alpha \qquad \mu = P \cdot b$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \theta''(u) + P\theta'(u) + \mu\theta(u) + A\theta + B &= 0 && \text{или} \\ \theta''(u) + P\theta'(u) + \mu\theta(u) + A\theta &= -B && (1.1.28) \end{aligned}$$

1.3 Особые случаи

а) Принимая во внимание эффект Джоуля (Без какого-либо перещения по эффекту Томсона)

Тогда $P = 0$ и $\mu = 0$

Мы получаем:

$$\theta''(u) + A\theta(u) = -B$$

Решение этого уравнения дает нам максимальную температуру на центр контакта из-за эффекта Джоуля

$$T_0 := \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\cos\left(\pi \cdot \frac{\omega}{2}\right)} - 1 \right)$$

где $\omega = A$

б) эффект Джоуля + эффект Томсона ($\sigma_{th} = \sigma_o = \text{константа}$ или $b = 0$)

Тогда $\mu = 0$

Мы получаем выражение

$$\theta''(u) + P\theta'(u) + A\theta(u) = -B$$

Решение этого уравнения дает нам максимальную температуру который смещен в сторону одного из электродов

$$\theta(u) = C_1 \exp(m_1 u) + C_2 \exp(m_2 u) - \frac{B}{A}$$

где

$$m_1 = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4A}}{2},$$

и C_1 и C_2 - произвольные постоянные, которые можно найти из границы условия.

в) эффект Джоуля + эффект Томсона ($\sigma_{Th} = \sigma_o (1 + b\theta)$ или $b \neq 0$)

Вышеприведенное уравнение

$$\theta''(u) + P\theta'(u) + \mu\theta(u) + A\theta(u) = -B$$

является нелинейным уравнением. Решение этого уравнения численно дает нам изменение температуры к безразмерному смещению (u). Используя соотношение $u = \arctan \frac{\xi}{r_0}$, мы можем найти смещение ξ в (нм).

1.4 Результаты

Таблица 1 – Смещение максимальной температуры в безразмерном (u) и (ξ) в электрических контактах до температуры плавления

		Макс. Температурное замещение			
		$u(10^{-3})$		ξ (нм)	
№	Материал	$b=0$	$b \neq 0$	$b=0$	$b \neq 0$
1	Pd	21.77	211.05	15.2	147.34
2	W	-20.896	115.62	-7.233	39.88
3	Pt	15.54	50.73	11.44	37.52
4	Mo	-14.565	-7.617	-7.994	-4.18
5	Au	-2.474	-2.474	-0.426	-0.426
6	Ag	-2.477	-2.477	-0.315	-0.315
7	Cu	-2.58	-2.58	-0.349	-0.349

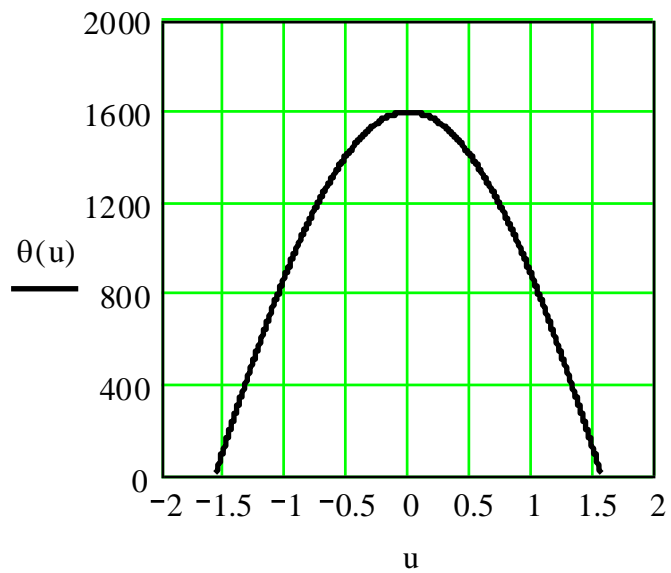


Рисунок 1 – Эффект Джоуля в отсутствие эффекта Томсона (опыт проводился с Pt)

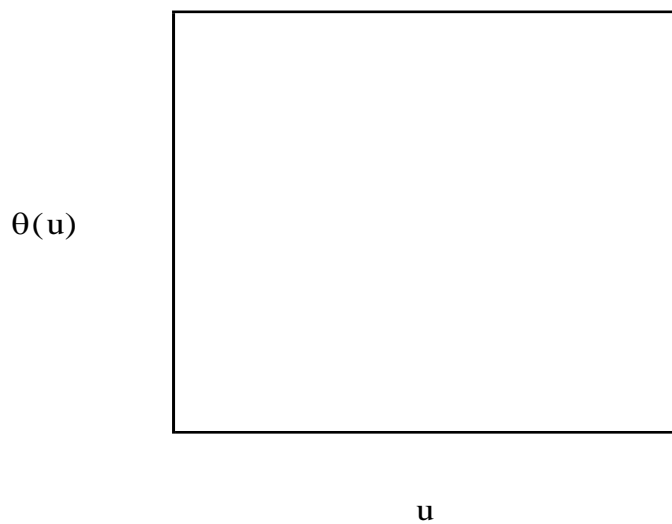
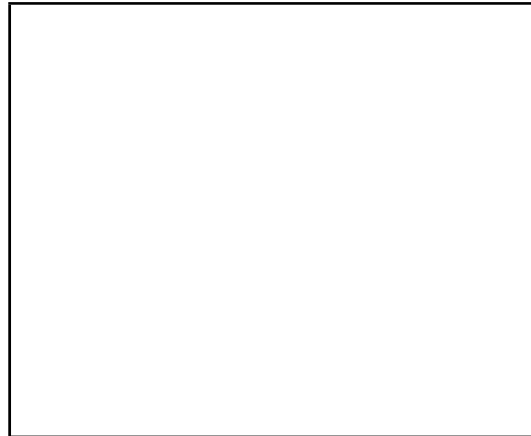


Рисунок 2 – Эффект Джоуля с эффектом Томсона для среднего значения коэффициента эффективности Томсона (опыт проводился с Pt)

$\theta(u)$



u

Рисунок 3 –Эффект Джоуля с эффектом Томсона для принятия коэффициента Томсона как функция линейной температуры (опыт проводился с Pt)

Из таблицы 1 и рисунков 1, 2, 3 легко понять, что смещение становится большим, поскольку принятый коэффициент Томсона линейная температура (т. е. $\sigma_{th} = \sigma_o (1 + b\theta)$). Это показывает, что коэффициент эффективности Томсона варьировался, температура и максимальная температура проникают в один из электродов (то есть анод или катод). Также можно заметить, что смещение меняет свое направление при $b = 0$ как для «W» [8]. Вначале мы сказали о том, что необходимо исследовать график, так как для некоторых элементов (Ag, Cu, Au) коэффициент Томсона не зависит от температуры, что верно результаты (1.1.5), а для некоторых элементов (W, Pt, Pd, Mo) изменение коэффициента очень важно.

2. ОЦЕНКА ЭФФЕКТА ТОМСОНА

Эффект Томсона проявляется в случае неравномерного нагревательного проводника. Он заключается в дополнительном переносе тепла электрическими носителями из более нагретых в менее нагретые области. Этот эффект является положительным, если в проводнике происходит генерация тепла, когда направления тока и теплового потока одинаковы, а отрицательные, когда они различны [9]. Другими словами, положительный эффект Томсона действует так, как будто перенос тепла осуществляется носителями положительного тока. В противном случае эффект считается отрицательным.

Оценка эффекта Томсона основана на предположении, что общее количество тепла Томсона Q_T , которое было создано в проводнике с проходящим током I за время t , пропорционально разности температур на концах проводника $\Delta\theta$, если эта разница не слишком велика [16]:

$$Q_T = \sigma_T \Delta\theta \cdot I \cdot t. \quad (2.1)$$

Знак коэффициента Томсона σ_T совпадает со знаком эффекта. Экспериментальные данные показывают, что значение коэффициента Томсона σ_T зависит от температуры, и эта зависимость линейна для большинства металлов [10]. Температурная зависимость σ_T представлена на рисунке 4[1].

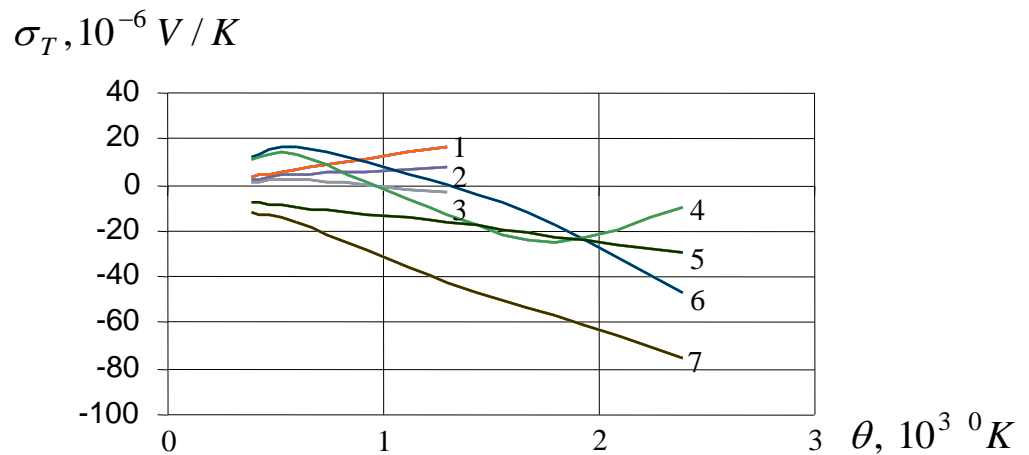


Рисунок 4 – Температурная зависимость коэффициента Томсона σ_T [1].

1 – Ag, 2 – Cu, 3 – Au, 4 – Mo, 5 – Pt, 6 – W, 7 – Pd

Видно, что для некоторых металлов (т.е. Ag, Cu, Au) изменение коэффициента Томсона для температуры незначительно. В то время как для других материалов (Mo, Pt, W, Pd) эта вариация очень важна.

Применяя этот закон к элементу проводника Δl и разделив обе части (2.1) на величину элементарного объема $S \cdot \Delta l$, где S - площадь поперечного сечения проводника, можно получить формулу

$$q_T = \sigma_T \frac{\Delta\theta}{\Delta l} j \quad (2.2)$$

где q_T - удельная мощность, создаваемая источниками тепла Томсона на единицу объема, и j плотность тока.

Обобщение формулы (1.2.4) приводит к выводу, что q_T пропорционален скалярному произведению градиента температуры и градиента электрического потенциала

$$q_T = \sigma_T \text{grad } \theta \cdot \text{grad } \phi = -\frac{\sigma_T}{\rho} \bar{E} \cdot \text{grad } \theta. \quad (2.3)$$

Различие между формулой (2.2), которая обычно применяется для оценки эффекта Томсона, и точная формула (2.3) очевидна. Сравнивая среднее значение компоненты Томсона электрического поля для всей области сужения $E_T = \sigma_T \frac{\Delta\theta}{\Delta l}$ с омическим компонентом $E = \rho j$, можно найти $E_T \ll E$, что для всех действительных диапазонов рассматриваемых параметров [12]. Таким образом, согласно формуле (2.2) составляющая нагревания Томсона должна быть пренебрежимо мала по сравнению с компонентом нагрева Джоуля. Напротив, формула (2.3) показывает, что могут существовать небольшие локальные зоны, где Томсона-нагрев является существенным, если градиент температуры в этих зонах достаточно велик. Эта ситуация характерна для нестационарных явлений в случае, когда в небольшой зоне поверхности в течение очень короткого времени создается мощная интенсивность, особенно для материалов с большим коэффициентом Томсона. Будет показано, что нагрев Томсона может превзойти нагрев Джоуля при явлениях электрической дуги между вольфрамовыми контактами для тока около 100 А.

2.1 Нагрев идеальных контактов с эффектом Томсона

Рассмотрим проблему стационарной температуры и электромагнитных полей в замкнутых гетерогенных контактах с учетом эффекта Томсона. Мы предполагаем, что удельное электросопротивление ρ_i и коэффициент Томсона σ_{Ti} линейно зависят от температуры θ_i :

$$\rho_i = \rho_{i0}(1 + \alpha_i \theta_i), \quad \sigma_{Ti} = \sigma_{Ti0}(1 + \beta_i \theta_i), \quad (2.1.1)$$

но теплопроводность λ_i постоянна, так как ее температурная зависимость не столь существенна и ее можно считать средним для рассматриваемого температурного интервала.

Систему уравнений температуры θ_i и потенциала ϕ_i можно записать в виде

$$\lambda_i \Delta \theta_i + \frac{\sigma_{Ti}}{\rho_i} \nabla \theta_i \cdot \nabla \phi_i + \frac{1}{\rho_i} \nabla^2 \phi_i = 0, \quad \text{div} \left(\frac{1}{\rho_i} \nabla \phi_i \right) = 0, \quad (2.1.2)$$

В цилиндрической системе координат эти уравнения принимают вид

$$(1 + \alpha_i \theta_i) \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial z^2} \right) + \frac{\sigma_{T10}}{\lambda_i \rho_{i0}} (1 + \beta_i \theta_i) \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) + \frac{1}{\lambda \rho_{i0}} \left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.1.3)$$

$$(1 + \alpha_i \theta_i) \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right) - \alpha_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.1.4)$$

Индекс $i = 1$ соответствует области катода $D_1(0 < r < \infty, -\infty < z < 0)$, а индекс $i = 2$ соответствует анодной области $D_2(0 < r < \infty, 0 < z < \infty)$.

Граничные условия для электрического потенциала и температуры можно записать в виде

$$\varphi_1 = -\frac{u_c}{2}, \quad \text{if } r^2 + z^2 = \infty, \quad z < 0 \quad (2.1.5)$$

$$\varphi_2 = \frac{u_c}{2}, \quad \text{if } r^2 + z^2 = \infty, \quad z > 0 \quad (2.1.6)$$

$$\varphi_1(r, -0) = \varphi_2(r, +0) \quad (2.1.7)$$

$$\frac{1}{\rho_{10} [1 + \alpha_1 \theta_1(r, -0)]} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{20} [1 + \alpha_2 \theta_2(r, +0)]} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial \varphi_1(r, -0)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2(r, +0)}{\partial z} \quad (2.1.9)$$

$$\theta_i = 0, \quad \text{if } r^2 + z^2 = \infty, \quad i = 1, 2 \quad (2.1.10)$$

$$\theta_1(r, -0) = \theta_2(r, +0), \quad r < r_0 \quad (2.1.11)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(r, -0)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_2(r, +0)}{\partial z}, \quad r < r_0 \quad (2.1.12)$$

$$\frac{\partial \theta_1(r, -0)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \theta_2(r, +0)}{\partial z} = 0, \quad r > r_0 \quad (2.1.13)$$

Следует отметить, что эта проблема существенно нелинейна из-за уравнений (2.1.3), (2.1.11) и (2.1.13).

В терминах переменной ξ получаем

$$(1 + \alpha_i \theta_i) \theta_i'' + \frac{\sigma_{T10}}{\lambda_i \rho_{i0}} (1 + \beta_i \theta_i) \theta_i' \varphi_i' + \frac{1}{\lambda_i \rho_{i0}} (\varphi_i')^2 + (1 + \alpha_i \theta_i) \theta_i' \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} = 0 \quad (2.1.14)$$

$$(1 + \alpha_i \theta_i) \varphi_i'' - \alpha_i \theta_i' \varphi_i' + (1 + \alpha_i \theta_i) \varphi_i' \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} = 0 \quad (2.1.15)$$

Чтобы написать граничные условия в терминах переменной ξ , заметим, что

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial z} = \theta'_i(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial z} = (-1)^i \theta'_i(\xi) \frac{z}{\xi} \left[1 + \frac{f^2 r^2}{(r_0^2 + \xi^2)^2 - r_0^2 r^2} \right] \quad (2.1.16)$$

Принимая во внимание соотношения (2.1.8), можно заключить, что при таком выборе функции условия (2.1.10) и аналогично (2.1.12) выполняются автоматически $\xi(r, z)$.

Соотношение (1.5.22) $z = \pm 0$, $r < r_0$ принимает вид

$$\left. \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right|_{z=\pm 0} = \theta'_i(0) \cdot \frac{f}{\sqrt{r_0^2 - r^2}},$$

Таким образом, условие (2.1.12) и аналогично условие (2.1.8) сводятся к виду

$$\frac{1}{\rho_{10}[1 + \alpha_1 \theta_1(0)]} \varphi'_1(0) = \frac{1}{\rho_{20}[1 + \alpha_2 \theta_2(0)]} \varphi'_2(0) \quad (2.1.17)$$

$$\lambda_1 \theta'_1(0) = \lambda_2 \theta'_2(0) \quad (2.1.18)$$

Наконец, вместо условий (2.1.5), (1.5.6), (1.5.7), (1.5.10) и (1.5.11) мы можем написать соответствующие условия в терминах ξ :

$$\varphi_1(-\infty) = -\frac{u_c}{2} \quad (2.1.19)$$

$$\varphi_2(\infty) = \frac{u_c}{2} \quad (2.1.20)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \quad (2.1.21)$$

$$\theta_1(-\infty) = \theta_2(\infty) = 0 \quad (2.1.22)$$

$$\theta_1(0) = \theta_2(0) \quad (2.1.23)$$

Таким образом, первичная задача сводится к системе уравнений (2.1.20) - (2.1.21) с граничными условиями (2.1.13) - (2.5.19). Начнем его решение из уравнения (1.5.21), переписанного в виде

$$\frac{\varphi_i''}{\varphi_i'} - \frac{\alpha_i \theta_i'}{1 + \alpha_i \theta_i} + \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} = 0$$

Интеграция этого уравнения дает соотношение между φ_i' and θ_i :

$$\varphi_i'(\xi) = \frac{C_i(1 + \alpha_i \theta_i)}{r_0^2 + \xi^2} \quad (2.1.24)$$

Константы C_i могут быть определены из следующего соображения. Эквипотенциальная поверхность (2.1.18) приближается к сфере радиуса ξ как $\xi \rightarrow \pm\infty$. Если потенциалы двух таких сфер с радиусами ξ and $\xi + d\xi$ равны соответственно φ_i and $\varphi_i + d\varphi_i$, то соответственно закону Ома [42]

$$d\varphi_i = I\rho_{i0}(1 + \alpha_i\theta_i) \frac{d\xi}{2\pi\xi}$$

тогда

$$\varphi_i'(\xi) \rightarrow \frac{I\rho_{i0}(1 + \alpha_i\theta_i)}{2\pi\xi^2} \quad \text{как} \quad \xi \rightarrow \pm\infty$$

Сравнивая это выражение с (2.1.23) и вычисляя предел как $\xi \rightarrow \pm\infty$, мы можем найти

$$C_i = \frac{I\rho_{i0}}{2\pi} \quad (2.1.25)$$

тогда

$$\varphi_i'(\xi) = \frac{I\rho_{i0}}{2\pi} \frac{1 + \alpha_i\theta_i}{r_0^2 + \xi^2} \quad (2.1.26)$$

Следует отметить, что такое определение константы C_i включает в себя автоматическую выполнимость условия (2.1.23).

Теперь уравнение (2.1.20) можно уменьшить, используя (2.1.32), в виде

$$\theta_i'' + \frac{I\sigma_{Ti0}}{2\pi\lambda_i}(1 + \beta_i\theta_i) \frac{\theta_i'}{r_0^2 + \xi^2} + \frac{I^2\rho_{i0}}{4\pi^2\lambda_i} \frac{1 + \alpha_i\theta_i}{(r_0^2 + \xi^2)^2} + \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} \theta_i' = 0$$

Попробуем найти решение этого уравнения в виде

$$\theta_i(\xi) = \Phi_i(\zeta), \quad \zeta = \arctan \frac{\xi}{r_0} \quad (2.1.27)$$

Тогда уравнения, касающиеся $\Phi_i(\zeta)$

$$\Phi_i'' + \omega_i^2 \left(\Phi_i + \frac{1}{\alpha_i} \right) + 2\delta_i(1 + \beta_i\Phi_i)\Phi_i' = 0 \quad (2.1.28)$$

где

$$\omega_i = \frac{I}{2\pi r_0} \sqrt{\frac{\rho_{i0}\alpha_i}{\lambda_i}}, \quad \delta_i = \frac{I\sigma_{Ti0}}{4\pi\lambda_i r_0} \quad (2.1.29)$$

Ниже будет показано, что эффект Томсона не столь важен для нагрева замкнутых контактов по сравнению с эффектом Джоуля, поэтому коэффициент δ_i можно рассматривать как малый параметр. Приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения (2.1.29) можно найти в этом случае по методу Крылова-Боголюбова [24]:

$$\Phi_i(\zeta) = -\frac{1}{\alpha_i} + \exp(-\bar{\delta}_i\zeta)(A_i \cos \omega_i\zeta + B_i \sin \omega_i\zeta) \quad (2.1.30)$$

где

$$\bar{\delta}_i = \delta_i \left(1 - \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)$$

Константы A_i and B_i определяются граничными условиями (2.1.24), (2.1.28), (2.1.29):

$$A_i = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{r_1}{\alpha_1} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_1\right) + \frac{r_2}{\alpha_2} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_2\right) - (-1)^i \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right) \Delta_{3-i} \right] \quad (2.1.31)$$

$$B_i = (-1)^i \left\{ \frac{1}{\alpha_i} \exp\left[(-1)^i \frac{\pi}{2} \bar{\delta}_i\right] \cos ec \frac{\pi \omega_i}{2} - A_i \cot \frac{\pi \omega_i}{2} \right\}$$

где

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \quad \Delta_i = r_i \left[\cos \frac{\pi \omega_i}{2} + (-1)^i \frac{\bar{\delta}_i}{\omega_i} \sin \frac{\pi \omega_i}{2} \right], \quad r_i = \lambda_i \omega_i \sin \frac{\pi \omega_{3-i}}{2}$$

Потенциалы $\varphi_i(\xi)$ можно найти теперь путем интегрирования уравнения (1.5.32) с граничными условиями (2.1,25), (2.1.26):

$$\varphi_1(\xi) = -\frac{u_c}{2} + \frac{I \rho_{01}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1 + \alpha_1 \theta_1(\xi)}{r_0^2 + \xi^2} d\xi = -\frac{u_c}{2} + \frac{I \rho_{10}}{2\pi r_0} \int_{-\pi/2}^{\xi} [1 + \alpha_1 \Phi_1(\zeta)] d\zeta =$$

$$-\frac{u_c}{2} + \frac{I \rho_{10} \alpha_1}{2\pi r_0} \frac{\bar{\delta}_1}{\omega^2 + \bar{\delta}_1^2} \left\{ -(A_1 + \frac{\omega_1}{\bar{\delta}_1} B_1) [\exp(-\bar{\delta}_1 \zeta) \cos \omega_1 \zeta - \exp(\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_1) \cos \frac{\pi \omega_1}{2}] + \right. \quad (2.1.32)$$

$$\left. (\frac{\omega_1}{\bar{\delta}_1} A_1 - B_1) [\exp(-\bar{\delta}_1 \zeta) \sin \omega_1 \zeta + \exp(\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_1) \sin \frac{\pi \omega_1}{2}] \right\}$$

Аналогично

$$\varphi_2(\xi) = \frac{u_c}{2} - \frac{I \rho_{20} \alpha_2}{2\pi r_0} \frac{\bar{\delta}_2}{\omega^2 + \bar{\delta}_2^2} \left\{ -(A_2 + \frac{\omega_2}{\bar{\delta}_2} B_2) [\exp(-\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_2) \cos \frac{\pi \omega_2}{2} - \right. \quad (2.1.33)$$

$$\left. - \exp(-\bar{\delta}_2 \zeta) \cos \omega_2 \zeta) + \right.$$

$$\left. (\frac{\omega_2}{\bar{\delta}_2} A_2 - B_2) [\exp(-\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_2) \sin \frac{\pi \omega_2}{2} - \exp(-\bar{\delta}_2 \zeta) \sin \omega_2 \zeta] \right\}$$

где

$$\zeta = \arctan \frac{\xi}{r_0}. \quad (2.1.34)$$

Используя выражения (2.1.34) и Закон Ома, нетрудно проверить, что функции (2.1.28) и (2.1.29) удовлетворяют условию (2.1.18).

Таким образом, приближенное решение задачи (2.1.13) - (2.1.15) определяется формулами (2.1.30) - (2.1.40), где ξ дается выражением (2.1.28).

Следует отметить, что максимум температуры смещается от контактной плоскости к аноду или катоду из-за гетерогенных свойств материалов электродов и из-за термоэлектрических эффектов. Такое смещение может оказывать влияние на форму контактного жидкого моста, зоны пластичности и контактной сварки, а также на другие явления, сопровождающиеся структурными фазовыми изменениями, в частности, плавление контактных материалов, возникающих внутри электрода [51]. Если будет найдено

положение изотермы ξ_0 , где температура достигнет своего максимума, то можно проанализировать параметры, определяющие это положение. Таким образом, он позволяет прогнозировать ход контактных нагревающих явлений и управлять им в определенной степени с помощью соответствующего выбора контактных материалов [62].

Значение ξ_0 можно найти из теста экстремума для функции (2.1.26). Он дает формулу

$$\xi_0 = \frac{1}{\delta_i \kappa_i} \arctan \frac{-A_i + \kappa_i B_i}{\kappa_i A_i + B_i}, \quad (2.1.35)$$

где $\kappa_i = 1 - \beta_i / \alpha_i$ и индекс $i = 1$ or $i = 2$ должны быть выбраны соответствующим материалу с большим значением ρ_i .

Сопротивление сужению R_c определяется выражением

$$R_c = \frac{\rho_{10}}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{1 + \alpha_1 \theta_1}{r_0^2 + \xi^2} d\xi + \frac{\rho_{20}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \alpha_2 \theta_2}{r_0^2 + \xi^2} d\xi = \quad (2.1.36)$$

$$\frac{\rho_{10}}{2\pi r_0 \omega_1} \left[A_1 \sin \frac{\omega_1 \pi}{2} - B_1 \left(\cos \frac{\omega_1 \pi}{2} - 1 \right) \right] + \frac{\rho_{20}}{2\pi r_0 \omega_2} \left[A_2 \sin \frac{\omega_2 \pi}{2} - B_2 \left(\cos \frac{\omega_2 \pi}{2} - 1 \right) \right]$$

2.2 Особые случаи

Рассмотрим некоторые частные случаи, когда оно доступно для получения точного решения задачи.

1. Коэффициент Томсона постоянный. В этом случае $\beta_i = 0$ уравнение (2.1.26) принимает вид

$$\Phi_i'' + 2\delta_i \Phi_i' + \omega_i \left(\Phi_i + \frac{1}{\alpha_i} \right) = 0 \quad (2.1.37)$$

и его решение определяется теми же выражениями (2.1.33) - (2.1.34) для температуры и (2.1.35) - (2.1.37) для потенциалов, $\bar{\delta}_i$, ω_i в которых они должны

быть заменены δ_i и $\omega_i \sqrt{1 - \frac{\sigma_{T0}}{4\rho_{i0}\alpha_i\lambda_i}}$ соответственно.

2. Эффект Томсона пренебрежимо мал. В этом случае $\sigma_{T0} = 0$, $\beta_i = 0$ выражения (2.1.35) - (2.1.37) преобразуются в формулы

$$\Phi_i(\zeta) = -\frac{1}{\alpha_i} + A_i \cos \omega_i \zeta + B_i \sin \omega_i \zeta, \quad i = 1, 2 \quad (2.1.38)$$

где

$$A_i = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\lambda_1 \omega_1}{\alpha_1} \sin \frac{\pi}{2} \omega_2 + \frac{\lambda_2 \omega_2}{\alpha_2} \sin \frac{\pi}{2} \omega_1 - (-1)^i \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) \Delta_{3-i} \right],$$

$$B_i = \frac{\lambda_{3-i} \omega_{3-i}}{\Delta} \left[\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) \cos \frac{\pi}{2} \omega_1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \omega_2 - \frac{1}{\alpha_1} \cos \frac{\pi}{2} \omega_2 + \frac{1}{\alpha_2} \cos \frac{\pi}{2} \omega_1 \right],$$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \quad \Delta_i = \lambda_i \omega_i \cos \frac{\pi}{2} \omega_i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \omega_{3-i}$$

а также

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{u_c}{2} + \sqrt{\rho_{10} \alpha_1 \lambda_1} [A_1 (\sin \omega_1 \zeta + \sin \frac{\pi}{2} \omega_1) - B_1 (\cos \omega_1 \zeta - \cos \frac{\pi}{2} \omega_1)]$$

$$\varphi_2(\zeta) = \frac{u_c}{2} - \sqrt{\rho_{20} \alpha_2 \lambda_2} [A_2 (\sin \frac{\pi}{2} \omega_2 - \sin \omega_2 \zeta) - B_2 (\cos \frac{\pi}{2} \omega_2 - \cos \omega_2 \zeta)]$$

Эти формулы становятся более удобными для расчета, если учесть температуру и потенциал в контактном пятне:

$$\theta_0 = \Phi_1(0) = \Phi_2(0) = \frac{\frac{\lambda_1 \omega_1}{\alpha_1} \tan \frac{\pi \omega_1}{4} + \frac{\lambda_2 \omega_2}{\alpha_2} \tan \frac{\pi \omega_2}{4}}{\lambda_1 \omega_1 \cot \frac{\pi \omega_1}{2} + \lambda_2 \omega_2 \cot \frac{\pi \omega_2}{2}} \quad (2.1.39)$$

$$\varphi_0 = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = -\frac{u_c}{2} + \sqrt{\rho_{10} \alpha_1 \lambda_1} \left(\frac{2}{\alpha_1} + \theta_0 \right) \tan \frac{\pi \omega_1}{4} =$$

$$= \frac{u_c}{2} - \sqrt{\rho_{20} \alpha_2 \lambda_2} \left(\frac{2}{\alpha_2} + \theta_0 \right) \tan \frac{\pi \omega_2}{4} \quad (2.1.40)$$

В этом случае

$$\Phi_i(\zeta) = -\frac{1}{\alpha_i} + \frac{(1 + \alpha_i \theta_0) \sin \left\{ \omega_i \left[\frac{\pi}{2} - (-1)^i \zeta \right] \right\} - \sin \left[\omega_i (-1)^i \zeta \right]}{\alpha_i \sin \frac{\pi \omega_i}{2}} \quad (2.1.41)$$

$$i = 1, 2$$

$$\varphi_i(\zeta) = \varphi_0 + \sqrt{\rho_{i0} \alpha_i \lambda_i} [A_i \sin \omega_i \zeta + B_i (1 - \cos \omega_i \zeta)] \quad (2.1.42)$$

Сопротивление сужения области, ограниченной контактной поверхностью и изотермой ζ , определяется из выражения

$$R_i(\zeta) = \frac{(-1)^i}{I} [\varphi_i(\zeta) - \varphi_0], \quad i = 1, 2 \quad (2.1.43)$$

3. Однородные контакты. Эффект Томсона пренебрежимо мал.

В этом случае $\rho_{10} = \rho_{20} = \rho_0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\sigma_{Ti} = 0$ и выражения (2.1.42) имеют простейшую формулу

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cos \omega \zeta}{\sin \omega \zeta} - 1 \right) \quad (2.1.44)$$

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{u_c}{2} + \sqrt{\frac{\rho_0 \lambda}{\alpha}} \frac{1}{\cos \frac{\pi \omega}{2}} (\sin \omega \zeta + \sin \frac{\omega \pi}{2}) \quad (2.1.45)$$

$$\varphi_2(\zeta) = \frac{u_c}{2} - \sqrt{\frac{\rho_0 \lambda}{\alpha}} \frac{1}{\cos \frac{\pi \omega}{2}} (\sin \frac{\pi \omega}{2} - \sin \omega \zeta) \quad (2.1.46)$$

Эти выражения совпадают с известными формулами, представленными в работе [25]. Сопротивление сужения [59], ограниченное контактной поверхностью и эквипотенциальной поверхностью ζ , определяется в этом случае как

$$R(\zeta) = \frac{\rho_0}{2\pi r_0 \omega} \frac{\sin \omega \zeta}{\cos \frac{\pi \omega}{2}}. \quad (2.1.47)$$

Сопротивление сужения одного контактного элемента ($\zeta = \pi/2$)

$$R(\pi/2) = \frac{\rho_0}{2\pi r_0 \omega} \tan \frac{\pi \omega}{2}, \quad (2.1.48)$$

и общее сопротивление двойное.

4. Гетерогенные контакты. Эффект Томсона пренебрежимо мал. Электрическое сопротивление постоянное.

В этом случае $\sigma_{Ti} = 0$, $\alpha_i = 0$. Если $\rho_{20} > \rho_{10}$, тогда

$$\theta_i(\zeta) = -\frac{I^2 \rho_{i0}}{8\pi^2 \lambda_i r_0^2} \zeta^2 + A_i \zeta + B_i, \quad R = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \quad (2.1.49)$$

где

$$A_i = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{I^2}{32r_0^2} \left(\frac{\rho_{20}}{\lambda_2} - \frac{\rho_{10}}{\lambda_1} \right), \quad B_1 = B_2 = \frac{I^2 (\rho_{20} \lambda_1 - \rho_{10} \lambda_2)}{32r_0^2 (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

$$\zeta_0 = \frac{\pi (\rho_{20} \lambda_1 - \rho_{10} \lambda_2)}{4\rho_{20} (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

Наибольшее смещение максимальной изотермы температуры ζ_0 не превышает радиус контактного пятна f , потому что $\zeta_0 \leq \frac{\pi}{4}$.

Если температурный интервал относительно мал (или α_i мало), R то сопротивление сужению можно записать в виде

$$R = \frac{\rho_{10} + \rho_{20}}{2r_0} + \frac{2}{3} \frac{\rho_{10} \alpha_1 \theta_{10} + \rho_{20} \alpha_2 \theta_{20}}{2r_0} + \frac{\rho_{10} \alpha_1 \lambda_2 - \rho_{20} \alpha_2 \lambda_1}{4r_0 (\lambda_1 + \lambda_2)} (\theta_{20} - \theta_{10}) \quad (2.1.50)$$

где $\theta_{i0} = A_i - \frac{1}{\alpha_i}$ значение температуры на контактном пятне.

5. Неоднородные контакты с эффектом Томсона. Электрическое сопротивление постоянное.

В этом случае $\alpha_i = 0$, и выражение (2.1.26) переходит:

$$\Phi_i'' + 2\delta_i(1 + \beta_i\Phi_i)\Phi_i' + \chi_i = 0 \quad (2.1.51)$$

где

$$\chi_i = \frac{I^2 \rho_{i0}}{4\pi^2 r_0^2 \lambda_i}$$

Замещение

$$\Phi_i(\zeta) = y_i(x_i) \quad (2.1.52)$$

где

$$y_i(x_i) = \exp\left\{\delta_i \int_0^{x_i} [1 + \beta_i\Phi_i(\zeta)] d\zeta\right\}, \quad x_i = P_i \zeta, \quad P_i = (\delta_i \chi_i \beta_i)^{1/3} \quad (2.1.53)$$

сводит это уравнение к виду

$$\frac{d}{dx_i} \left\{ \frac{1}{y_i(x_i)} \frac{d^2}{dx_i^2} [y_i(x_i)] \right\} + 1 = 0, \quad -\frac{\pi}{2} P_1 < x_1 < 0, \quad 0 < x_2 < \frac{\pi}{2} P_2$$

Общее решение последнего уравнения может быть выражено через функции Бесселя:

$$y_i(x_i) = \sqrt{v_i} [C_i J_{1/3}(\frac{2}{3} v_i^{3/2}) + D_i Y_{1/3}(\frac{2}{3} v_i^{3/2})], \quad v_i = x_i + E_i \quad (2.1.54)$$

Константы C_i, D_i, E_i определяются условием (2.1.24), (2.1.28), (2.1.29) которая может быть записана по уравнениям (2.1.30), (2.1.38), (2.1.39) в виде

$$\frac{\lambda_1 P_1^2}{\beta_1 \delta_1} [y_1''(0) - y_1'(0)] = \frac{\lambda_2 P_2^2}{\beta_2 \delta_2}, \quad \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{P_1}{\delta_1} y_1'(0) - 1 \right] = \frac{1}{\beta_2} \left[\frac{P_2}{\delta_2} y_2'(0) - 1 \right] \quad (2.1.55)$$

$$y_1'(-\frac{\pi}{2} P_1) = \delta_1 P_1, \quad y_2'(\frac{\pi}{2} P_2) = \delta_2 P_2$$

с двумя дополнительными условиями

$$y_i(0) = 1, \quad i = 1, 2 \quad (2.1.56)$$

вытекающих из выражения (2.1.39).

Потенциалы φ_i определяются из предыдущих выражений

$$\varphi_i(\zeta) = \{(-1)^i \frac{u_c}{2} + \frac{I \rho_{i0}}{2\pi r_0} \int_{(-1)^i \pi/2}^{\zeta} [1 + \alpha_i \Phi_i(\zeta)] d\zeta\} \quad (2.1.57)$$

3 ЯВЛЕНИЕ МОСТА

Мост расплавленного металла, который образован между электрическими контактами на последней ступени контактного отверстия, является причиной ненадежной работы реле низкого тока и систем управления, работающих с мили- и микроамперами. Длительность и другие характеристики электрической дуги, воспламеняемой в парах разрывающегося моста, зависят также от параметров моста [16]. Проблемы экспериментальных и теоретических исследований мостовых явлений были рассмотрены во многих работах. Об этом подробно рассказывается в книге [9]. Однако проблема математического моделирования мостов остается по-прежнему одной из основных проблем современной теории электрических контактов.

Математическая модель, описывающая динамику температурного поля на последовательных этапах контактного раскрытия [7], позволяет заключить, что самый горячий отрезок моста смещается из центра из-за термоэлектрических эффектов. В работах [18], [19] было показано, что если контакты однородны, то туннельный эффект является наиболее важным и ответственен за разрыв моста на его анодной стороне. Этот разрыв сопровождается переносом металла от анода к катоду. Во время следующей коммутации контактные поверхности состоят из того же материала, что и анод, поэтому перенос материала снова происходит от анода к катоду из-за того же перегрева туннеля. В результате такой передачи на катоде накапливается тонкий слой анодного материала, называемый шпилем, а на аноде появляется кратер.

Процесс переноса материала весьма различен, если удастся выбрать состав контактных пар для обеспечения переноса отрицательных материалов с катода на анод при первом открытии. В этом случае перенос материалов положительный, он поступает от анода к катоду. Эта передача продолжается до тех пор, пока все, переданное во время работы с первым открытием, снова будут заменены на катод, и после этого произойдет отрицательный перенос. Очень малая толщина материала катода имеет долю в передаче в этом случае, поэтому надежность контактов может быть достаточно улучшена.

Эмпирический выбор состава таких контактных пар, который обеспечивает выше самоподдерживаемую передачу моста, был выполнен Планном [20], который обнаружил контактные пары: Au - Pt, Ag - Pt, Au - Pt Ir (20%), Au - Pd, Pd - Pt с первым компонентом в виде анода. М. А. Разумихин [21] подтвердил принцип выбора контактных пар с начальным отрицательным переносом с использованием сплавов Pt Ni (5%) в виде анода и Pd Ag (40%) в качестве катода. Он обнаружил, что эта композиция обеспечивает очень маленький слой катодного материала, который обладает большим удельным сопротивлением, выполняя при передаче даже при длительной работе.

3.1 Симметричный квазистационарный мост.

Общая математическая модель, описывающая электромагнитные и температурные поля в мостике и прилегающих областях системой МГД-уравнений, представлена в работах [8] - [9]. Однако эта модель очень сложна и требует специальных компьютерных программ. В работе [9] показано, что если скорость открытия контакта невелика, то именно $d\alpha/dt \leq 4m \cdot \text{sec}^{-1}$, тогда процесс моста можно считать квазистационарным и описывать уравнениями, где t только параметр.

В этом случае мы представляем довольно простую модель, которая позволяет анализировать влияние разных факторов на процесс моста. В соответствии с этим модельным уравнением

$$\lambda_i \rho_i \nabla^2 \theta_i + \sigma_{Ti} \nabla \theta_i \cdot \nabla \varphi_i + (\nabla \varphi_i)^2 = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\text{curl} \left(\frac{1}{\rho_i} \nabla \varphi_i \right) = 0 \quad i = 1, 3, 4 \quad (3.1.2)$$

где λ_i - теплопроводность, $\rho_i = \rho_{i0}(1 + \alpha_i \theta_i)$ - удельное электрическое сопротивление, α_i его температурный коэффициент и σ_{Ti} коэффициент Томсона, описывают температурное и электромагнитное поля θ_i и φ_i в каждой области D_i ($i = 1, 3, 4$).

Чтобы выбрать простое уравнение для моста, мы используем результат Джонса [10], который показал, что градиент температуры в поперечном сечении моста пренебрежимо мал. В этом случае мост можно наблюдать как стержень с переменным поперечным сечением $\pi y^2(z, t)$, несущим только осевую составляющую теплового потока. Уравнения квазистационарного переноса тепла и распределения потенциала в видимой части моста D_2 в этой модели:

$$\frac{d^2 \theta_2}{dz^2} + \frac{2y_z}{y} \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{I \sigma_{T2}}{\pi \lambda_2 y^2} \frac{d \theta_2}{dz} + \frac{I^2 \rho_{20}(1 + \alpha_2 \theta_2)}{\pi^2 \lambda_2 y^4} = 0 \quad (3.1.3)$$

$$\frac{d \varphi_2}{dz} = \frac{\rho_{20}(1 + \alpha_2 \theta_2)}{\pi y^2} \quad (3.1.4)$$

где I - ток.

Граничные условия:

а) Для границ видимой части моста

$$z = 0, \quad \text{if } 0 \leq r < r_1(t), \quad \text{и } z = -\alpha(t), \quad \text{если } 0 \leq r < r_0$$

$$i = 1 \text{ для } z = 0, \quad \text{и } i = 3 \text{ для } z = -\alpha(t)$$

мы можем записать условия непрерывности температуры, тепловых потоков, электрических потенциалов и плотности тока:

$$\theta_i = \theta_{i+1}, \quad \lambda_i \frac{\partial \theta_i}{\partial z} = \lambda_{i+1} \frac{\partial \theta_{i+1}}{\partial z}, \quad \varphi_i = \varphi_{i+1}, \quad \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{i+1}} \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial z} \quad (3.1.5)$$

б) На боковой поверхности моста, а также на контактных поверхностях вне моста $z = 0$ и $z = -\alpha(t)$ тепло и электрическую передачу можно пренебречь:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0 \quad (3.1.6)$$

в) В областях, отдаленных от контактной зоны, даются электрические потенциалы, а температура постоянна (эту константу мы определяем как 0):

$$\theta_1 = 0, \quad \varphi_1 = -\frac{1}{2} u_c, \quad \text{если} \quad z < 0, \quad r^2 + z^2 = \infty, \quad (3.1.7)$$

$$\theta_4 = 0, \quad \varphi_4 = \frac{1}{2} u_c, \quad \text{если} \quad z > 0, \quad r^2 + z^2 = \infty \quad (3.1.8)$$

г) На поверхности $z = \sigma_1(r, t)$ между жидкой и твердой зонами (D_1 и D_4) температура равна температуре плавления:

$$\theta_3 = \theta_4 = \theta_m, \quad \text{если} \quad z = \sigma(r, t) \quad (3.1.9)$$

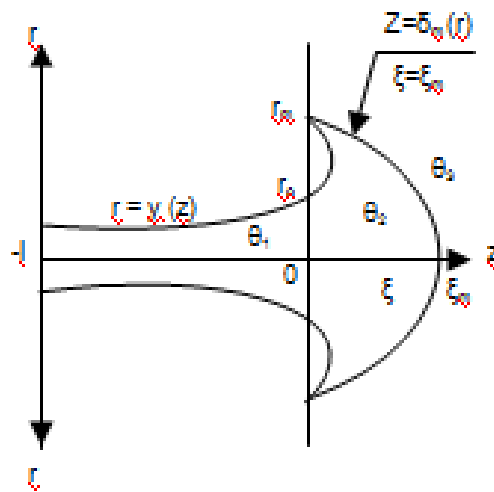


Рисунок 5 – Форма моста

3.1.1 Видимая часть моста

Рассмотрим симметричный металлический жидкий мост между открывающимися контактами, состоящими из двух частей: видимая часть занята областью D_1 ($-1 \leq z \leq 0$, $0 \leq r \leq y(z)$) и скрытой частью внутри тела контакта D_2 ($0 \leq z \leq \delta_m(r)$ когда $0 \leq r \leq r_0$ и $g^{-1}(r) \leq z \leq \delta_m$ когда $r_0 \leq r \leq r_m$). Контактная область D_3 занята сплошной зоной. Форма моста должна обеспечивать минимум энергии поверхностного натяжения [68]. Эту энергию для области D_1 можно записать в виде:

$$W(y) = 2\pi \int_{-1}^0 \chi y \sqrt{1 + y_z^2} dz \quad \text{где} \quad y_z = dy / dz,$$

где χ коэффициент поверхностного натяжения.

Вариационный принцип минимума функционала $W(y)$ основан на уравнении Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial y_z} = 0$$

где $F(y, y_z) = 2\pi\chi y \sqrt{1 + y_z^2}$

если $\chi = \text{константа}$, мы получаем

$$2\pi\chi \sqrt{1 + y_z^2} - \frac{d}{dz} \frac{2\pi\chi y y_z}{\sqrt{1 + y_z^2}} = 0$$

после дифференцирования

$$\sqrt{1 + y_z^2} - \frac{(y y_{zz} + y_z)^2 (1 + y_z^2 - y y_z^2 y_{zz})}{(1 + y_z^2)^{3/2}} = 0$$

(или)

$$1 - y_z^2 - y y_{zz} = 0$$

Это автономное уравнение, таким образом, используя замену $y_z(z) = v(y)$

Мы можем свести это уравнение к уравнению первого порядка:
 $y_{zz}(z) = v'(y) y_z(z) = v'(y) v(y)$

Таким образом

$$1 + v^2 - y v v' = 0$$

$$(или) v v' - \frac{1}{y} v^2 = \frac{1}{y}$$

Это уравнение Бернулли, для которого мы используем замену $v^2(y) = W(y)$. Затем для $W(y)$ мы получаем $W'(y) - \frac{2}{y} W(y) = \frac{2}{y}$, которое является

линейным уравнением с решением $W(y) = -1 + C_1 y^2$
отсюда

$$v(y) = \sqrt{C_1 y^2 - 1}$$

and

$$\frac{dy}{dz} = \sqrt{C_1 y^2 - 1}$$

$$z = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \frac{1}{C_1}}}$$

Если вместо этого ввести новую произвольную постоянную C_1 по формуле $\frac{1}{C_1} = a^2$, тогда

$$z = a \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = a \ln \left| y + \sqrt{y^2 - a^2} \right| + \ln C_2$$

$$= \ln [C_2 (y + \sqrt{y^2 - a^2})^a]$$

Thus

$$C_2 (y + \sqrt{y^2 - a^2})^a = e^z$$

$$y + \sqrt{y^2 - a^2} = \frac{1}{C_2^{1/a}} e^{\frac{z}{a}}$$

Если вместо этого ввести новую произвольную постоянную $b = \frac{1}{C_2^{1/a}}$,

тогда

$$y + \sqrt{y^2 - a^2} = b e^{\frac{z}{a}}$$

Из которой мы получаем

$$y(z) = \frac{b}{2} e^{\frac{z}{a}} + \frac{a^2}{2b} e^{-\frac{z}{a}}$$

Это общее решение для формы моста с двумя произвольными константами a и b . Чтобы найти эти константы, воспользуемся граничными условиями для $y(z)$. Условие симметрии моста $y'(-l) = 0$ дает :

$$\frac{b}{2a} e^{-\frac{l}{a}} + \frac{a}{2b} e^{\frac{l}{a}} = 0, \rightarrow e^{\frac{2l}{a}} = \frac{b^2}{a^2} \rightarrow e^{\frac{l}{a}} = \frac{b}{a}, \quad \rightarrow \quad b = a e^{\frac{l}{a}}$$

$$y(z) = \frac{a}{2} e^{\frac{z+l}{a}} + \frac{a}{2} e^{\frac{-z-l}{a}} = a \cosh \frac{z+l}{a}$$

$$y(z) = a \cosh \frac{z+l}{a} \tag{3.1.10}$$

Это цепная связь. Второе условие $y(0) = r_0$ дает уравнение

$$r_0 = a \cosh \frac{l}{a}, \tag{3.1.11}$$

из которого можем найти a .

3.1.2 Скрытая часть моста.

Давайте приблизим форму моста внутри тела электрода (область D_0 , $r_0 \leq r \leq r_m$, $0 \leq z \leq \delta_0(r)$) кубической параболой)

$$z = k (r - r_o)(r_m - r)(r + b) = \delta_o (r)$$

Эта парабола проходит через точки $z = 0, r = r_o$ and $z = 0, r = r_m$. Константы k и b следует выбирать для удовлетворения двух условий:

а) Поверхность моста должна быть гладкой при $z = 0, r = r_o$, т.е.

$$\left. \frac{dy}{dz} \right|_{z=0} \cdot \left. \frac{d\delta_o}{dr} \right|_{r=r_o} = 1 \quad (\text{или})$$

$$\left. \frac{d\delta_o}{dr} \right|_{r=r_o} = \frac{1}{\text{Sinh} \frac{l}{a}}$$

б) Угол ψ между поверхностями $z = \delta_o(r)$ и $z = \delta_m(r)$ в точке $z = 0, r = r_m$ равен углу смачивания, заданному для каждого жидкого металла.

$$\left. \frac{d\delta_o}{dr} \right|_{r=r_m} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -g$$

Используя эти условия, получаем:

$$\delta_o(r) = \frac{(r - r_o)(r_m - r)(r + b)}{(r_m - r_o)(r_o + b) \text{Sinh} \frac{l}{a}}$$

где

$$b = \frac{r_m - r_o g \cdot \text{Sinh} p}{g \text{Sinh} p - 1}$$

Приравнивая объем видимой части мост ($-l \leq z \leq 0, 0 \leq r \leq r_o$) и объем области D_o ($r_o \leq r \leq r_m, 0 \leq z \leq \delta_o(r)$) вытянутый из жидкого пула, мы получим

$$\pi \int_{-l}^0 y^2(z) dz = 2\pi \int_{r_o}^{r_m} \frac{(r - r_o)(r_m - r)(r + b)}{(r_m - r_o)(r_o + b) \text{Sinh} \frac{l}{a}} r dr$$

(или)

$$\text{Sinh} \frac{l}{a} \int_{-l}^0 y^2(z) dz = \frac{2}{(r_m - r_o)(r_o + b)} \int_{r_o}^{r_m} (r - r_o)(r_m - r)(r + b) r dr \quad (3.1.12)$$

3.1.3 Температурное поле видимой части моста

Как правило, критерий Фурье для тепловых процессов в мосту достаточно велик ($Fo \sim 10 - 10^2$) для применения квазистационарной модели температурного поля. Z-осевой компонент, если теплопередача из-за металлической теплопроводности намного больше радиальных компонентов из-за конвекции и излучения в окружающий газ [52]. Поэтому поле температуры в видимой части моста может быть описано квазистационарным

уравнением теплопроводности в осевом направлении (z). Однако плотность тока j различна для разных z : $j = \frac{i}{\pi y^2(z)}$, а также плотности теплового потока.

Чтобы принять во внимание этот факт, мы используем уравнение теплопроводности для тела с переменным поперечным сечением

$$\frac{1}{y^2(z)} \frac{d}{dz} \left[y^2(z) \frac{d\theta_1}{dz} \right] + \frac{\rho_{10} i^2 (1 + \alpha_1 \theta_1)}{\pi^2 \lambda_1 y^4(z)} = 0, \quad -l < z < 0 \quad (3.1.13)$$

где $\theta_1(z)$ температура, $\rho_1 = \rho_{10} (1 + \alpha_1 \theta_1)$ электрическое сопротивление, i ток и λ_1 теплопроводность жидкого моста.

Граничными условиями для уравнения (3.1.13) являются:

а) условие максимума температуры в центре моста $z = -l$

$$\left. \frac{d\theta_1}{dz} \right|_{z=-l} = 0 \quad (3.1.14)$$

б) температура в точке $z = 0$

$$\theta_1|_{z=0} = \theta_0 \quad (3.1.15)$$

Значение θ_0 на этот раз неизвестно и будет определено позже. Для решения уравнения (3.1.13) воспользуемся подмножеством

$$\eta = 2r_o \int_{-l}^z \frac{dz_1}{y^2(z)} \quad (3.1.16)$$

тогда

$$\frac{d\theta_1}{dz} = \frac{d\theta_1}{d\eta} \frac{d\eta}{dz} = \frac{2r_o}{y^2(z)} \frac{d\theta_1}{d\eta}$$

$$\frac{d}{dz} \left[y^2(z) \frac{d\theta_1}{dz} \right] = 2r_o \frac{d^2\theta_1}{d\eta^2} \cdot \frac{d\eta}{dz} = \frac{4r_o^2}{y^2(z)} \frac{d^2\theta_1}{d\eta^2}$$

$$\frac{1}{y^2(z)} \frac{d}{dz} \left[y^2(z) \frac{d\theta_1}{dz} \right] = \frac{4r_o^2}{y^2(z)} \frac{d^2\theta_1}{d\eta^2}$$

Подставляя это значение в уравнение (3.1.13), получим

$$\frac{d^2\theta_1}{d\eta^2} + \frac{i^2 \rho_{10}}{4\pi^2 \lambda_1 r_o^2} (1 + \alpha_1 \theta_1)$$

$$\frac{d^2\theta_1}{d\eta^2} + \omega_1 \left(\theta_1 + \frac{1}{\alpha_1} \right) \quad \text{где} \quad \omega_1 = \frac{i}{2\pi r_o} \sqrt{\frac{\rho_{10} \alpha}{\lambda_1}}$$

Общее решение

$$\theta_1(\eta) = A_1 \text{Cos} \omega_1 \eta + B_1 \text{Sin} \omega_1 \eta - \frac{1}{\alpha_1}$$

Из формулы Г.У. (3.1.14) получим

$$\left. \frac{d\theta_1}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \text{таким образом } B_1 = 0 \text{ и}$$

$$\theta_1(\eta) = A_1 \cos \omega_1 \eta - \frac{1}{\alpha_1}$$

Из формулы Г.У. (3.1.15) получим

$$\theta_1 \Big|_{\eta=\eta_0} = \theta_0 \quad \text{где} \quad \eta_0 = 2r_0 \int_{-1}^0 \frac{dz}{y^2(z)} \quad (3.1.17)$$

Решение, удовлетворяющее этому условию,

$$\theta_1(\eta) = \frac{\cos \omega_1 \eta}{\cos \omega_1 \eta_0} \cdot \left(\theta_0 + \frac{1}{\alpha_1} \right) - \frac{1}{\alpha_1} \quad (3.1.18)$$

3.1.4 Температурное поле скрытой части моста

Теперь, чтобы найти температурное поле θ_2 внутри скрытой части электрода, положим $\theta_2(r, z) = \theta_2(\xi)$ где

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s + \sqrt{s^2 + 4r_0^2 z^2}}, \quad s = r^2 + z^2 - r_0^2$$

Затем имеем

$$\lambda_1 \theta_2''(\xi) + \lambda_1 \theta_2'(\xi) \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} + \frac{I^2 \rho_{10}}{4\pi^2 (r_0^2 + \xi^2)^2} = 0$$

$$\text{если } u = \arctan \frac{\xi}{r_0} \quad (3.1.19)$$

тогда

$$\lambda_1 \frac{d^2 \theta_2}{du^2} + \frac{i^2 \rho_{10}}{4\pi^2 \lambda_1 r_0^2} (1 + \alpha_1 \theta_2) = 0$$

(или)

$$\theta_2''(u) + \omega_1^2 \left(\theta_2 + \frac{1}{\alpha_1} \right) = 0$$

Общее решение уравнения

$$\theta_2(u) = A_2 \cos \omega_1 u + B_2 \sin \omega_1 u - \frac{1}{\alpha_1}$$

Из формулы Г.У. $\theta_2 \Big|_{z=0} = \theta_0$ получим

$$\theta_2 \Big|_{u=0} = \theta_0 \quad \text{тогда}$$

$$A_2 = \theta_o + \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{и}$$

$$\theta_2(u) = \left(\theta_o + \frac{1}{\alpha_1}\right) \text{Cos} \omega_1 u + B_2 \text{Sin} \omega_1 u - \frac{1}{\alpha_1}$$

Формула Г.У. $\theta_2|_{z=\sigma_m} = \theta_m$ дает $\theta_2|_{u=u_m} = \theta_m$

$$\text{где } u_m = \arctan \frac{\xi_m}{r_o} \quad (3.1.20)$$

отсюда

$$\theta_m = \left(\theta_o + \frac{1}{\alpha_1}\right) \text{Cos} \omega_1 u_m + B_2 \text{Sin} \omega_1 u_m - \frac{1}{\alpha_1}$$

$$B_1 = \frac{1}{\text{Sin} \omega_1 u_m} \left[\theta_m + \frac{1}{\alpha_1} - \left(\theta_o + \frac{1}{\alpha_1}\right) \text{Cos} \omega_1 u_m \right] \quad \text{и}$$

$$\theta_2 = \left(\theta_o + \frac{1}{\alpha_1}\right) \text{Cos} \omega_1 u + \frac{\text{Sin} \omega_1 u}{\text{Sin} \omega_1 u_m} \left[\theta_m + \frac{1}{\alpha_1} - \left(\theta_o + \frac{1}{\alpha_1}\right) \text{Cos} \omega_1 u_m \right] - \frac{1}{\alpha_1} \quad (3.1.21)$$

Чтобы найти значение of θ_o из уравнения

$$\frac{d\theta_1}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{d\langle \theta_2 \rangle}{dz} \Big|_{z=0} \quad \text{где } \langle \theta_2 \rangle = \frac{2}{r_o} \int_0^{r_o} \theta_2(r, z) r dr$$

получим

$$\frac{d\theta_1}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{d\theta_1}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_o} \cdot \frac{d\eta}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{d\theta_1}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_o} \cdot \frac{2r_o}{y^2(0)} = \frac{2}{r_o} \frac{d\theta_1}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_o}$$

$$\frac{d\langle \theta_2 \rangle}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{d}{dz} \cdot \frac{2}{r_o^2} \int_0^{r_o} \theta_2(r, z) r dr \Big|_{z=0} = \frac{2}{r_o^2} \int_0^{r_o} \frac{\partial \theta_2(r, z)}{\partial z} r dr$$

$$\frac{\partial \theta_2(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{d\theta_1}{du} \Big|_{u=0} \cdot \frac{du}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \cdot \frac{d\xi}{dz} \Big|_{z=0, 0 \leq r \leq r_o} = \frac{d\theta_2}{du} \Big|_{u=0} \cdot \frac{1}{r_o} \cdot \frac{d\xi}{dz} \Big|_{z=0, 0 \leq r \leq r_o}$$

$$\frac{d\xi}{dz} \Big|_{z=0, 0 \leq r \leq r_o} = \begin{cases} \frac{r_o}{\sqrt{r_o^2 - r^2}} \dots \dots 0 \leq r \leq r_o \\ 0 \dots \dots \dots r_o \leq r \leq \infty \end{cases}$$

получим

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{r_o^2 - r^2}} \cdot \frac{d\theta_2}{du} \Big|_{u=0}$$

$$\left. \frac{d\langle\theta_2\rangle}{dz} \right|_{z=0} = \frac{2}{r_o^2} \cdot \left. \frac{d\theta_2}{du} \right|_{u=0} \cdot \int_0^{r_o} \frac{rdr}{\sqrt{r_o^2 - r^2}} = \frac{2}{r_o} \left. \frac{d\theta_2}{du} \right|_{u=0}$$

Таким образом

$$\left. \frac{d\theta_1}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_o} = \left. \frac{d\theta_2}{du} \right|_{u=0}$$

Отсюда получаем значение θ_o , т.е.

$$\theta_o = \left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{Co sec } \omega_1 u_m \cdot [\text{Cot } \omega_1 u_m - \tan \omega_1 \eta_o]^{-1} - \frac{1}{\alpha} \quad (3.1.22)$$

3.1.5 Температурное поле твердой области электрода

Теперь, чтобы найти значение температурного поля в твердой области электрода, поместим как $\theta_2(r, z)$, т.е.

$$\theta_3(r, z) = \theta_3(u), \quad u = \arctan \frac{\xi}{r_o}$$

Тогда уравнение теплопроводности для $\theta_3(r, z)$

$$\theta_3''(u) + \omega_2^2 \left(\theta_3 + \frac{1}{\alpha_2} \right) = 0$$

где сейчас $\omega_2 = \frac{i}{2\pi r_o} \sqrt{\frac{\rho_{20} \alpha_2}{\lambda_2}}$

Общее решение

$$\theta_3(u) = A_3 \text{Cos } \omega_2 u + B_3 \text{Sin } \omega_2 u - \frac{1}{\alpha_2}$$

Формула Г.У. $\theta_3|_{u=u_m} = \theta_m, \quad \theta_3|_{u=\frac{\pi}{2}} = 0$

Таким образом

$$A_3 \text{Cos } \omega_2 u_m + B_3 \text{Sin } \omega_2 u_m = \theta_m + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$A_3 \text{Cos } \omega_2 \frac{\pi}{2} + B_3 \text{Sin } \omega_2 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\alpha_2}$$

с использованием метода криминальных матриц мы получаем A_3 и B_3

$$A_3 = \frac{1}{\text{Sin } \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - u_m \right)} \left[\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2} \right) \text{Sin } \frac{\omega_2 \pi}{2} - \frac{1}{\alpha_2} \text{Sin } \omega_2 u_m \right]$$

$$B_3 = \frac{1}{\text{Sin}\omega_2\left(\frac{\pi}{2}-u_m\right)} \left[-\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2}\right)\text{Cos}\frac{\omega_2\pi}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\text{Cos}\omega_2u_m \right]$$

Значение $\theta_3(u)$ становится

$$\begin{aligned} \theta_3(u) &= \frac{\text{Cos}\omega_2u}{\text{Sin}\omega_2\left(\frac{\pi}{2}-u_m\right)} \left[\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2}\right)\text{Sin}\frac{\omega_2\pi}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\text{Sin}\omega_2u_m \right] \\ &+ \frac{\text{Sin}\omega_2u}{\text{Sin}\omega_2\left(\frac{\pi}{2}-u_m\right)} \left[-\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2}\right)\text{Cos}\frac{\omega_2\pi}{2} + \frac{1}{\alpha_2}\text{Cos}\omega_2u_m \right] - \frac{1}{\alpha_2} \end{aligned}$$

(3.1.23)

Значение u_m должно быть найдено из уравнения

$$\lambda_1 \frac{d\theta_2}{du} \Big|_{u=u_m} = \lambda_2 \frac{d\theta_3}{du} \Big|_{u=u_m}$$

т.е.

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \left[-\left(\theta_o + \frac{1}{\alpha_1}\right)\omega_1\text{Sin}\omega_1u_m + \frac{\omega_1\text{Cos}\omega_1u_m}{\text{Sin}\omega_1u_m} \left[\theta_m + \frac{1}{\alpha_1} - \left(\theta_o + \frac{1}{\alpha_1}\right)\text{Cos}\omega_1u_m \right] \right] \\ &= \lambda_2 \left[\frac{-\omega_2\text{Sin}\omega_2u_m}{\text{Sin}\omega_2\left(\frac{\pi}{2}-u_m\right)} \left[\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2}\right)\text{Sin}\frac{\omega_2\pi}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\text{Sin}\omega_2u_m \right] + \frac{\omega_2\text{Cos}\omega_2u_m}{\text{Sin}\omega_2\left(\frac{\pi}{2}-u_m\right)} \left[-\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2}\right)\text{Cos}\frac{\omega_2\pi}{2} + \frac{1}{\alpha_2}\text{Cos}\omega_2u_m \right] \right] \end{aligned}$$

Мы получаем

$$\begin{aligned} &\omega_1\lambda_1 \left[\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_1}\right)\text{Cot}\omega_1u_m - \left(\theta_o + \frac{1}{\alpha_1}\right)\text{Cosec}\omega_1u_m \right] \\ &= \omega_2\lambda_2 \left[-\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2}\right)\text{Cot}\omega_2\left(\frac{\pi}{2}-u_m\right) + \frac{1}{\alpha_2}\text{Cosec}\omega_2\left(\frac{\pi}{2}-u_m\right) \right] \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

3.1.6 Уравнения для неизвестной константы:

Подставляя (3.1.9) в (3.1.16) и интегрируя, имеем

$$\eta = 2r_o \int_{-l}^z \frac{dz_1}{y^2(z_1)} = \frac{2r_o}{a^2} \int_{-l}^z \frac{dz_1}{\text{Cosh}^2 \frac{z+l}{a}} = \left\| \frac{z+l}{a} = x \right\| = \frac{2r_o}{a} \int_0^{\frac{z+l}{a}} \frac{dz_1}{\text{Cosh}^2 x}$$

$$\frac{2r_o}{a} \tanh x \Big|_0^{\frac{z+l}{a}} = \frac{2r_o}{a} \tanh \frac{z+l}{a} \quad (3.1.25)$$

Для $z = 0$, получаем

$$\eta(0) = \eta_o = \frac{2r_o}{a} \tanh \frac{l}{a} \quad (3.1.26)$$

Из уравнения изотермы

$$\frac{r^2}{r_o^2 + \xi^2} + \frac{z^2}{\xi^2} = 1$$

$$\text{Мы получаем для } z = 0 \text{ \& } r = r_m \quad r_m^2 = r_o^2 + \xi^2$$

И из уравнения (3.1.19)

$$\xi_m^2 = r_o^2 \tan^2 u_m, \quad \text{следовательно}$$

$$r_o = r_m \text{Cos} u_m \quad (3.1.27)$$

используя уравнение (3.1.9) при $z = 0$, мы иеем значение r_o как

$$r_o = a \text{Cosh} \frac{l}{a} \quad (3.1.28)$$

Длина моста при разрыве возникает, когда температура в самом горячем сечении $z = -l$ ($\eta = 0$) достигает температуры кипения θ_b . Подстановка в уравнении (3.1.18) $\eta = 0$ и $\theta_1(0) = \theta_b$ получаем

$$\theta_o = \left(\theta_b + \frac{1}{\alpha} \right) \text{Cos} \omega_1 \eta_o - \frac{1}{\alpha} \quad (3.1.29)$$

Тогда мы иеем систему 7-уравнений (3.1.21), (3.1.22), (3.1.24), (3.1.26), (3.1.27), (3.1.28), и (3.1.29), с 7-неизвестными, т. е. r_o , r_m , u_m , η_o , l и a .

Решая эту систему, получаем требуемое температурное поле, заданное уравнением (3.1.10), (3.1.18), (3.1.21) и (3.1.23).

Решение уравнений:

Из уравнения (3.1.26) и (3.1.28) получаем

$$\eta_o = \frac{2r_o \text{Sinh} \frac{l}{a}}{a \text{Cosh} \frac{l}{a}} = \frac{2r_o \text{Sinh} \frac{l}{a}}{r_o} = 2 \text{Sinh} \frac{l}{a}$$

$$\text{Обозначение: } \frac{l}{a} = p$$

$$(3.1.30)$$

$$\text{тогда } \eta_o = 2 \text{Sinh} p \quad (3.1.31)$$

из (3.1.13) и (3.1.20) получаем

$$\text{Cos} \omega_1 (\eta_o + u_m) = \frac{\theta_m + \frac{1}{\alpha_1}}{\theta_b + \frac{1}{\alpha_1}}$$

$$\omega_1 (\eta_o + u_m) = \arccos \frac{\theta_m + \frac{1}{\alpha_1}}{\theta_b + \frac{1}{\alpha_1}}$$

$$\omega_1 = \frac{\arccos \frac{1 + \alpha_1 \theta_m}{1 + \alpha_1 \theta_b}}{u_m + 2 \operatorname{Sinh} p} \quad (3.1.32)$$

Следовательно

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\rho_{20} \alpha_2 \lambda_1}{\rho_{10} \alpha_1 \lambda_2}} \cdot \omega_1 \quad (3.1.33)$$

Теперь из (3.1.22) и (3.1.18) мы можем записать

$$r_m^3 (1 - \operatorname{Cos} u_m)^2 (1 + \operatorname{Cos} u_m) = 3 a^3 p \operatorname{Sinh} p \left(1 + \frac{1}{2p} \operatorname{Sinh} 2p\right)$$

таким образом

$$a = r_m \left[\frac{(1 - \operatorname{Cos} u_m)^2 (1 + \operatorname{Cos} u_m)}{3 p \operatorname{Sinh} p \left(1 + \frac{1}{2p} \operatorname{Sinh} 2p\right)} \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (3.1.34)$$

С другой стороны выражение (3.1.13) и (3.1.19) дает формулу

$$a = \frac{r_m \operatorname{Cos} u_m}{\operatorname{Cosh} p} \quad (3.1.35)$$

Сравните (3.1.34) и (3.1.35), получим

$$\operatorname{Cos} u_m = \operatorname{Cos} hp \left[\frac{(1 - \operatorname{Cos} u_m)^2 (1 + \operatorname{Cos} u_m)}{3 p \operatorname{Sinh} p \left(1 + \frac{1}{2p} \operatorname{Sinh} 2p\right)} \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (3.1.36)$$

(или)

$$\operatorname{Cos}^3 u_m \cdot (1 - \operatorname{Cos} u_m)^2 (1 + \operatorname{Cos} u_m) = \operatorname{Cosh}^3 p \cdot 3 p \operatorname{Sinh} p \left(1 + \frac{1}{2p} \operatorname{Sinh} 2p\right)$$

Наконец, используя (3.1.24) и подставляя его в выражение (3.1.29), (3.1.31), (3.1.32) и (3.1.33), получаем второе уравнение для u_m и p .

3.2 Асимметричный квазистационарный мост

В первой части мы обсудили симметричный мост без какого-либо смещения максимальной температуры от центра моста. Левелин Джонс

экспериментально огласил (для Pt), что в жидком мосте смещение температуры происходит из-за эффекта Томсона [53]. Он также обсудил, что если фактическое смещение самого горячего участка вызвано эффектом Томсона, то σ_{Th} должен изменить свой знак от отрицательного на положительный, когда металл расплавлен. Если это (σ_{Th}) отрицательно для твердого Pt, то положительное в расплавленном состоянии [55].

Форма асимметричного моста представлена на рисунке 6.

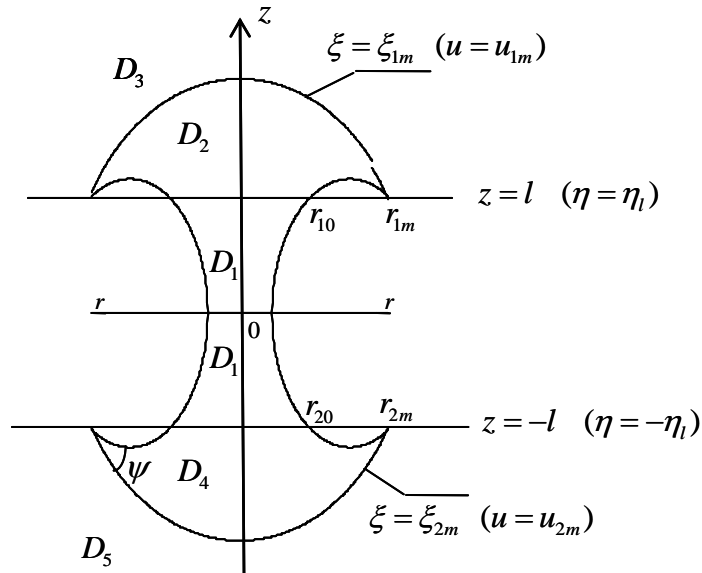


Рисунок 6 – Ассиметричный жидкий мост, D_1 - видимая часть, D_2 и D_4 - скрытые части, D_3 and D_5 - солевые зоны

3.2.1 Видимая часть моста

Теперь рассмотрим видимую часть моста, т. е. область D_1 и скрытые части внутри тела электрода $\theta_{b0}(\eta)$ и D_4 . Благодаря эффекту Томсона минимальный радиус и максимальная температура моста смещены от центра к аноду и катоду, чтобы получить материалы [56]. Форма моста должна обеспечивать минимум энергии поверхностного натяжения.

По вариационному принципу изменяемый радиус моста $y(z)$ равен

$$y(z) = \frac{b}{2} e^{\frac{z}{a}} + \frac{a^2}{2b} e^{-\frac{z}{a}}$$

Используя граничное условие $y(l)$, имеем

$$b = r_{1o} \pm \sqrt{r_{1o}^2 - a^2}$$

Используя граничное условие $y(l) = r_{1o}$, мы получаем

$$b = r_{2o} \pm \sqrt{r_{2o}^2 - a^2}$$

Поэтому приведенное выше уравнение для моста становится

$$y(z) = \frac{1}{2} \left(r_{10} + \sqrt{r_{10}^2 - a^2} \right) e^{\frac{z}{a}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{r_{10} + \sqrt{r_{10}^2 - a^2}} e^{-\frac{z}{a}}$$

Второе условие $y(-l) = r_{20}$ дает уравнение

$$2r_{20} \left(r_{10} + \sqrt{r_{10}^2 - a^2} \right) = \left(r_{10} + \sqrt{r_{10}^2 - a^2} \right)^2 e^{-l/a} + a^2 e^{l/a}, \quad \text{что позволяет выразить в терминах } r_{10} \text{ и } r_{20}.$$

В области D_0 , θ_1 можно определить по уравнению тепла с металлическими тепловыми и электрическими свойствами данного материала [72], т.е.

$$\frac{1}{y(z)^2} \frac{d}{dz} \left[y(z)^2 \frac{d\theta_1}{dz} \right] + \frac{\sigma_{Th}}{\lambda_1} \frac{d\theta_1}{dz} \cdot \frac{I}{\pi y^2(z)} + \frac{\rho_{10}(1 + \alpha_1 \theta_1) I^2}{\pi^2 \lambda_1 y(z)^4} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$-l < z < l$$

Граничные условия

$$z = l : \quad \theta_1 = \theta_{10}$$

$$z = -l : \quad \theta_1 = \theta_{20}$$

3.2.2. Температурное поле видимой части моста с эффектом Томсона

Теперь, чтобы найти температурное поле с эффектом Томсона в видимой части моста (D_0), можно описать квазистационарным уравнением теплопроводности в осевом направлении (z).

Подставляя в уравнение (1) следующее уравнение: $\eta = 2r_{10} \int_{-l}^z \frac{dz_1}{y(z)^2}$

$$\theta_1''(\eta) + \frac{\sigma_{Th} I}{2\pi r_{10} \lambda_1} \theta_1'(\eta) + \frac{I^2 \rho_{10} (1 + \alpha_1 \theta_1)}{4\pi^2 r_{10}^2 \lambda_1} = 0$$

$$\theta_1''(\eta) + \frac{\sigma_{Th} I}{2\pi r_{10} \lambda_1} \theta_1'(\eta) + \frac{I^2 \rho_{10} \alpha_1}{4\pi^2 r_{10}^2 \lambda_1} \theta_1(\eta) + \frac{I^2 \rho_{10}}{4\pi^2 r_{10}^2 \lambda_1} = 0$$

$$\theta_1''(\eta) + 2\beta \theta_1'(\eta) + \omega_1^2 \theta_1(\eta) + \frac{\omega_1^2}{\alpha_1} = 0$$

где

$$\beta = \frac{\sigma_{Th} I}{4\pi r_{10} \lambda_1} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \frac{I}{2\pi r_{10}} \sqrt{\frac{\rho_{10} \alpha_1}{\lambda_1}}$$

Решение вышеприведенного уравнения становится

$$\theta_1(\eta) = e^{-\beta\eta} (C_1 \text{Sin}\gamma\eta + C_2 \text{Cos}\gamma\eta) - \frac{1}{\alpha_1}$$

где $\gamma = \sqrt{\omega_1^2 - \beta^2}$

Граничные условия

$$\theta_1|_{z=l} = \theta_1|_{\eta=\eta_l} = \theta_{10} \quad \text{и} \quad \theta_1|_{z=-l} = \theta_1|_{\eta=0} = \theta_{20}$$

Следовательно

$$C_2 = \theta_{20} + \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{и} \quad C_1 = (\theta_{10} + \frac{1}{\alpha_1}) \frac{e^{\beta\eta_l}}{\text{Sin}\gamma\eta_l} - (\theta_{20} + \frac{1}{\alpha_1}) \text{Cot}\gamma\eta_l$$

Таким образом, решение, удовлетворяющее условию,

$$\theta_1(\eta) = e^{-\beta\eta} \left[(\theta_{20} + \frac{1}{\alpha_1}) \text{Cos}\gamma\eta + \left((\theta_{10} + \frac{1}{\alpha_1}) \frac{e^{\beta\eta_l}}{\text{Sin}\gamma\eta_l} - (\theta_{20} + \frac{1}{\alpha_1}) \text{Cot}\gamma\eta_l \right) \text{Sin}\gamma\eta \right] - \frac{1}{\alpha_1} \quad (3.2.2)$$

3.2.3. Температурное поле скрытой части (справа) моста

Температурное поле θ_2 внутри скрытой части электрода, которое аналогично уравнению (3.1.21), как мы видели в предыдущем разделе, т.е. в области D_1 , θ_2 будет

$$\frac{d^2\theta_2}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_2}{dz} + \frac{d^2\theta_2}{dz^2} + \frac{\rho_{10}(1 + \alpha_1\theta_2)j_1^2}{\lambda_1} = 0 \quad (3.2.3)$$

$$0 < r < r_{m1} \quad l < z < \delta_{m1}(r)$$

Граничные условия

$$z = l \quad \theta_2|_{\substack{z=l \\ 0 \leq r \leq r_{10}}} = \theta_{10}$$

$$z = \delta_{m1} \quad \theta_2|_{z=\delta_{m1}} = \theta_m$$

$$\frac{d\theta_2}{dz} \Big|_{\substack{z=l \\ r_{10} < r < \infty}} = 0$$

$$\theta_2(u_1) = A_1 \text{Cos} \omega_1 u_1 + B_1 \text{Sin} \omega_1 u_1 - \frac{1}{\alpha_1}$$

где $u_1 = \arctan \frac{\xi_1}{r_{10}} \quad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s_1 \sqrt{s_1^2 + 4r_{10}z_1}}$,

$$s_1 = r^2 + z_1 - r_{10} \quad \text{и} \quad z_1 = z - l$$

Формируем Г.У.: $\theta_2|_{z_1=0} = \theta_{10}$ получаем $\theta_2|_{u=0} = \theta_{10}$

Таким образом, $A_1 = \theta_{10} + \frac{1}{\alpha_1}$ и

Из формулы Г.У.: $\theta_2|_{z=\delta_{m1}} = \theta_m$ gives $\theta_2|_{u=u_m} = \theta_m$,

$$u_{1m} = \arctan \frac{\xi_{1m}}{r_{10}}$$

следовательно

$$B_1 = \frac{1}{\text{Sin}\omega_1 u_{1m}} \left[\theta_m + \frac{1}{\alpha_1} - \left(\theta_{10} + \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{Cos}\omega_1 u_{1m} \right] \quad \omega_1 = \frac{I}{2\pi r_{10}} \sqrt{\frac{\rho_{10} \alpha_1}{\lambda_1}}$$

Таким образом

$$\theta_2(u_1) = \left(\theta_{10} + \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{Cos}\omega_1 u_1 + \frac{\text{Sin}\omega_1 u_1}{\text{Sin}\omega_1 u_{1m}} \left[\theta_m + \frac{1}{\alpha_1} - \left(\theta_{10} + \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{Cos}\omega_1 u_{1m} \right] - \frac{1}{\alpha_1} \quad (3.2.4)$$

3.2.4 Температурное поле в области D₃ (правая твердая область)

Значение температурного поля в твердой области электрода мы имеем так же, как расчет [45], как в предыдущем разделе уравнения (3.1.23), т.е. в области D₃, θ_3 с электрическими и тепловыми свойствами твердого материала

$$\frac{d^2 \theta_3}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_3}{dz} + \frac{d^2 \theta_3}{dz^2} + \frac{\rho_{20}(1 + \alpha_2 \theta_3) j_2^2}{\lambda_2} = 0 \quad (3.2.5)$$

$$0 < r < r_{m1} \quad \delta_{m1}(r) < z < \infty$$

$$z = \delta_{m1} \quad \theta_3 = \theta_m$$

$$z = \infty (r = \infty) \quad \theta_3 = 0$$

$$\theta_3(r, z) = \theta_3(u_1), \quad u_1 = \arctan \frac{\xi_1}{r_{10}}$$

Тогда уравнение теплопроводности для $\theta_3(r, z)$

$$\theta_3''(u_1) + \omega_2^2 \left(\theta_3 + \frac{1}{\alpha_2} \right) = 0$$

$$\text{где сейчас} \quad \omega_2 = \frac{i}{2\pi r_{10}} \sqrt{\frac{\rho_{20} \alpha_2}{\lambda_2}}$$

Общее решение

$$\theta_3(u_1) = A_3 \text{Cos}\omega_2 u_1 + B_3 \text{Sin}\omega_2 u_1 - \frac{1}{\alpha_2}$$

$$\text{Формула Г.У. } \theta_3|_{u_1=u_{1m}} = \theta_m \quad , \quad \theta_3|_{u_1=\frac{\pi}{2}} = 0$$

следовательно

$$A_3 \cos \omega_2 u_{1m} + B_3 \sin \omega_2 u_{1m} = \theta_m + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$A_3 \cos \omega_2 \frac{\pi}{2} + B_3 \sin \omega_2 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\alpha_2}$$

Используя метод криминальных матриц, мы получаем A_3 и B_3

$$A_3 = \frac{1}{\sin \omega_2 (\frac{\pi}{2} - u_{1m})} \left[(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2}) \sin \frac{\omega_2 \pi}{2} - \frac{1}{\alpha_2} \sin \omega_2 u_{1m} \right]$$

$$B_3 = \frac{1}{\sin \omega_2 (\frac{\pi}{2} - u_{1m})} \left[-(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2}) \cos \frac{\omega_2 \pi}{2} - \frac{1}{\alpha_2} \cos \omega_2 u_{1m} \right]$$

Значение $\theta_3(u)$ становится

$$\theta_3(u_1) = \frac{\cos \omega_2 u_1}{\sin \omega_2 (\frac{\pi}{2} - u_{1m})} \left[(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2}) \sin \frac{\omega_2 \pi}{2} - \frac{1}{\alpha_2} \sin \omega_2 u_{1m} \right] + \frac{\sin \omega_2 u_{1m}}{\sin \omega_2 (\frac{\pi}{2} - u_{1m})} \left[\frac{1}{\alpha_2} \cos \omega_2 u_{1m} - (\theta_m + \frac{1}{\alpha_2}) \cos (\frac{\omega_2 \pi}{2}) \right] - \frac{1}{\alpha_2}$$

(8)

$$\text{где сейчас } \omega_2 = \frac{I}{2\pi r_{10}} \sqrt{\frac{\rho_{20} \alpha_2}{\lambda_2}}$$

3.2.5 Температурное поле в скрытой части (слева) области жидкого мостика D_4

Слева от видимого моста поле температуры в скрытой части моста, то есть область D_4 , аналогично уравнению (3.2.4), но с разными координатами. В области D_4 (скрытая часть моста с левой стороны) аналогично область D_2 является

$$\frac{d^2 \theta_4}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_4}{dz} + \frac{d^2 \theta_4}{dz^2} + \frac{\rho_{10} (1 + \alpha_1 \theta_4) j_3^2}{\lambda_1} = 0 \quad (3.2.6)$$

$$0 < r < r_{m2} \quad -\delta_{m2} < z < -l$$

$$z = -l \quad \theta_2|_{\substack{z=-l \\ 0 \leq r \leq r_{20}}} = \theta_{20} \quad \text{и} \quad \frac{d\theta_4}{dz} \Big|_{\substack{z=-l \\ r_{20} < r < \infty}} = 0$$

$$z = \delta_{m2} \quad \theta_4 = \theta_m$$

$$\theta_4(u_2) = \left(\theta_{20} + \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{Cos} \omega_1 u_2 + \frac{\text{Sin} \omega_1 u_2}{\text{Sin} \omega_1 u_{2m}} \left[\theta_m + \frac{1}{\alpha_1} - \left(\theta_{20} + \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{Cos} \omega_1 u_{2m} \right] - \frac{1}{\alpha_1} \quad (3.2.7)$$

где

$$u_2 = \arctan \frac{\xi_2}{r_{2o}} \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s_2 \sqrt{s_2 + 4r_{20}z_2}}$$

$$s_2 = r^2 + z_2^2 - r_{20}^2 \quad \text{и} \quad z_2 = z + l$$

$$\text{КОГДА } \omega_1 = \frac{I}{2\pi r_{20}} \sqrt{\frac{\rho_{1o} \alpha_1}{\lambda_1}} \quad \text{и} \quad u_{2m} = \arctan \frac{\xi_{2m}}{r_{2o}}$$

3.2.6 Температурное поле в области D₅ (левая сплошная область)

Температура θ_5 в области D₅ аналогична температуре θ_3 в области D₃ но с разными координатами, т.е. в области D₅, как и D₃

$$\frac{d^2 \theta_5}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_5}{dz} + \frac{d^2 \theta_5}{dz^2} + \frac{\rho_{20}(1 + \alpha_2 \theta_5) j_4^2}{\lambda_1} = 0 \quad (3.2.8)$$

$$z = \delta_{m2} \quad \theta_5 = \theta_m \quad \text{и} \quad \theta_5|_{\infty} = 0$$

$$\theta_5(u_2) = \frac{\text{Cos} \omega_2 u_2}{\text{Sin} \omega_2 (\frac{\pi}{2} + u_{2m})} \left[\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2} \right) \text{Sin} \frac{\omega_2 \pi}{2} + \frac{1}{\alpha_2} \text{Sin} \omega_2 u_{2m} \right] + \frac{\text{Sin} \omega_2 u_{2m}}{\text{Sin} \omega_2 (\frac{\pi}{2} + u_{2m})} \left[\frac{1}{\alpha_2} \text{Cos} \omega_2 u_{2m} - \left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2} \right) \right] - \frac{1}{\alpha_2} \quad (3.2.9)$$

$$\text{где } \omega_2 = \frac{I}{2\pi r_{20}} \sqrt{\frac{\rho_{2o} \alpha_2}{\lambda_2}} - \text{уравнения для } \theta_{1o} \text{ и } \theta_{2o}$$

Чтобы найти значения θ_{1o} и θ_{2o} мы имеем

$$\frac{d\theta_1}{dz} \Big|_{z=l} = \frac{d \langle \theta_2 \rangle}{dz} \Big|_{z=l} \quad \text{где} \quad \langle \theta_2 \rangle = \frac{2}{r_{1o}} \int_0^{r_o} \theta_{2o}(r, z) r dr$$

получаем

$$\frac{d\theta_1}{dz} \Big|_{z_1=0} = \frac{d\theta_1}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_1} \cdot \frac{d\eta}{dz} \Big|_{z_1=0} = \frac{d\theta_1}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_1} \cdot \frac{2r_{1o}}{y^2(l)} = \frac{2}{r_{1o}} \frac{d\theta_1}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_1}$$

$$\frac{d \langle \theta_2 \rangle}{dz} \Big|_{z_1=0} = \frac{d}{dz} \cdot \frac{2}{r_{1o}^2} \int_0^{r_o} \theta_2(r, z) r dr \Big|_{z_1=0} = \frac{2}{r_{1o}^2} \int_0^{r_o} \frac{\partial \theta_2(r, z)}{\partial z} r dr$$

$$\frac{\partial \theta_2(r, z)}{\partial z} \Big|_{z_1=0} = \frac{d\theta_1}{du_1} \Big|_{u_1=0} \cdot \frac{du}{d\xi_1} \Big|_{\xi_1=0} \cdot \frac{d\xi_1}{dz} \Big|_{z_1=0} = \frac{d\theta_2}{du_1} \Big|_{u_1=0} \cdot \frac{1}{r_{1o}} \cdot \frac{d\xi_1}{dz_1} \Big|_{z_1=0} \Big|_{0 \leq r \leq r_{1o}}$$

$$\frac{d\xi}{dz_1} \Big|_{\substack{z_1=0 \\ 0 \leq r \leq r_{1o}}} = \begin{cases} \frac{r_{1o}}{\sqrt{r_{1o}^2 - r^2}} \dots\dots\dots 0 \leq r \leq r_{1o} \\ 0 \dots\dots\dots r_{1o} \leq r \leq \infty \end{cases}$$

получаем

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial z_1} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{r_{1o}^2 - r^2}} \cdot \frac{d\theta_2}{du_1} \Big|_{u_1=0}$$

$$\frac{d\langle \theta_2 \rangle}{dz} \Big|_{z_1=0} = \frac{2}{r_{1o}^2} \cdot \frac{d\theta_2}{du_1} \Big|_{u_1=0} \cdot \int_0^{r_{1o}} \frac{rdr}{\sqrt{r_{1o}^2 - r^2}} = \frac{2}{r_o} \frac{d\theta_2}{du_1} \Big|_{u_1=0}$$

Таким образом

$$\frac{d\theta_1}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_l} = \frac{d\theta_2}{du_1} \Big|_{u_1=0}$$

$$(\theta_{10} + \frac{1}{\alpha_1})(\gamma \text{Cot} \gamma \eta_l - \beta + \omega_1 \text{Cot} \omega_1 u_{2m}) - \gamma(\theta_{20} + \frac{1}{\alpha_1})e^{-\beta \eta_l} \text{Co sec} \gamma \eta_l = \omega_1(\theta_m + \frac{1}{\alpha_1}) \text{Co sec} \omega_1 u_{2m}$$

Аналогично

$$\frac{d\theta_1}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{d\theta_4}{du_2} \Big|_{u_2=0}$$

$$\begin{aligned} & \gamma(\theta_{10} + \frac{1}{\alpha_1})e^{\beta \eta_l} \text{Co sec} \gamma \eta_l + (\theta_{20} + \frac{1}{\alpha_1})(\omega_1 \text{Cot} \omega_1 u_{2m} - \beta - \gamma \text{Cot} \gamma \eta_l) \\ & = \omega_1(\theta_m + \frac{1}{\alpha_1}) \text{Co sec} \omega_1 u_{2m} \end{aligned}$$

Применяя матрицы к обоим уравнениям, получим

$$\Delta = \omega_1 \text{Cot} \omega_1 u_{2m} [(\gamma \text{Cot} \gamma \eta_l - \beta + \omega_1 \text{Cot} \omega_1 u_{1m})] + \beta^2 + \gamma^2 - \omega_1(\beta + \gamma \text{Cot} \gamma \eta_l) \text{Cot} \omega_1 u_{1m}$$

$$\Delta_1 = (\theta_m + \frac{1}{\alpha_1}) \left[\omega_1 \text{Co sec} \omega_1 u_{1m} (\omega_1 \text{Cot} \omega_1 u_{2m} - \beta - \gamma \text{Cot} \gamma \eta_l) + \omega_1 \gamma \text{Co sec} \omega_1 u_{2m} \text{Co sec} \gamma \eta_l e^{-\beta \eta_l} \right]$$

$$\Delta_2 = (\theta_m + \frac{1}{\alpha_1}) \left[\omega_1 \text{Co sec} \omega_1 u_{2m} (\omega_1 \text{Cot} \omega_1 u_{1m} - \beta + \gamma \text{Cot} \gamma \eta_l) - \omega_1 \gamma \text{Co sec} \omega_1 u_{1m} \text{Co sec} \gamma \eta_l e^{\beta \eta_l} \right]$$

Следовательно

$$\theta_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} - \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{и} \quad (3.2.10)$$

$$\theta_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} - \frac{1}{\alpha_1} \quad (3.2.11)$$

Величину u_{1m} и u_{2m} можно найти из уравнения

Величина u_{1m} из уравнения равна

$$\lambda_1 \left. \frac{d\theta_2}{du_1} \right|_{u_1=u_{1m}} = \lambda_2 \left. \frac{d\theta_3}{du_1} \right|_{u_1=u_{1m}}$$

$$\lambda_1 \left[- \left(\theta_{1o} + \frac{1}{\alpha_1} \right) \omega_1 \text{Sin} \omega_1 u_{1m} + \frac{\omega_1 \text{Cos} \omega_1 u_{1m}}{\text{Sin} \omega_1 u_{1m}} \left[\theta_m + \frac{1}{\alpha_1} - \left(\theta_{1o} + \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{Cos} \omega_1 u_{1m} \right] \right]$$

$$= \lambda_2 \left[\frac{-\omega_2 \text{Sin} \omega_2 u_{1m}}{\text{Sin} \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - u_{1m} \right)} \left[\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2} \right) \text{Sin} \frac{\omega_2 \pi}{2} - \frac{1}{\alpha_2} \text{Sin} \omega_2 u_{1m} \right] + \frac{\omega_2 \text{Cos} \omega_2 u_{1m}}{\text{Sin} \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - u_{1m} \right)} \left[- \left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2} \right) \text{Cos} \frac{\omega_2 \pi}{2} + \frac{1}{\alpha_2} \text{Cos} \omega_2 u_{1m} \right] \right]$$

Получим следующее уравнение

$$\omega_1 \lambda_1 \left[\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{Cot} \omega_1 u_{1m} - \left(\theta_{1o} + \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{Cosec} \omega_1 u_{1m} \right] = \omega_2 \lambda_2 \left[- \left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2} \right) \text{Cot} \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - u_{1m} \right) + \frac{1}{\alpha_2} \text{Cosec} \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} - u_{1m} \right) \right] \quad (3.2.12)$$

Аналогично значение u_{2m} будет из уравнения

$$\lambda_1 \left. \frac{d\theta_4}{du_2} \right|_{u_2=u_{2m}} = \lambda_2 \left. \frac{d\theta_5}{du_2} \right|_{u_2=u_{2m}}$$

$$\omega_1 \lambda_1 \left[\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{Cot} \omega_1 u_{2m} - \left(\theta_{2o} + \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{Cosec} \omega_1 u_{2m} \right] = \omega_2 \lambda_2 \left[\left(\theta_m + \frac{1}{\alpha_2} \right) \text{Cot} \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} + u_{2m} \right) - \frac{1}{\alpha_2} \text{Cosec} \omega_2 \left(\frac{\pi}{2} + u_{2m} \right) \right] \quad (3.2.13)$$

Для завершения системы уравнений мы должны добавить условия равенства объемов видимых и скрытых частей моста, которые аналогичны симметричному мосту.

3.2.7 Результаты

Усредненный коэффициент Томсона для вольфрама равен

$$\sigma_T = -50 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{K}^{-1}$$

Расчет показывает, что температурные поля в скрытых частях асимметричного моста почти такие же, как для симметричного моста. Разница заключается только в видимой части моста. На рисунке 8 показано распределение температуры без эффекта Томсона.

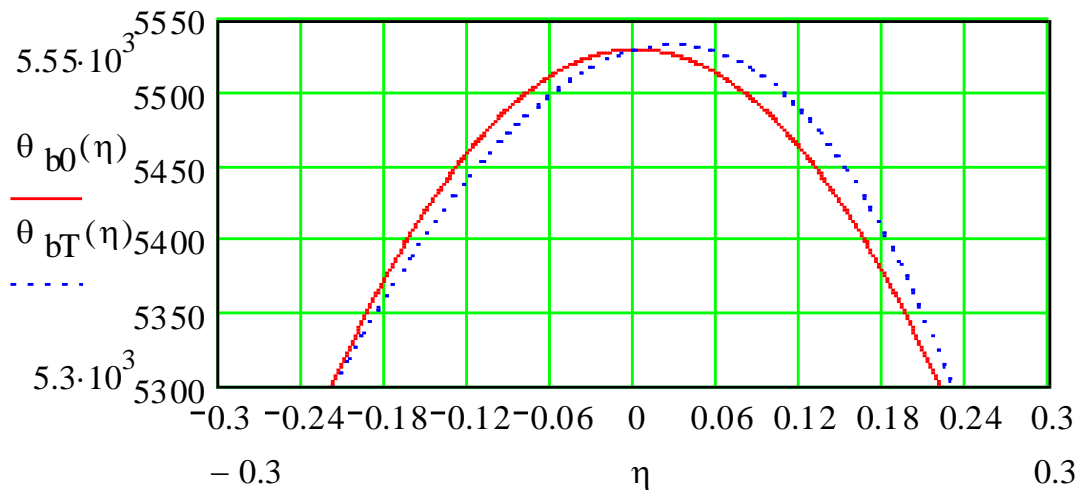


Рисунок 7 – Распределение температуры без эффекта Томсона $\theta_{b0}(\eta)$ и с эффектом Томсона $\theta_{bT}(\eta)$

Можно видеть, что максимум температуры смещается на анод до точки $\eta = 0.05$, то есть около 10% от общей длины моста. Это смещение вызывает эрозию контактных мостов и должно учитываться для электрических контактных систем в диапазоне малых токов (реле, распределительные устройства и т. д.).

4 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА КОНТАКТНОГО МОСТА

Математическая модель переноса контактного моста должна описывать динамику образования, эволюции и разрыва расплавленного жидкого моста. Многие исследователи исходят из предположения, что видимая часть моста имеет форму цилиндра с осью, параллельной плоскости контакта. Конечно, такое предположение верно в случае высокоточного моста при большой скорости контактного открытия [52]. Это позволяет в значительной мере упростить теоретическое исследование мостиковых явлений. В то же время необходимо учитывать форму несогласованности моста от цилиндрической, если продолжительность открытия контакта соизмерима со временем образования моста. Однако исследования геометрии мостов и его влияния на явления открытия контакта не проводились, кроме классических результатов, полученных П. Дэвидсоном еще в 1954 году, которые рассматривали мосты как узлы и катетоиды, образованные из-за силы поверхностного натяжения [63].

В общем случае мы предполагаем, что под действием сил поверхностного натяжения [37], гравитации и пинчевого эффекта мост принимает форму поверхности вращения вокруг оси z :

$$r = y(z, t) \quad \text{для} \quad -\alpha(t) \leq z \leq 0, \quad \text{и} \quad z = \sigma_{10}(r, t) \quad \text{для} \quad r_1(t) \leq r \leq \varepsilon(t),$$

где $\alpha(t)$ является контактным промежутком для времени t .

Геометрия такого моста представлена на рисунке 8. Она занимает область $D_2 + D_3$ где $D_2 \{0 \leq r \leq y(z, t); -\alpha(t) \leq z \leq 0\}$ является видимой частью моста, и $D_3 \{\sigma_{10}(r, t) \leq z \leq \sigma_1(r, t), \text{ если } r_1(t) \leq r \leq \varepsilon(t); 0 \leq z \leq \sigma_1(r, t), \text{ если } 0 \leq r \leq r_1(t)\}$ является частью моста, встроенного внутри твердого электрода, занимающего область $D_4 \{\sigma_1(r, t) \leq z < \infty, \text{ если } 0 \leq r \leq \varepsilon(t); 0 \leq z < \infty \text{ если } \varepsilon(t) \leq r < \infty\}$.

Мост образуется из электрода, материал которого является более плавким, если контактные материалы являются гетерогенными или из анода в случае однородного материала из-за дополнительного нагрева туннеля на предыдущей стадии [64]. Область D_1 на рисунке 8 более огнеупорна чем D_3 .

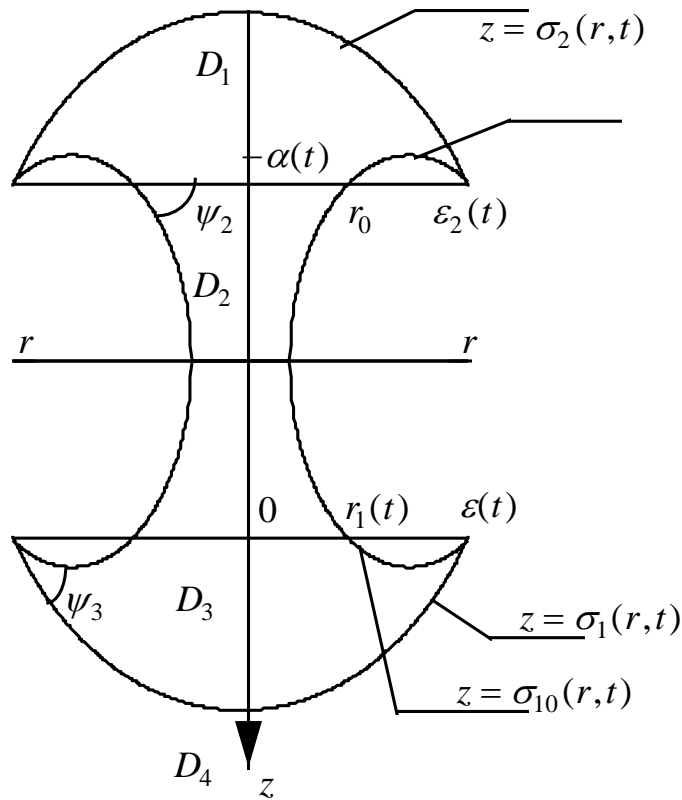


Рисунок 8 – Геометрия моста и прилегающих областей

4.1 Дифференциальные уравнения и граничные условия.

Общая математическая модель, описывающая электромагнитные и температурные поля в мостике и прилегающих областях системой МГД-уравнений, представлена в работах [22]. Однако эта модель очень сложна и требует специальных компьютерных программ. В работе [23] показано, что если скорость открытия контакта невелика, то точно $\underline{d\alpha/dt} \leq 4m \cdot \text{sec}^{-1}$, процесс моста можно считать квазистационарным и описывать уравнениями, где только параметр t является параметром.

В этом случае мы представляем довольно простую модель, которая позволяет анализировать влияние разных факторов на процесс моста. В соответствии с этим модельным уравнением

$$\lambda_i \rho_i \nabla^2 \theta_i + \sigma_{Ti} \nabla \theta_i \cdot \nabla \varphi_i + (\nabla \varphi_i)^2 = 0, \quad \text{curl} \left(\frac{1}{\rho_i} \nabla \varphi_i \right) = 0, \quad i=1,3,4 \quad (4.1.1)$$

где λ_i теплопроводность, $\rho_i = \rho_{i0}(1 + \alpha_i \theta_i)$ удельное электрическое сопротивление, α_i температурный коэффициент, и σ_{Ti} коэффициент Томсона, описывает температуру и электромагнитные поля θ_i и φ_i в каждой области D_i ($i = 1, 3, 4$).

Чтобы выбрать простое уравнение для моста, мы используем результат Джонса [24], который показал, что градиент температуры в поперечном сечении моста пренебрежимо мал. В этом случае мост можно наблюдать как стержень с переменным поперечным сечением, несущим только осевую

составляющую теплового потока $\pi y^2(z, t)$. Уравнения квазистационарного переноса тепла и распределения потенциала в видимой части D_2 моста в этой модели:

$$\frac{d^2\theta_2}{dz^2} + \frac{2y_z}{y} \frac{\partial\theta_2}{\partial z} + \frac{I\sigma_{r2}}{\pi\lambda_2 y^2} \frac{d\theta_2}{dz} + \frac{I^2\rho_{20}(1+\alpha_2\theta_2)}{\pi^2\lambda_2 y^4} = 0, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dz} = \frac{\rho_{20}(1+\alpha_2\theta_2)}{\pi y^2} \quad (4.1.3)$$

где I ток.

Граничные условия:

а) Для границ видимой части моста

$$z=0, \quad \text{если } 0 \leq r < r_1(t), \quad \text{и } z=-\alpha(t), \quad \text{для } 0 \leq r < r_0 \\ (i=1 \text{ для } z=0, \quad \text{и } i=3 \text{ для } z=-\alpha(t))$$

мы можем записать условия непрерывности температуры, тепловых потоков, электрических потенциалов и плотности тока:

$$\theta_i = \theta_{i+1}, \quad \lambda_i \frac{\partial\theta_i}{\partial z} = \lambda_{i+1} \frac{\partial\theta_{i+1}}{\partial z}, \quad \varphi_i = \varphi_{i+1}, \quad \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial\varphi_i}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{i+1}} \frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial z} \quad (4.1.4)$$

б) На боковой поверхности моста, а также на контактных поверхностях вне моста $z=0$ и $z=-\alpha(t)$ тепло и электрическую передачу можно пренебречь:

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = 0 \quad (4.1.5)$$

в) В областях, удаленных от контактной зоны, даются электрические потенциалы, а температура постоянна (эта константа мы определяем как 0):

$$\theta_1 = 0, \quad \varphi_1 = -\frac{1}{2}u_c, \quad \text{if } z < 0, \quad r^2 + z^2 = \infty, \quad (4.1.6)$$

$$\theta_4 = 0, \quad \varphi_4 = \frac{1}{2}u_c, \quad \text{if } z > 0, \quad r^2 + z^2 = \infty \quad (4.1.7)$$

г) На поверхности $z = \sigma_1(r, t)$ между жидкой и твердой зонами (D_1 и D_4) температура равна температуре плавления:

$$\theta_3 = \theta_4 = \theta_m, \quad \text{если } z = \sigma(r, t) \quad (4.1.8)$$

4.1.1 Уравнения для свободных границ.

Границы $z = \sigma_1(r, t)$, $r = y(z, t)$, $z = \sigma_{10}(r, t)$, являются свободными и должны определяться из дополнительных условий. Интерфейс $z = \sigma_1(r, t)$ между твердой и жидкой зонами можно найти из условия Стефана, которое преобразуется в стационарном случае в простое уравнение

$$\lambda_3 \frac{\partial\theta_3}{\partial n} = \lambda_4 \frac{\partial\theta_4}{\partial n} \quad (4.1.9)$$

Свободные неизвестные границы $r = y(z, t)$ and $z = \sigma_{10}(r, t)$ и форма моста могут быть получены из уравнения Эйлера, которое можно свести к виду

$$\kappa_{20} \frac{-yy_{zz} + y_z^2 + 1}{2y(1+y_z^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 y^2} = k_2, \quad -\alpha(t) \leq z \leq 0, \quad (4.1.10)$$

$$\kappa_{20} \frac{r(\sigma_{10})_{rr} + (\sigma_{10})_r [1 + (\sigma_{10})_r^2]}{r[1 + (\sigma_{10})_r^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \left| \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_m^2} \right| = k_2, \quad r_1(t) \leq r \leq \varepsilon(t), \quad (4.1.11)$$

где

$$k_2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r_1^2(t)} + k_3, \quad k_3 = (\kappa_{20} \cdot 2H_3)_{z=0}, \quad (4.1.12)$$

κ_{20} является поверхностное натяжение между мостиками расплавленного металла и окружающей средой (воздух), $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$ является магнитной проницаемостью вакуума, $r_m = r_m(t)$ является точкой максимума функции $z = \sigma_{10}(r, t)$ в области $r_1(t) \leq r \leq \varepsilon(t)$.

Необходимо установить граничные условия для получения единственных решений уравнений (4.1.10) и (4.1.12). Первое из них для уравнения (4.1.10) очевидно:

$$y(-\alpha(t), t) = r_0 \quad (4.1.13)$$

а вторая может быть получена из формулы Юнга для граничного угла смачивания ψ_2 :

$$\cos \psi_2 = [1 + y_z^2(-\alpha(t), t)]^{-1/2} = \frac{\kappa_{10} - \kappa_{21}}{\kappa_{20}} \quad (4.1.14)$$

где κ_{ij} коэффициент поверхностного натяжения между областями D_i и D_j (индекс 0 соответствует окружению).

Граничными условиями для уравнения (4.1.11) являются:

$$\sigma_{10}(\varepsilon(t), t) = 0,$$

$$\cos \psi_3 = \frac{1 + [(\sigma_1)_r \cdot (\sigma_{10})_r]_{r=\varepsilon(t)}}{[\sqrt{1 + (\sigma_1)_r^2} \cdot \sqrt{1 + (\sigma_{10})_r^2}]_{r=\varepsilon(t)}} = \frac{\kappa_{40} - \kappa_{34}}{\kappa_{30}} \quad (4.1.15)$$

4.2 Результаты решения

Уравнения (4.1.10) сводятся к обычным дифференциальным уравнениям с помощью соответствующих подстановок, а их решения, а также решения уравнений (4.1.9), (4.1.11) и поверхности фазового превращения $z = \sigma_1(r, t)$, находятся в аналитической форме. Аналогичные решения представлены также в работе [5].

Чтобы найти свободные поверхности $y(z, t)$ и $\sigma_1(r, t)$ мы будем использовать метод Ритца. В дополнение к граничным условиям (4.1.5) - (4.1.7) мы должны учитывать баланс объемов мостового мениска D_m : $r_1(t) \leq r \leq \varepsilon(t)$, $0 \leq z \leq \sigma_{10}(r, t)$ и его видимую часть, таким образом D_2 ,

$$2\pi \int_{-\alpha(t)}^0 dz \int_0^{y(z,t)} (1 + \bar{\beta}\theta_2) r dr = 2\pi \int_{r_1(t)}^{\varepsilon(t)} \sigma_{10}(r, t) r dr, \quad (4.1.16)$$

где $\bar{\beta}$ коэффициент теплового расширения.

Кроме того, должны быть обеспечены условия гладкого сопряжения на границе раздела $z=0$, $r=r_1$:

$$y(0,t) = r_1, \quad \sigma_{10}(r_1,t) = 0, \quad \frac{\partial y(0,t)}{\partial z} \cdot \frac{\partial \sigma_{10}(r_1,t)}{\partial r} = 1. \quad (4.1.17)$$

В соответствии с методом Ритца краевая задача для уравнений (4.1.1)-(2.1.25) к вариационной задаче для минимума некоторого функционала F , построенная в [8], [9], которая равна свободной энергии мост:

$$F = F_g + F_H + F_\kappa \quad (4.1.18)$$

где члены в правой части равны составляющей гравитационной составляющей, электромагнитной составляющей и компонентам поверхностного натяжения энергии моста соответственно. Этот термин F_g пренебрежимо мал и для низкого тока (менее 500 А) $F_H = 0$. В этом случае

$$F = F_\kappa = 2\pi \int_{-\alpha(t)}^0 \kappa_{20} y \sqrt{1+y_z^2} dz + 2\pi \int_0^{\varepsilon(t)} \kappa_{34} \sqrt{1+(\sigma_1)_r^2} r dr + 2\pi \int_0^{r_0} \kappa_{12} r dr \quad (4.1.19)$$

Неизвестные $y(z,t)$, и $\sigma_{10}(r,t)$ представлены в форме

$$y(z,t) = \frac{z(z+\alpha)}{\alpha^2} C - \frac{z}{\alpha^2} (z+\alpha) \left(2 \frac{r_1-r_0}{\alpha} + \cot \psi_2 \right) - \frac{z^2}{\alpha^2} (r_1-r_0) + r_1, \quad (4.1.20)$$

$$\sigma_{10}(r,t) = \frac{(r-r_1)(\varepsilon-r)}{C(\varepsilon-r_1)^2} + \frac{(r-r_1)^2(\varepsilon-r)}{(\varepsilon-r)^2} \cot \psi_3 \quad (4.1.21)$$

Нетрудно проверить, что выполнены условия (4.1.7) - (4.1.11), (4.1.21). Параметр C определяется из (4.1.22). Минимизируя функционал F по параметру r_1 , получим последнее уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial r_1} = 0 \quad (4.1.22)$$

Таким образом, проблема моста сводится к системе уравнений (4.1.15), (4.1.12), (4.1.20) с дополнительным уравнением $\zeta_0 = 2r_0 \int_{-\alpha(t)}^0 \frac{dz}{y^2(z,t)}$

для параметров ζ_0 , ζ_m , C , r_1 .

Эта система была решена с использованием метода полуразделительных интервалов. Результаты расчетов напряжения разрыва моста V_r приведены в таблице 2 по сравнению с экспериментальными данными, обзор которых приведен в [10]. По-видимому, формула $V_r = V_3(\zeta_m) - V_2(0)$, используемая для расчета, дает удовлетворительное совпадение для всех металлов, за исключением никеля, по-видимому, из-за окислительных реакций, которые невозможно описать в рамках представленной модели.

Таблица 2 – Напряжение разрыва моста V_r (вольт)

Металл	Напряжение, экспериментальное (V)						Напряжение, рассчитанное (V)
Cu	0.64-0.68 (1,5,f) 1.0-1.5 (1,4,8,d)	0.44 (1,6,f) 1.0-1.5(1,4,f)	0.8 (2,4,b)	0.8 (1,4,7,d)			0.81
Au	0.84 (1,5,g)	0.85 (1,4,d)	0.88 (1,4,g)	1.0 (2,4,b)			0.92
Ir	1.14 (1,6,g)	1.21 (1,5,g)	1.44 (1,4,g)	1.44 (1,4,a)			1.12
Fe	1.0 (1,6,f) 1.22 (1,5,f)	1.06 (1,6,g) 1.2 (1,4,f)	1,1 (1,4,d) 1.20 (1,5,h)	1.18 (1,5,g) 1.4 (1,4,h)			1.03
Mo	1.26 (1,6,f)	1.45 (1,5,f)					1.13
Ni	0.9 (1,6,f)	1.02 (1,5,f)	1.52 (1,4,d)	1.05 (1,5,h)			0.41
Pd	0.96 (1,4,d) 1.4 (2,4,b)	1.0 (1,6,f)	1.0 (1,5,f)	1.1 (1,4,f)			1.3
Pt	1.06 (1,6,f) 1.29 (1,4,a) 1.34 (1,4,f)	1.08 (1,6,g) 1.32 (1,4,g) 1.6 (2,4,b)	1.12 (1,5,g) 1.32 (1,4,d) 1.6 (2,4,c)	1.16 (1,5,f) 1.32 (1,4,e) 1.35 (1,4,b)			1.41
Ag	0.35 (1,4,d) 0.35 (1,4,d)	0.35 (1,4,d) 0.35 (1,4,d)	0.35 (1,4,d) 0.35 (1,4,d)	0.35 (1,4,d) 0.35 (1,4,d)			0.58
W	1.5 (1,6,f)	1.5 (1,6,f)	1.5 (1,6,f)	1.5 (1,6,f)			1.42

где 1 - квазистатический метод, 2 - осциллографический метод, 3 - метод неизвестен, 4 - в воздухе, 5 - в вакууме, 6 - в вакууме с очищенными электродами, 7,8 - разные мосты даны а - А. Фэйрвэзэ, b - Дж. Ландер и Л. Гермер, с – Дж. Фархам, d – Л. Джонс, e - Р. Холм and Е. Холм, f – С. Джонс, g - Р. Джеймс, h – Ф. Левеллин, Джонс и М. Прайс

4.3 Механизм разрыва моста.

Процесс разрыва моста может быть вызван механическими или тепловыми силами в зависимости от критериев, рассмотренных ниже. Механический разрыв срабатывает, когда сила поверхностного натяжения меньше электромагнитных и гравитационных сил. Разрыв моста начинается с самого узкого поперечного сечения $z = z_r$, которое можно определить из уравнения [53]

$$\frac{\partial y(z_r, t_r)}{\partial z} = 0 \quad (4.1.23)$$

Термический механизм разрыва моста может состоять из одного или двух этапов. Необходимо отдельно рассмотреть два разных случая.

а) Случай 1.

Температура плавления θ_{m1} электрода, занимаемая областью D_1 , больше, чем температура кипения моста: $\theta_{m1} > \theta_b$. В этом случае разрыв моста происходит, когда температура достигает точки кипения в любом поперечном сечении $z = z_b$ в то время $t = t_b$. Многие эксперименты показывают, что разрыв моста сопровождается его взрывом. Это подтверждает тот факт, что сила поверхностного натяжения не может быть причиной разрыва моста и может влиять только на расположение поперечного сечения с максимальной температурой [55], где происходит взрыв во время кипения. Таким образом, неизвестные значения z_b и t_b могут быть найдены из уравнений

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial z} = 0, \quad \theta_2 = \theta_b \quad \text{для} \quad z = z_b, \quad t = t_b \quad (4.1.24)$$

которая в этом случае преобразуется в выражения

$$\zeta_{2b} = \frac{1}{\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}} \arctan \frac{-\delta_2 A_2 + \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} \cdot B_2}{\sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2} \cdot A_2 + \delta_2 B_2}$$

$$\theta_b = -\frac{1}{\alpha_2} + \exp(-\delta_2 \zeta_{2b}) [A_2 \cos(\zeta_{2b} \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2}) + B_2 \sin(\zeta_{2b} \sqrt{\omega_2^2 - \delta_2^2})],$$

где

$$\zeta_{2b} = 2r_0 \int_{-\alpha(t_b)}^{z_b} \frac{dz}{y^2(z, t_b)}.$$

Таким образом

$$r_b = y(z_b, t_b).$$

Передача металла из-за моста направляется затем в область D_1 , с которой сторона моста смещена $\pi \int_{-\alpha(t_b)}^{z_b} y^2(z, t_b) dz$. Часть моста остается на другом электроде $\pi \int_{z_b}^0 y^2(z, t_b) dz$.

б) Случай 2.

Если $\theta_{m1} < \theta_b$, плавление второго электрода начинается через некоторое время $t = t_{m2}$ до разрыва моста. Во время дальнейшего открытия D_1 появляются три новые зоны, а не одна:

$$D_{11}: \quad -\infty < z < \sigma_2(r, t), \quad \text{if} \quad 0 \leq r \leq \varepsilon_2(t), \quad \text{и} \quad -\infty < z < -\alpha(t), \quad \text{если} \\ \varepsilon_2(t) < r < \infty$$

$$-\sigma_2(r, t) < z < -\alpha(t) \quad D_{12} : \quad , \quad 0 \leq r \leq \varepsilon_2(t); \quad D_{13} : \quad -\alpha(t) < z < -\alpha_1(t), \\ 0 \leq r \leq y(z, t)$$

Функция $\alpha_1(t)$ определяется вязкостью и термическими параметрами жидкого металла. Это можно сделать $\alpha_1(t) = 0.5[\alpha(t) - \alpha(t_{m2})]$ в первом приближении.

Уравнение переноса тепла в формах (2.1.15) или (2.1.16) остается правильным для каждой из этих зон. Функции $\theta_i(r_i, z, t_{m2})$ представляют собой начальное распределение температуры в этой системе ($i = 1, 2, 3, 4$), но

дополнительные граничные условия одинаковы. Сечение $z = z_b$ и время взрыва t_b определяются, как обычно, из (2.1.39), однако в этом случае поперечное сечение $z = z_b$ может быть помещено в зону D_{13} или D_2 из-за существенного температурного градиента вдоль моста.

Механизм разрыва для квазистатических мостиков, как правило, является термическим. Установлено, что диаметр моста увеличивается с током как линейная функция для диапазона тока 10 А - 100 А (как для минимального диаметра, так $d_{\min} = 2r_b$ и для максимального диаметра $d_{\max} = 2\varepsilon(t)$).

4.4 Критерии моста

Полученные результаты анализа позволяют оценить влияние различных факторов на процесс моста до решения проблемы. Они определяются следующими критериями [70]:

а) Критерий поверхностного натяжения (критерий Вебера). $We = \frac{\kappa_0}{g\gamma_0\alpha^2(t)}$

$$\frac{r_1}{r_b} > 2$$

Если $We > 10^3$ тогда r_b кривизна поверхности моста велика, и поверхностное натяжение очень важно в процессе разрыва.

б) Обратным значением We является критерий Бонда $Bo = We^{-1}$, который определяет значение силы тяготения по отношению к силе поверхностного натяжения. Это не важно в текущем диапазоне до 100 А.

$$Pi = \frac{\mu_0 I^2 \alpha(t)}{4\pi^2 r_0^2 \kappa_0}$$

в) Критерий эффекта Пинча Pi очень важен, если его значение 10^2 и больше. Если $I \geq 10^3$ А тогда $Pi \geq 10^3$ и мост может быть сжат и раздавлен только с помощью эффекта пинча.

$$Po = \frac{I^2 \rho_2 \alpha(t)}{\pi^2 r_b^2 \lambda_2}$$

г) Термические критерии. Критерий Померанцева Po , критерий

$$Th = \frac{I\sigma_{T2}}{\pi\lambda_2 r_b}$$

$$Ko = \frac{2\sigma_f}{\pi\rho_2 r_1}$$

Томсона Th , критерий Келера Ko , где σ_f туннельное сопротивление, ответственны за тепловой механизм разрыва моста из-за Джоулева нагрева и термоэлектрических эффектов.

4.5 Самоподдерживаемая эрозия моста.

Анализ выражений, описывающих температурное поле в расплавленном мостике, позволяет получить теоретические условия самоподдерживаемой эрозии [69]. Они есть:

1) Сначала анод начинает таять, а катод расплавляется позже, т.е.

$$\theta_{m1} < \theta_{m2}. \quad (4.1.25)$$

2) Температура вдоль моста, образуемая главным образом из анодного материала, монотонно возрастает и достигает максимума на контактной поверхности с анодом. Неравенства

$$\rho_1 < \rho_4, \lambda_1 > \lambda_4, \frac{\rho_2}{c_2 \gamma_2} > \frac{\rho_1}{c_1 \gamma_1} \quad (4.1.26)$$

позволяют удовлетворить это предложение.

3) Температура плавления материала катода меньше, чем точка кипения материала анода:

$$\theta_{m2} < \theta_{b1}, \quad (4.1.27)$$

то есть катод расплавляется до разрыва моста.

4) Анод более плавкий, чем катод:

$$\theta_{b2} > \theta_{b1}, \quad (4.1.28)$$

но максимальная температура моста помещается на катодную часть моста, а температура кипения в этом месте достигает раньше, чем температура кипения анодной части [49].

Таким образом, неравенства (4.1.26) - (4.1.28) обеспечивают условия для оптимального самоподдерживаемого переноса моста. Эти условия могут быть проверены для найденных В.Г.Планном [20] самозадерживаемыми контактными парами, приведенными в таблице 3.

Таблица 3 – Контактные пары с самоподдерживающейся эрозией

№	Материал	$\rho_i 10^{-8} \Omega \cdot m$	λ_i watt / m · K	$\rho_i / c_i \gamma_i$ $10^{-14} \Omega m^{-4} K \cdot j$	θ_{mi} $10^3 C^0$	θ_{bi} $10^3 C^0$
1	Ag - анод,	1.65	418	0.676	0.960	2.000
	Pd - катод	10.5	71	4.00	1.554	4.000
2	Ag – анод,	1.65	418	0.676	0.960	2.000
	Pt - катод	11.0	70	3.93	1.773	4.400
3	Au – анод,	2.30	310	0.92	1.063	2.970
	Pt – катод	11.0	70	3.93	1.773	4.400
4	Au – анод,	2.30	310	0.92	1.063	2.970
	Pd – катод	10.5	71	4.00	1.554	4.000
5	Ag – анод,	1.65	418	0.676	0.960	2.000
	Pt-Ir 20% - катод	32.0	8.92	8.92	1.830	4.400

Следует отметить, что сплавы дают более широкие возможности для выбора самоподдерживаемых контактных композиций по сравнению с чистыми металлами. Наилучший результат из всех предложенных пар В.Г.Планном дает пару № 5. Полученные выше критерии позволяют нам находить новые контактные композиции с самоподдерживающейся эрозией моста [72]. Они есть: 1) Ag – Au(10%) - анод
анод

Pd – Ag(40%) - катод

Pt – Ir(20%) - катод

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Математическая модель описывает влияние эффекта Томсона на нагревание в замкнутых электрических контактах на основе усредненных значений коэффициента Томсона справедлив для таких материалов, как Cu, Ag, Au, которые имеют относительно незначительную температурную зависимость коэффициента Томсона. Для W, Mo, Pt, Pd и другие контактные материалы с большой вариацией Томсона коэффициент нелинейного уравнения теплопроводности следует использовать для оценки роли влияния эффекта Томсона на контактное нагревание.

2. Математическая модель симметричного квазистационарного жидкого моста между открытыми электрическими контактами, которая учитывает форма у моста в зависимости от поверхностного натяжения и фазы преобразование. Вычисленные значения геометрии моста находятся в хорошем согласовании с экспериментальными данными.

3. Эффект Томсона, который создает асимметрию температуры в жидком мостике оценивается с использованием новой математической модели, описывающей сопряжение температурных полей в видимых и скрытых частях моста с твердыми фазами. Было обнаружено, что эффект Томсона может играть важную роль в перемещении самой горячей температуры вдоль моста и контактной эрозии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. R.Holm , "Electric Contacts", 4-th Edition, Springer Verlag, Berlin, 1981, pp 338-356
2. S.N.Kharin, "Mathematical Model of Arc Erosion in Electrical Contacts", Proc. 16-th Int. Conf. on Electrical Contacts, Loughborough, England, 1992, pp. 205-209
3. P.M. Davidson, "The Shape of a Molten Electrical Contact Bridge", Brit. J. Appl. Phys., v. 5, 1994, pp. 567-578
4. F.L. Llewellyn Jones, "Matter Transfer in Contacts and Microscopic Molten Metal Bridge", Proc. of the 23rd International Relay Conf., Swansea, UK, 1964, pp. 3-1 – 3.12
5. S.N.Kharin, "Temperature Displacement in Electrical Contacts due to Kohler and Thomson effects", Proc. 9th International Conference on Switching Arc Phenomena (SAP-2001), Lodz, Poland, 2001, pp. 190-195
6. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D1%84%D1%84%D0%B5%D0%BA%D1%82_%D0%A2%D0%BE%D0%BC%D1%81%D0%BE%D0%BD%D0%B0
7. C. James, University of Wales, Ph.D. Thesis, 1963
8. S.N.Kharin, " Post Bridge Phenomena in Electrical Contacts at the Initial Stage" , Transactions CPTMT - Part A, vol. 19, No 3, pp 491 - 497, Sept.1996,
9. S.N. Kharin, T.S. Davies, H. Nouri, S. Skachek" The Role of Pre-arcing Processes in Dynamics of Switching Arc Phenomena ", Proc. of 5th International Conference on Electromechanics, Electrotechnology and Electromaterial Science (ICEEE-2003), Alushta, Ukraine, 2003
- 10.S.N. Kharin, H. Bagh, "The Role of Thomson and Kohler effects in Bridge Erosion of Electrical Contacts", Submitted for International Conference on Advanced Materials (ISAM-2005), Islamabad, 2005
11. S.N. Kharin, H. Bagh, "Mathematical model of temperature field in non-ideal electrical contacts with Thomson effect", Accepted for publication in *Mathematical Journal*, No 4, December, 2005
12. Chalyi A.M., Dmitriev V.A., Pavleino M.A., Pavleino O.M. // ISSN 1068-3755, Surface Engin. and Appl. Electrochem. 2013. Vol. 49. N 5. P. 433–439.
13. <https://www.dpva.ru/Guide/GuidePhysics/ElectricityAndMagnethism/ThermoelctricEffects/TompsonEffectTable01/>
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, М.: Наука, 1982. Т. 8. С. 143–148.
15. Самойлов В.В. Аналитическое и численное моделирование процессов электро- и теплопереноса в многоточечных электрических контактах: Дис. канд. физ.-мат. наук. Улья- новск: УГУ, 2004. 149 с.
16. Ким Е.И., Омельченко В.Т., Харин С.Н. Математические модели тепловых процессов в электрических контактах, Алма-Ата: Наука, 1977. 236 с.
17. Kasap S. // Department of Electr. Engin., University of Saskatchewan, Canada, 2001. 11 p
18. Физическая энциклопедия.- М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.- Т.5.- С.98-99, 125.

19. Калашников С.Г. Электричество.- М.: Наука, 1979.- С.500-504.
20. Сивухин С.Д. Общий курс физики.- М.: Наука, 1977.- Т.3. Электричество.- С.490-494.
21. Стильбанс Л.С. Физика полупроводников.- М., 1967.- С.75-83, 292-311.
22. Иоффе А.Ф. Полупроводниковые термоэлементы.- М., 1960.
- 23.http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/fizika/TERMOELEKTRICHESTVO.html?page=0,3
24. Вейник А.И. *Термодинамическая пара*. Минск, 1973.- С. 22-27.
25. Анатырчук Л.И. и др. *Термоэлементы и термоэлектрические устройства*. Киев, 1979.- С.15.
26. *Термоэлектрические охладители*. М., 1983. – С. 315-316.
27. Куинн Т. *Температура*. М., 1986. – С. 282-284.
28. Жузе В. П., Гусенкова Е. И., Библиография по термоэлектричеству, М.- Л., 1963. – С. 157-163.
29. Займан Дж., Электроны и фононы, пер. с англ., М., 1962. – С. 325-336.
30. Попов М. М., Термометрия и калориметрия, 2 изд., М., 1954. – С. 269-285.
- 31.<http://phys.bspu.by/static/um/phys/elektr/lekcii/lek14.pdf>
32. *Таблицы физических величин*. Справочник. Под ред. акад. И. К.Кикоина. М., Атомиздат, 1976, 1008 с.
33. Peltier J.C., New experiments on the calorific electric currents (Nouvelle experiences sur la caloricitе des courans electrique), Ann. Chim.LV1 371, 1834.
34. Min G., Rowe D.M., Kontostavlakis K., Thermoelectric figure-of-merit under large temperature differences, J. Phys. D; Appl. Phys., 37, 1301-1304, 2004
35. Кухлинг Х. Справочник по физике. — М. : Мир. — 1982. — С.374-375.
36. *Яворский Б. М., Детлаф А. А.* Справочник по физике: для инженеров и студентов ВУЗов. — Изд. 4-е, перераб. — Наука - Главная редакция Физико-математической литературы, 1968. — С. 417.
37. *Грунин В. К.* § 2.3.4. Термоэлектрические приёмники излучения // Источники и приёмники излучения: учебное пособие. — СПб.: Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015. — 167 с.
38. *В. И. Зиненко, Б. П. Сорокин, П. П. Турчин.* Основы физики твёрдого тела. — М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. — 336 с.
39. Л.С. Стильбанс. Термоэлектрические явления. Полупроводники в науке и технике (М.–Л., изд-во АН СССР, 1957) т. 1, с. 113.
40. С.В. Ордин, И.А. Соколов, А.Ю. Зюзин. Тр. Междунар. конф. ” Термоэлектрики и их применения“ (СПб., Россия, 2006) с. 41.
41. С.В. Ордин. Тр. V межгос. сем. ” Материалы для термо- электрических преобразователей“ (СПб., Россия, 1997) с. 149.
42. Цветков Ю. Н., Аксенов С. С., Шульман В. М. Судовые термоэлектрические охлаждающие устройства.— Л.: Судостроение, 1972.— 191 с.
43. Калашников С.Г. Электричество. Учебное пособие. – 6-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 157 с.

44. Т.И. Трофимова. Курс физики: учебное пособие для вузов. М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 259 с.
45. И.Е.Иродов. Электромагнетизм. Основные законы. Учебное пособие для вузов. 4-е издание. Издательство: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010. – 364 с.
46. И.В. Савельев. Курс общей физики. Том 2. Электричество и магнетизм. С-Пб.-М.-Краснодар: ЛАНЬ, 2008. – 274 с.
47. И.А.Квасников. Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем. Москва, Издательство Московского Университета, 1987, Глава I, IV. – 245 с.
48. К.П. Гуров. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. М. «Наука», 1987. – 365 с.
49. П. Гленсдорф, И. Пригожин. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. «Мир», М. 1973. – 125 с.
50. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика. М. «Наука», 1976.
51. В.А. Журавлев. Термодинамика необратимых процессов в задачах и решениях. М. «Наука», 1979. – 785 с.
52. И.П. Базаров. Термодинамика. М. Высшая школа. 1991. – 456 с.
53. Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. Новосибирск, Изд. НГУ, 2000, Глава X. – 425 с.
54. К.Хир. Статистическая механика, кинетическая теория и стохастические процессы. - М.: «Мир», 1976. – 324 с.
55. Ю.Л. Климонтович. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М. «Наука», 1975. – 145 с.
56. Р. Кубо. Термодинамика, - М. : «Мир», 1970. – 457 с.
57. Д.Н. Зубарев. Неравновесная статистическая термодинамика. М. «Мир», 1971. – 312 с.
58. Р. Балеску. Равновесная и неравновесная статистическая механика. - М.: «Мир», 1978. – 15 с.
59. С. де Гроот, П.Мазур, Неравновесная термодинамика. М. ИЛ, 1964. – 22 с.
60. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Статистическая физика. Часть 1. — Издание 4-е. — М.: Наука, 1995. — («Теоретическая физика», том V).
61. <http://slovari.yandex.ru/~книги/БСЭ/Джоуля%20-%20Томсона%20эффект/>
62. Кудряшов Б.Б. Промышленная энергетика. 1962. № 3. С. 14–17.
63. Сердюков С.Г. Автореф. канд. дис. СПГГИ (ТУ), 1998.
64. Кудряшов Б.Б., Козлов А.В. Предварительный отчет об оценке надежности технических решений по проекту "Голубой поток". Фонды СПГГИ (ТУ), 2000.
65. Леви В.Г. и др. Курс теоретической физики, т.2. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1971. - 936 с.
66. Физический энциклопедический словарь /Гл. ред. А.М.Прохоров. Ред кол. Д.М. Алексеев и др. – М.: Сов. Энциклопедия, 1983. – 928 с.
67. Кондраков И.М. Морфология термо-, гальвано-, акусто-, и оптикомагнитных эффектов. Рукопись. Мин. Воды, 1976. - 2 с.

68. Кондраков И.М. Морфология термо-, гальвано-, акусто-, и оптикомагнитных эффектов. Сб. докл. СКФ БГТУ им. В.Г.Шухова Юбилейной научн. -практ. -конф. 12-13.апр. 2004г. «Наука, экология и педагогика в технологическом университете», Минеральные Воды, 2004., с. 47-53.
69. Кондраков И.М.. От фантазии - к изобретению. - М: Просвещение-Владос. 1995. – 205 с.
70. Kondrakov I.M. Algorytmizacja rozwiazan zadan odkrywczych /В сб. "Projektowanie systemu", t. V, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk. Warszawa, 1983, - с. 61-75.
71. Кузнецов В.И.. Случайность научных открытий и закономерности развития химии. - ж. Всесоюз. хим. о-ва им. Дм.И.Менделеева, 1977, N 6, т.22. - с.618-628..
72. Альтшуллер Г.С. Найти идею. Введение в теорию решения изобретательских задач. –Петрозаводск: Скандинавия, 2003. - 240 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ