

ТҮЙІНДЕМЕ

Жұмыстың көлемі: Магистрлік диссертация 62 беттен тұрады. Ол, өз кезегінде, кіріспеден, 4 үлкен бөлімнен және бөлімшелерден, қорытынды мен пайдаланылған әдебиеттерден тұрады. Жұмыстың бөлімдерінде жалпы 13 сурет, 2 кесте қолданылған.

Кілттік сөздер: түйіспе, идеалды емес түйіспе, идеалды түйіспе, түйіспелі жылыту, Кольер әсері, Томсон әсері, идеалды асимметриялық түйіспе, идеалды симметриялық түйіспе.

Жұмыстың мақсаты:

- Түйіспе беті;
- Түйіспелі жылытуды модельдеу;
- Кольер әсерінсіз температураның және электр энергия потенциалының негізгі стационар құралдары;
- Кольер әсерін математикалық модельдеу;

Жұмыстың дұрыстығы: Жұмыс бірнеше кітаптарға, материалдарға және ғаламтордағы ресурстарға сүйеніп құрылған. Кестелер және есептің шешімін көрсететін графиктер ғылыми еңбектерге жүгіне отырып жасалған.

РЕЗЮМЕ

Объем работы: Настоящая магистерская диссертация включает в себя 62 страницы. Состоит из введения, 4 глав, заключение и списка используемых источников. Содержит 13 рисунков и 2 таблиц.

Ключевые слова: контакт, неидеальный контакт, идеальный контакт, эффект Кольера, эффект Томсона, идеальный симметричный контакт, идеальный асимметричный контакт .

Цель работы:

- Контактная поверхность;
- Моделирование контактного нагревание;
- Стационарные поля температуры электрического потенциала;
- Математическое моделирование эффекта Кольера;

Правильность работы: Данная работа написана на основании нескольких книг, материалов и интернет ресурсов. Графики и таблицы, показывающие решение задачи, сделаны ссылаясь на статические данные.

SUMMARY

Scope of work: This master's dissertation includes 62 pages. It consists of an introduction, 4 chapters, conclusion and list of used sources. Contains 13 figures and 2 tables.

Keywords: Contact, ideal contact, non-ideal contact, ideal symmetric contact, ideal asymmetric contact, Kohler effect, Thomson effect, contact heating.

Objective:

- The contact surface;
- Modeling of contact heating;
- Stationary conjugated fields of the temperature and electrical potential;
- Mathematical modeling of Kohler effect;

Correct operation: This work is written on the basis of a number of books, materials and online resources. Graphs and tables showing the solution of the problem, made reference to the static data.

МАЗМҰНЫ				
БЕЛГІЛЕУЛЕР.....				7
КІРІСПЕ.....				8
1 ТҮЙІСПЕ БЕТІ				9
1.1	Түйіспе	бетін	модельдеу.	Кедергі түйіспесі
.....				9
1.2	Тоқ өткізу кезінде түйіспе дағының динамикасы.....			12
2 ТҮЙІСПЕЛІ ЖЫЛЫТУДЫ МОДЕЛЬДЕУ.....				15
2.1	Сфералық түйіспенің S моделі			15
2.2	Идеалды	және	идеалды емес	түйіспелердің цилиндрлік моделі.....
.....				18
3 КОЛЬЕР ӘСЕРІНСІЗ ТЕМПЕРАТУРАНЫҢ ЖӘНЕ ЭЛЕКТР ЭНЕРГИЯ ПОТЕНЦИАЛЫНЫҢ НЕГІЗГІ СТАЦИОНАР ҚҰРАЛДАРЫ.....				21
3.1	Идеалды түйіспелер.....			симметриялық
.....				21
3.2	Идеалды түйіспелер.....			асимметриялық
.....				28
3.3	Томсон жылыту.....	әсерімен	идеал	түйіспелерді
.....				31
3.4	Ерекше жағдайлар.....			38
3.5	Максимал шегі.....			ТОҚТЫҢ
.....				42
4 КОЛЬЕР ӘСЕРІН МОДЕЛЬДЕУ.....				48
4.1 Кольер әсері.....				48
4.2 Математикалық модель.....				49
4.3 Шешімі.....				50
4.4	Туннельдік критерийі.....			жылыту
.....				54
4.5 Тәжірибелік деректермен салыстыру.....				56
ҚОРЫТЫНДЫ.....				58
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....				61

Белгілеулер

λ	жылуөткізгіштік
ρ	электрлік кедергі
σ_{Th}	Томсон коэффициенті
Ko	Кольер коэффициенті
Φ	электрлік потенциал
θ	температура
ξ	эллипсоидтық бет
f	радиус
W	термиялық кедергі
d	қалындық
λ_f	жұқа қабықшадағы жылуөткізгіштік
ρ_f	жұқа қабықшадағы электрлік кедергі
Π	жылу ағыны
y_z	dy / dz
j	тығыздық

КІРІСПЕ

Магистрлік диссертацияның өзектілігі: Қазіргі заманғы төменгі кернеулі аппараттардың дамуындағы негізгі үрдістердің бірі олардың жұмысының артуы болып табылады. Микро және наносекундтық диапазондарда жұмыс істейтін аппаратты құруға деген сұраныс артып келеді. Дегенмен, осы бағытта эксперименттік зерттеулер осы процестердің қысқа мерзімділігі мәселесіне тап болады. Бұдан басқа процестің түпкілікті нәтижесі туралы қажетті ақпаратты алуға болады, бірақ оның динамикасы туралы емес. Бұл жағдайда математикалық модельдеу процестің эволюциясын уақытында білуге және эксперименталды түрде тексеруге мүмкіндік береді.

Магистрлік диссертацияның мақсаты: Электр байланысында пайда болатын модельдеу құбылыстарын дамытудың негізгі теориясы әртүрлі іргелі кітаптарда берілген. Контактілі жылудың стационарлық үлгілері Томсон және Кольер әсерін контактілі жылуға әсерін ескере отырып, қарастырылады және жалпыланады. Алайда, қазіргі заманғы нанотехнологияларға қосымша қабықшалы түйіспелерді қолдану қажеттілігі, Кольер әсері негізгі рөл атқаратын жылытудың стационарлық емес модельдерін әзірлеу қажеттілігін тудырады.

Ғылыми жаңалығы: Көптеген жұмыстарда электр доғаның құбылыстарын модельдеу қарастырылған. Математикалық модельдер қысқа және ұзақ доғалар үшін ерекшеленетінін атап өту керек. Ұзын доғаның үлгісі доғалық бағандағы құбылыстарды сипаттайтын магниттік газ динамикасының теңдеулеріне негізделуі керек, ал қысқа доға үшін модель иондалуы аймағындағы процестерді сипаттайды.

Зерттеу әдістері: математикалық модельдегі теңдеулерді шешу үшін математикалық физика, физика, математикалық талдау және дифференциалдық теңдеулер, есептеу математикасының әдістері қолданылды.

1. ТҮЙІСПЕ БЕТІ

1.1 Түйіспе бетін модельдеу. Кедергі түйіспесі.

Екі тоқ өткізгіш элементтің арасындағы электрлік түйіспе қысылған механикалық күштің нәтижесінен қалыптасады, және P_c бұл түйіспелі қуат деп аталады.

Электрлік түйіспелердің негізгі маңызды сипаттамаларының бірі - олардың арасындағы түйіспе аймағы. Барлық геометриялық түйіспе беті көрінетін (немесе номиналды) түйіспе аймағы деп есептеледі, ал нақты түйіспе аймағы тек жеке аймақтарда пайда болады, оның жалпы ауданы көрінетін аймақтан әлдеқайда аз болатыны барлығына белгілі. Микроскопиялық тегіссіздіктер бетіндегі кеуектік болып қалатын терең қуыстары бар қырлар мен мен тереңдіктертерді талап етеді. Әдетте, бос кеуектіктері барлар түйіспе кедергісіне аз әсер етеді. Екі бетін біріктірген кезде, механикалық түйіспе тек жер бетіндегі тегіссіздіктер орын алған аймақтарда болады. Металл бетінің басым бөлігі металл-металл түйіспесі болғанға дейін жойылуы тиіс оксидті пленкамен жабылған. Күштің жоғарылауына байланысты, осы кішігірім металл-металл түйіспелерінің саны мен ауданы оксидтік пленкадағы үзілім мен сол арқылы экструзия нәтижесінде пайда болады. a – дақтары деп аталатын аймақтар, электр тогының берілуіне арналған жалғыз өткізетін жолдарды қамтамасыз ететін шағын суық пісірмелі жіктер болып табылады. Осылайша, түйіспе интерфейсі арқылы өтетін ток a – дақтары арқылы өтуге шектелген. Демек, осы тарылған ток ағыны себебінен түйіспенің электр кедергісі «тарылуға кедергісі» деп аталады және мысалы, қаттылық және электр кедергісі сияқты

металлдың негізгі қасиеттерімен байланысты болып келеді.

Тар өткізгіш жолдан өтуге сығымдалған тоқ T_s жолдардың температурасы, T_b көлем жоғарылатады. Түйіспенің дақ температурасы («асқын-температура» деп аталады) түйіспе шекарасында U кернеуінің төмендеуіне байланысты болады, ол [1] формуласында көрсетілген

$$T_s^2 - T_b^2 = \frac{U^2}{4L} \quad (1.1)$$

Демек L Видеман-Франц-Лоренцтың $2.45 \cdot 10^{-8} V \cdot K^{-1}$ мәні бар константасы. Демек, U кернеуінің түйіспе азаюының аздап жоғарылауы өткізгіштігі бар аймақтарды жұмсарту және балқыту сияқты негізгі металлургиялық өзгерістерді алу үшін түйіспе дақтың температурасын едәуір жоғарылатуы мүмкін. [1] формуласында Р.Хольм көптеген өткізгіш дақтары бар R интерфейсіне толығымен түйіспе кедергісін ұсынған:

$$R = \frac{\rho}{2na} + \frac{\rho}{2\tau} \quad (1.2)$$

онда бірінші ұғым орта радиусы a -дан бастап n -дақ тарылу кедергісін білдіреді, ал екінші термин – теориялық түрде Гринвуд [2] есептеуінше кластер құратын дақтардың өзара әрекеттесуіне байланысты қосымша кедергі болып табылады.

$$\tau = \frac{\pi}{2} [\sum_i a_i]^2 \left[\sum_{i,j} \frac{a_i a_j}{S_{ij}} \right]^{-1} \quad (1.3)$$

a_i және a_j жекелеген дақтардың радиусы, S_{ij} олардың бір-бірінен арақашықтығы болып табылады.

Стационар түйіспелердің ұзақ мерзімді деградациясын есептеу үшін, Р.Малюччи [3] әр тегіссіздіктің бетінде көп аймақты тарылтудың үшінші деңгейін енгізу арқылы формуланы көрсетті. Бұл модель түйіспелердің деградациясын қажу арқылы модельдеу үшін қолданылған. Деформация апертурасы және пленкалардың өсуі қажу деградациясының баяулауында маңызды айнымалылар болып табылатынын көрсетті. Модель түйіспелердің нашарлауына байланысты кедергінің өзгеруіне қатысты статистикалық деректерді беру үшін де пайдаланылды. Дегенмен, тотықтандырылған түйіспе аймағының бөлігін анықтайтын параметрдің белгісіздігі осы модельді кеңінен қолданудан шектейді.

Түйіспе аймағында тарылуға кедергі және тегіссіздік таралуы Гринвуд және Вильямсон [4] моделімен нақтырақ сипатталған. Бұл модель түйіспе деформация бетінің топографиясымен байланыстырады және серпімді немесе пластикалық деформацияға ұшыраған беттерді ажыратуға арналған критерийді белгілейді. Осы көзқарасқа сүйене отырып, М.Д. Брайанттың [5] тотығу

жолымен мыс байланысының деградациясын сипаттау үшін полинома және Гаусс ықтималдық тығыздығының функциясын пайдаланды.

Фрактал бетінің модельдеуін және жылу, электрлік тарылу арасындағы ұқсастығын қолдана отырып, М.Т. Сингер және К. Кшонзеның [6] кездейсоқ түйіспелі беттердің тарылуына кедергі моделін дайындады. Бұл модель Гринвуд және Вильямсон моделімен арақатынас орнатады. Термиялық және электрлік кедергісі арасындағы ұқсастығы Р.А. Бертон және Р.Г. Бертон [7] қозғалыстағы контактілердегі бұзылулардың кооперативтік өзара әрекеттесуін сипаттау үшін. Термиялық және электр кедергісі арасындағы аналогиясы Р.А. Бертон және Р.Г. Бертонның [7] жылжымалы түйіспелердегі тегіссіздіктердің кооперативтік өзара әрекеттесуін сипаттау қолданған.

Ақырғы элементтерді талдауға негізделген компьютерлік модельдеу түйіспе кедергісін [8], [9] анықтау үшін де пайдаланылды. Алайда, бұл әдістер нақты практикалық мәселелерді шешу үшін өте пайдалы болса да, түйіспе аймағында пайда болатын динамикалық процестерді сипаттау үшін жеткіліксіз.

Жоғарыда келтірілген ақпаратты ескере отырып, [4] - [5] берілген тәсілге сүйенеміз, сонымен бірге, жаңа модификацияны қолданамыз. Демек, түйіспе кедергісі келесідей көрсетіледі.

$$R = R_c + R_m + R_f \quad (1.4)$$

R_c, R_m, R_f түйіспелі дақтың квази-металдық бөлігіндегі тарылуға кедергі, пленка және тегіссіздік кедергісі болып табылады.

Бұл кедергілерді a_c, a_m, a_f электрөткізгіштігі бойынша анықтауға болады,

$$R_c = \frac{1}{a_c S}, \quad R_m = \frac{1}{a_m S}, \quad R_f = \frac{1}{a_f S} \quad (1.5)$$

демек S номиналды түйіспе дағы болып табылады.

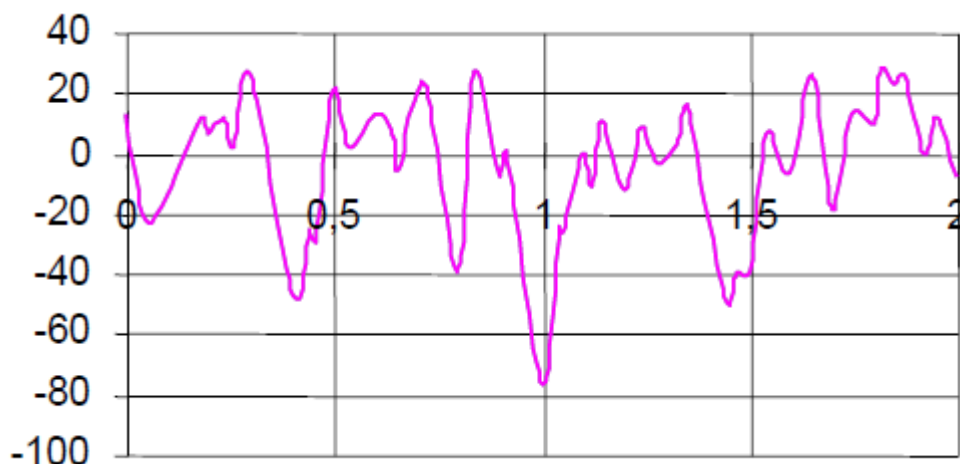
Түйіспе бетінің бірлігіне қатысты әрекет ететін P_c Қосымша 1 –де есептелген.

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{4}{3} \frac{NE\sqrt{r_m}}{\sigma\sqrt{\pi}(1-\mu^2)} \int_d^{z^*} (z-d)^{3/2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz = \\ &= \frac{4}{3} \frac{NE\sigma^{3/2}\sqrt{2\pi r_m}}{(1-\mu)^2} \left(i^{3/2} \operatorname{erfc} \beta - i^{3/2} \operatorname{erfc} \beta^*\right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Демек, қолданбалы қуатты P_c анықтай отырып, β, σ, d мәндері үшін трансцендент теңдеуін аламыз.

Жоғарыда сипатталған модель номиналды байланыс аймағы бар $S = 33,33 * 10^{-6} \text{ м}^2$ алюминий мысты байланыспен қосылыстың бастапқы түйіспе кедергісін есептеу үшін пайдаланылды. Түйіспелі қуат - $P_c = 16 *$

10^3 Вм . Біріншіден, алюминий және мыстан жасалған шиналардың беті өңделді, содан кейін $1 * 10^6 \text{ wires} * \text{м}^{-2}$ тығыздыққа [11] ие шөткемен жерге өңделді. Жалпы бет профилі мен биіктік үлгілері 1.1-суретте көрсетілген.



1- сурет. Сыртқы бетінің типтік профилі. Вертикаль шкаласы = 25.786 А
Горизонталь шкаласы = 9.960 $\mu\text{м}$.

Теңсіздіктің биіктігі ерікті сілтеме жазықтықтан бастап өлшенеді. Бірнеше жер үсті профильдерін топографиялық талдау нәтижелері негізінде төмендегі мәндерді берді:

$$r_0 = 5.8 * 10^{-5} \text{ м}, N = 16, \sigma = 1.6 * 10^{-5} \text{ м}, z^* = 2 * 10^{-5} \text{ м}$$

Мәндерді (1.18) теңдеуге енгізіп, β шешу жолымен, біз келесі қорытындыға келеміз:

$$\beta = 0.6 * 10^{-5} \text{ м}, \text{ және } d = 1.4 * 10^{-5} \text{ м}$$

(1.10), (1.13), (1.15) мәндері мен (1.5) теңдеулерді қолдана отырып, келесідей мәндер алынды: тарылуға кедергі R_c , тегіссіздік кедергісі R_m , пленка кедергісі R_f ,

$$R_c = 2.3 * 10^{-6} \Omega, R_m = 0.1 * 10^{-6} \Omega, R_f = 4.5 * 10^{-6} \Omega$$

Жалпы түйіспе кедергісінің мәні: $R = 6.9 * 10^{-6} \Omega$.

Бұл мән ағымдағы циклге ұшырамас бұрын, алюминий мен мыстың бұрылыс байланысымен эксперименттік байқалған алғашқы түйіспе кедергісі сәйкес келеді[11].

1.2 Тоқ өткізу кезінде түйіспе дағының динамикасы

Жоғарыда алынған түйіспелі кедергі мәндері серпімді деформация механизміне сәйкес келеді және олар шағын түйіспелі қуат, ток және температурада қолданылуы мүмкін. Пластикалық немесе эластопластикалық деформация жағдайында түйіспе дағының өлшемі Р.Хольм [1] енгізген түйіспе қаттылығының тұжырымдамасы арқылы анықталады. Ол пластикалық деформацияның басталуына сәйкес шамамен үш есе жоғары қысымның салдарынан (жіпшелермен) сандық орташа қысымға тең. Түйіспе қаттылықтың азаюын ескере отырып, түйіспе бетінің θ температурасы ток өтуімен артады. Бұл жағдайда формула (1.1.6) келесі өрнекпен ауыстырылуы тиіс

$$P_c^{(n)} = \xi_n \int H_B(\theta) dS \quad (1.7)$$

S_n түйіспе дақтың біреуіне қолданылатын $P_c^{(n)}$ түйіспе қуаты, ξ_n дақ маңында сығылу коэффициенті. Бұл коэффициент оның эластикалық-пластикалық қасиеттеріне жауапты түйіспе бетінің өңдеу дәрежесін есептейді. $\xi_n = 1$, пластикалық деформация үшін, $0.3 < \xi_n < 1$ эластикалық-пластикалық деформация үшін қолданылады. Егер ток болмаса, P_{ec} серпімді пластикалық қуаттың жалпы мәні, P_c жалпы түйіспе қуатымен теңдестірілген, және (1.20) жалпы мәнінде n қатынасымен табуға болады.

$$P_{ep} = \sum_{n=1}^m \xi_n \int H_B(\theta) dS \quad (1.8)$$

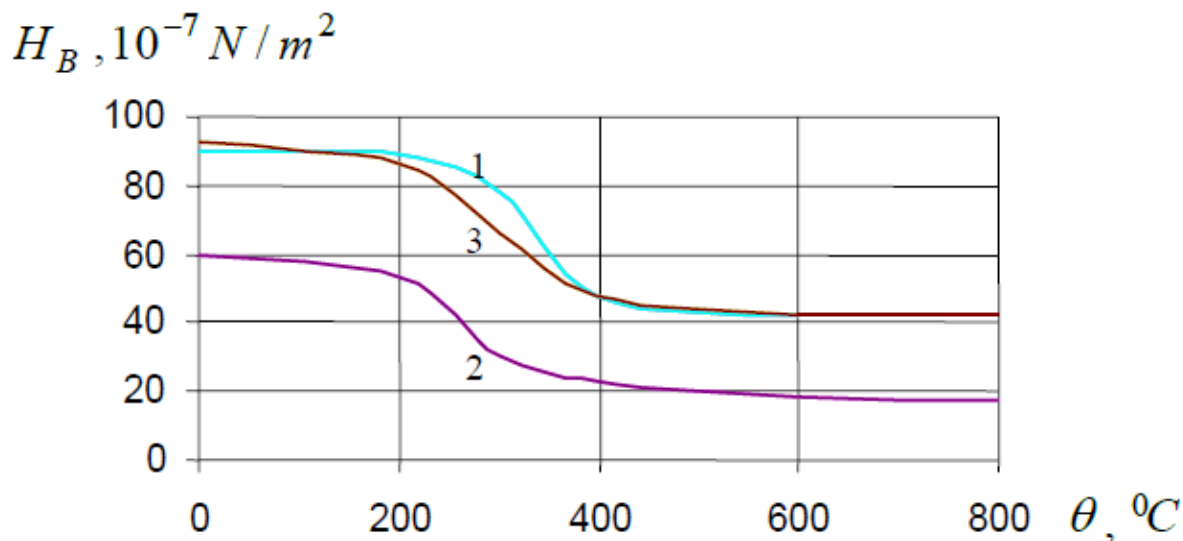
Мұндағы, m – түйіспе дақтарының саны.

Төменде көрсетілгендей, S_n түйіспе дағы, теңдік және стационарлық құбылыстардың изотермиялық беті, сондықтан оны шығаруға болады (1.7)

$$H_B(\theta)S(\theta) = const \quad (1.9)$$

Бұл қатынас эксперименттік деректермен сәйкес келеді.

1.2-сурет мыс, күміс және күміс никельдері үшін қаттылықтың температуралық тәуелділігін көрсетеді.



2- сурет. Қаттылықтың температуралық тәуелділігі:
1-Cu, 2- Ag, 3-AgNi (0.1% Ni)

Көрініп отырғандай, қаттылық жұмсарту түйіспесіне θ_s (200°C) жеткенде ғана күрт төмендейді. $200^\circ\text{C} \leq \theta \leq 500^\circ\text{C}$ температура интервалында 2-3 реттей төмендейді. (1.9) формуласына сәйкес түйіспе дақ радиусының r жоғарылауы температура $\theta = 500^\circ\text{C}$ мәнімен, температура $\theta = 200^\circ\text{C}$ мәнімен салыстырғанда бірдей болып табылады.

$$\tau = \frac{r(500)}{r(200)} = \sqrt{\frac{H_B(200)}{H_B(500)}}$$

Мыс үшін $\tau = 1.4$, күміс үшін $\tau = 1.65$, күміс-никель қорытпасы үшін $\tau = 1.45$, бұл Н.Е.Лиссов алынған эксперименталдық деректермен сәйкес келеді, [12], ол осы материалдардың барлығы 1,5-ке тең екенін анықтады.

Қыздыру процесінде түйіспе дақтары көлемінің ұлғаюы серпімді пластикалық қуат P_c түйіспе кедергісі арқылы өтетінге дейін түйіспелердің бір-біріне жақындауымен бірге жүреді. Бұл қозғалыс келесідей сипатталан :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = P_{ep} - P_c,$$

Мұндағы m - қозғалмалы түйіспе массасы, және $x=x(t)$ - ондағы түйіспенің координаттары (1.2- сурет).

$S(t) = \pi r_0^2(t)$ дақтың ағымдағы аймағы, $x(t)$ мәнімен және төмендегі формуламен өрнектеледі.

$$S(t) = S_0 \left[1 + \frac{2\pi r_0}{S_0} (x - x_0) \right], \quad S_0 = S(0) = 2\pi r_0(z - d), \quad x_0 = x(0) \quad (1.10)$$

Жоғары тоқ өлшемі ($10^3 - 10^4 \text{A}$) электр және магниттік өрістердің ағымдық аймақта өзара әрекеттесуімен қарастырылған электродинамикалық қуатты есептеу қажет :

$$P_{ed} = \mu\mu_0 \int \frac{1}{\rho} \vec{E} \times \vec{H} dV, \quad (1.11)$$

Мұндағы μ - салыстырмалы магнит өткізгіштігі, $\mu_0 = 1.257 * 10^{-6} \text{H/м}$ вакуум магнит өткізгіштігі, ρ - түйіспе материалының электр кедергісі, \vec{E} және \vec{H} электр және магнит өрісінің векторлары, D - түйіспе көлемі. Осы құбылыстарды ескере отырып, түйіспе қозғалысының теңдеуі келесі формада жазылуы мүмкін:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = P_v + P_{ep} - P_c, \quad (1.12)$$

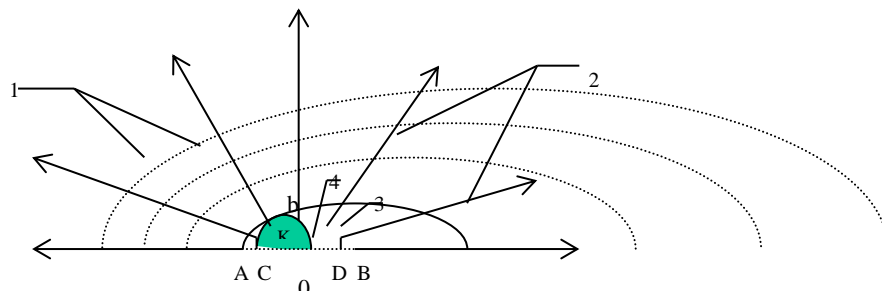
Мұндағы P_v - түйіспе бетіне қалыпты электродинамикалық қуаттың компоненті.

Түйіспедегі материалдардың жұмсартылуының және электродинамикалық қасиеттері әсерінен басқа факторлар түйіспе дағы мөлшерінің өзгеруіне әсер етуі мүмкін, түйіспе дағындағы өте жоғары температурада байланыс материалының жарылыс булануына байланысты қажаяу және қосымша тебу күші болатыны мысал бола алады. Бұл құбылыстар төменде қарастырылады.

2. ТҮЙІСПЕЛІ ЖЫЛЫТУДЫ МОДЕЛЬДЕУ

2.1 Сфералық түйіспенің S моделі.

Радиалды температура мен потенциалдың таралуы.



3- сурет. Сфералық түйіспенің моделі. 1- изотермдер, 2- жылу ағыны, 3- орта, 4- Холмның идеалды аймағы.

Сфералық модельде тоқтың тығыздығы

$$j = \frac{I}{2\pi r^2} \quad (2.1)$$

Осылайша Джоульдік жылу қуаты бірлік көлемде,

$$\frac{1}{\rho} \text{grad}^2 \varphi = \rho j^2 = \frac{\rho I^2}{4\pi^2 r^4} \quad (2.2)$$

Температураның стационар таралуы тендеуін $(\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0)$ сфералық координаталарда былай жазуға болады:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) + \frac{\rho I^2}{4\pi^2 \lambda r^4} = 0, \quad (2.3)$$

(2.3) тендеуіне шекаралық шарттар өте қарапайым. $r = b$ мінсіз шарының беті табиғи болып табылады, сондықтан екі контактілі бөлшектер арасындағы адиабатикалық шекара температуралық симметрияға байланысты

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = 0 \quad (2.4)$$

конструкция аймағынан тыс ($r = \infty$) супер-температура (яғни нақты температура минус қоршаған орта температурасы) қыздырудан бұрынғы қалпында қалады:

$$\theta(\infty) = 0 \quad (2.5)$$

Егер қарсылықтың сызықтық температуралық тәуелділігін қарастырсақ,

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\theta) \quad (2.6)$$

онда шекаралық шарттармен (А.2.4) және (А.2.5) теңдеуін шешу (А.2.3) төмендегідей болып табылады:

$$\theta(r) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\cos \frac{\pi\omega}{2} (1 - \frac{b}{r})}{\cos \frac{\pi\omega}{2}} - 1 \right] \quad (2.7)$$

Мұндағы

$$\omega = \frac{I}{b\pi^2} \sqrt{\frac{\alpha\rho_0}{\lambda}} \quad (2.8)$$

Осы формуланы пайдалана отырып, потенциал градиентін төмендегідей ұсынуға болады,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\rho_0(1 + \alpha\theta)I}{2\pi r^2} = \frac{\rho_0 I}{2\pi r^2} \frac{\cos \frac{\pi\omega}{2} (1 - \frac{b}{r})}{\cos \frac{\pi\omega}{2}}$$

интегралдан кейін потенциал үшін өрнек түрінде аламыз,

$$\varphi(r) = \frac{\rho_0 I}{\pi^2 \omega b} \frac{\sin \frac{\pi\omega}{2} (1 - \frac{b}{r})}{\cos \frac{\pi\omega}{2}} \quad (2.9)$$

Жеңілдетілген модельдер. Кішігірім температура диапазонында электр кедергісі орташа болуы мүмкін және тұрақты деп есептеледі: $\rho(\theta) \approx \rho = \text{const}$. Сонда $\theta_0(r)$ температура және $\varphi_0(r)$ потенциал үшін $\alpha \rightarrow 0$ ретінде шектеу арқылы (2.7), (2.9)

$$\theta_0(r) = \frac{I^2 \bar{\rho}}{4\lambda b \pi^2} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \quad (2.10)$$

$$\varphi_0(r) = \frac{I \bar{\rho}}{2\pi b} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \quad (2.11)$$

$\bar{\rho}$ мәнін үлестірілген конструкциямен нақты кедергісінің қарсылығын салыстыру арқылы алуға болады, тұрақты орташаланған $\bar{\rho}$ үшін қарсылық. Қарсылық $R(r)$ сфералық қабықшаның радиусы b және r -ге ие екі жарты шардың арасында орналасады:

$$R(r) = \frac{\varphi(r)}{I} = \frac{\rho_0}{\omega b \pi^2} \frac{\sin \frac{\pi \omega}{2} (1 - \frac{b}{r})}{\cos \frac{\pi \omega}{2}} \quad (2.12)$$

осылайша бір түйіспе элементінің кедергісі,

$$R(\infty) = \frac{\rho_0}{b \pi^2} \frac{\tan \frac{\pi \omega}{2}}{\omega} \quad (2.13)$$

және жалпы кедергісі,

$$R_c = 2R(\infty) = \frac{2\rho_0}{b \pi^2} \frac{\tan \frac{\pi \omega}{2}}{\omega} \quad (2.14)$$

Орташа $\bar{\rho}$ үшін ұқсас мәндерді (2.11) ретінде есептеуге болады,

$$R_0(\infty) = \frac{\varphi_0(\infty)}{I} = \frac{\bar{\rho}}{2\pi b} \quad (2.15)$$

$$R_{0c} = 2R_0(\infty) = \frac{2\varphi_0(\infty)}{I} = \frac{\bar{\rho}}{\pi b} \quad (2.16)$$

(2.14) және (2.16) теңдеулерін біз алмастырылған орташаланған кедергісі $\bar{\rho}$ түрінде жазамыз,

$$\bar{\rho}_1 = 2\rho_0 \frac{\tan \frac{\pi \omega}{2}}{\pi \omega} \quad (2.17)$$

Егер α (демек ω де) аз болса, онда $\frac{\tan \frac{\pi \omega}{2}}{\frac{\pi \omega}{2}} \approx 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi \omega}{2}\right)^2$ және (2.8), (2.10) формулаларынан жақсы белгілі [1]

$$\bar{\rho}_2 = \rho_0 \left[1 + \frac{2}{3} \alpha \theta_0(b) \right] \quad (2.18)$$

$$\bar{\rho}_3 = \rho_0 \left[1 + \frac{2}{3} \alpha \theta(b) \right] \quad (2.19)$$

Айта кету керек, (2.7) және (2.10) өрнектері арқылы температураны есептеу өте ұқсас нәтижелер береді, әсіресе жоғары емес температурада.

2.2 Идеалды және идеалды емес түйіспелердің цилиндрлік моделі.

Электрлік байланыстарда стационарлық жылу құбылыстарын сипаттайтын математикалық теңдеулер жоғарыда аталған барлық әсерлерді ескере отырып қарастырылуы тиіс. Формула (1.1), (1.5) арқылы сипатталған электродтар көлемінің ішінде әрекет ететін Джоуль және Томсон жылу көздерінің арқасында әрбір электрод үшін жылу теңдеуі жазылуы мүмкін.

$$c_i \gamma_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_i \operatorname{grad} \theta_i) - \frac{\sigma_{Ti}}{\rho_i} \bar{E}_i \cdot \operatorname{grad} \theta_i + \frac{1}{\rho_i} \bar{E}_i^2 \quad (2.20)$$

Онда $i=1$ индексі S_1 беті шектелген D_1 аймақты қамтитын катод үшін пайдаланылады, $i=2$ индексі D_2 аймақты алып жатқан S_2 , анодқа сәйкес келеді, ол c_i жылу сыйымдылығы, γ_i тығыздығы, λ_i жылу өткізгіштігі, ρ_i электр кедергісі, Томсон коэффициенті σ_{Ti} , температура θ_i , электр өрісі \bar{E}_i және уақыт t болып табылады.

Егер Thomson әсері аз болса, (2.20) орнына оңайлатылған теңдеуді пайдалануға болады:

$$c_i \gamma_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_i \operatorname{grad} \theta_i) + \frac{1}{\rho_i} \bar{E}_i^2 \quad (2.21)$$

Электр өрісі және магнит өрісі үшін Максвелл теңдеулер жүйесі (2.20) немесе (2.21) теңдеуіне қосылуы керек:

$$\operatorname{curl} \bar{E}_i = -\mu_0 \mu_i \frac{\partial \bar{H}_i}{\partial t} \quad (2.23)$$

$$\operatorname{curl} \bar{H}_i = \frac{1}{\rho_i} \bar{E}_i \quad (2.24)$$

$$\operatorname{div} \bar{H}_i = 0 \quad (2.25)$$

(2.21) - (2.25) теңдеулері шектеулі жүйе, себебі ρ_i температураға θ_i байланысты. Магниттік өткізгіштігінің температуралық тәуелділігі диамагнит және парамагнит байланыс материалдары үшін өте аз. Электр өрісі жүйеден (2.22) - (2.23) алынып тасталуы мүмкін және ол төмендегідей түрленеді:

$$c_i \gamma_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_i \operatorname{grad} \theta_i) + \rho_i \operatorname{curl}^2 \bar{H}_i$$

$$-\mu_0 \mu_i \frac{\partial \bar{H}_i}{\partial t} = \text{curl}(\rho_i \text{curl} \bar{H}_i)$$

Кейде (1.2) формуладағы \bar{E}_i пайдаланудың орнына φ_i электр потенциалын енгізу ыңғайлы. Дифференциалды операторды теңдеуге (1.12) қолданып, θ_i және φ_i айнымалыларға арналған теңдеудің келесі жүйесін (2.21) - (2.24) орната аламыз:

$$c_i \gamma_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \text{div}(\lambda_i \text{grad} \theta_i) + \frac{\sigma_{Ti}}{\rho_i} \text{grad} \theta_i \cdot \text{grad} \varphi_i + \frac{1}{\rho_i} \text{grad}^2 \varphi_i \quad (2.26)$$

$$\text{div} \left(\frac{1}{\rho_i} \text{grad} \varphi_i \right) = 0 \quad (2.27)$$

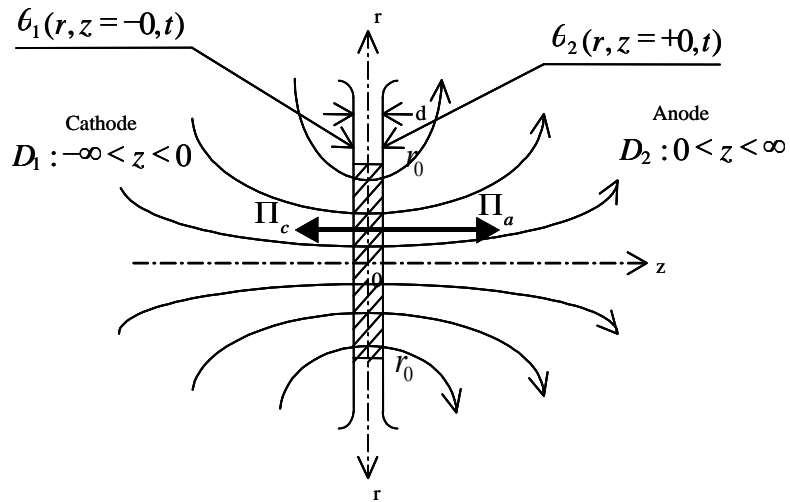
Бұл жалпы теңдеулер жүйесі контакт аймағының геометриясына байланысты нақтылануы және жеңілдетілуі мүмкін. Егер байланыс нүктесі радиуспен айналдыра деп ойласақ, онда осьтік симметрия орын алады және цилиндрлік координаттарды қолдану ең ыңғайлы. Бұл жағдайда (1.14) және (1.15) теңдеулер форманы қабылдайды:

$$c_i \gamma_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_i r \frac{\partial \theta_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_i \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right) + \frac{\sigma_{Ti}}{\rho_i} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_i} \left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho_i} r \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.29)$$

Теңсіздікті сипаттайтын конструкция бойымен [1] байланыс контактісінің $r_0 < R_0$ радиусы болған жағдайда, электродтарды екі жарты-кеңістік ретінде қарастыруға болады. Катодтың аймағы ($i=1$) болғанда $D_1(-\infty < z < 0, 0 \leq r < \infty)$, анодтың аймағы ($i=2$) болғанда $D_2(0 < z < \infty, 0 \leq r < \infty)$ болып табылады және байланыс нүктесі $S(z=0, 0 \leq r \leq r_0)$ (2-сурет). Кішкентай қалыңдығы бар пленка арқылы квази-металл контакті үшін біз жылжудың мінсіз емес үлгісін пленкадағы температура айырмашылығымен сол жақ шегі $\theta_2(r, z, t)$ мен оң жақ шегі $\theta_1(r, z, t)$ арасындағы айырмашылық ретінде қолдануға болады.

$$\theta_f = \theta_2(r, +0, t) - \theta_1(r, -0, t)$$



4-сурет. Пленкамен байланыстың осьтік бөлімі

Шекаралық шартты тұжырымдайық. Егер электродтың супертемпературасы болса, яғни электрод температурасы мен қоршаған ортаның температурасы арасындағы айырмашылықты білдіреді, бастапқы уақытта (тоқ ауысу сәті)

$$\theta_i|_{t=0} = 0 \tag{2.30}$$

Бастапқы шарт:

$$\theta_i|_{t=0} = F(M_i) \quad M_i \in D_i$$

Коммутация кезінде түйіспелі жылудың дәйекті кезеңдері үшін қолданылатын жалпы бастапқы күйі.

3 КОЛЬЕР ӘСЕРІНСІЗ ТЕМПЕРАТУРАНЫҢ ЖӘНЕ ЭЛЕКТР ЭНЕРГИЯ ПОТЕНЦИАЛЫНЫҢ НЕГІЗГІ СТАЦИОНАР ҚҰРАЛДАРЫ

3.1 Идеалды симметриялық түйіспелер

Симметриялық электрлік түйіспелердегі стационарлық температура мен электромагниттік өрістер дифференциалдық теңдеулермен сипатталуы мүмкін

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} \theta) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}^2 \varphi = 0, \quad \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \varphi \right) = 0,$$

Мұндағы $\theta = \bar{T} - \bar{T}_0$ қыздыру алдындағы ағымдағы түйіспе температурасы мен \bar{T}_0 бастапқы температура арасындағы айырмашылық, φ, λ, ρ - электрлік потенциал, тиісінше жылу өткізгіштігі және электр кедергісі.

Цилиндрлік координаттарда бұл теңдеулер ретінде жазылуы мүмкін

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.2)$$

Шекаралық шарттар:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (3.3)$$

$$\left. \varphi \right|_{\substack{z=0, \\ 0 \leq r < r_0}} = 0 \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{\substack{z=0, \\ r_0 \leq r < \infty}} = 0 \quad (3.4)$$

$$\left. \theta \right|_{\substack{z=\infty \text{ or} \\ r=\infty}} = 0 \quad \left. \varphi \right|_{\substack{z=\infty \text{ or} \\ r=\infty}} = u_c / 2 \quad (3.5)$$

Электр өткізгіштігі $\rho = \rho(\theta)$ мен жылу өткізгіштігінің температуралық тәуелділігінен $\lambda = \lambda(\theta)$ бұл мәселе сызықты емес екенін атап өту қажет. Шешім әдісі сызықтық жағдайда стационарлық өрістер үшін дұрыс болатын түйіспелердегі теңдеу және изотермиялық беттердің сәйкестігі, сызықтық емес жағдайға арналған қауіпсіздікті сақтайтыны туралы болжамнан алынуы мүмкін. Сызықтық жағдайда бұл беттер өзгерістің эллипсоидтері болып табылады

$$\frac{r^2}{\xi^2 + r_0^2} + \frac{z^2}{\xi^2} = 1, \quad (3.6)$$

Сондықтан егер $\xi(r, z) = const$ эквипотенциал және изотермиялық бет болса, электромагниттік және температуралық өрістер r және z екі тәуелсіз айнымалының орнына ξ бір координатпен сипатталуы мүмкін. Бұл формула (3.1) және (3.2) теңдеулерін шешімін табудың бір түрі

$$\varphi = \varphi(\xi), \quad \theta = \theta(\xi), \quad \xi = \xi(r, z) \quad (3.7)$$

Осы өрнекті (3.1) - (3.2) теңдеулеріне қойсақ, келесі нәтиже шығады,

$$[\rho(\theta)\lambda(\theta)\theta''(\xi) + \varphi'(\xi)^2 + \rho(\theta)\lambda'(\theta)\theta'(\xi)^2] * (\nabla\xi)^2 + \rho(\theta)\lambda(\theta)\theta'(\xi)\nabla^2\xi = 0 \quad (3.8)$$

$$[\rho(\theta)\varphi''(\xi) - \rho'(\theta)\theta'(\xi)\varphi'(\xi)] * (\nabla\xi)^2 + \rho(\theta)\varphi'(\xi)\nabla^2\xi = 0 \quad (3.9)$$

Мұндағы,
$$(\Delta\xi)^2 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^2, \quad \nabla^2\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial r} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} \quad (3.10)$$

Осылайша, егер (3.7) формулада шешім бар болса, онда $\frac{\nabla^2\xi}{(\nabla\xi)^2}$ қатынасы r және z айнымалылардан тәуелді емес, ол тек жалғыз ξ айнымалыға тәуелді. Шынында да, қарым-қатынаста қолдана отырып (3.6) бұны тексеру оңай,

$$\frac{\nabla^2\xi}{(\nabla\xi)^2} = \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} \quad (3.11)$$

Бұл нәтиже әлі күтілуде, себебі электромагниттік өрістің кез-келген түйіспесіндегі потенциалдың температуралық тәуелділігі физикалық тұрғыдан тек қана симметриялы бетінің конфигурациясы бойынша емес, тек қана сызықтық және сызықты емес мәселелер бойынша өзгермейді.

(3.11) формула көмегімен (3.8) және (3.9) теңдеулерін қайта жазуға болады,

$$\lambda(\theta)\theta''(\xi) + \lambda(\theta)\theta'(\xi)\frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} + \lambda'(\theta)\theta'(\xi)^2 + \frac{1}{\rho(\theta)}\varphi'(\xi)^2 = 0, \quad (3.12)$$

$$\rho(\theta)\varphi''(\xi) - \rho'(\theta)\theta'(\xi)\varphi'(\xi) + \rho(\theta)\varphi'(\xi)\frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} = 0. \quad (3.13)$$

ξ айнымалының шекаралас шарттарын жазу үшін,

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \theta'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial z}. \quad (3.14)$$

келесіні есептеу керек,

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \quad \text{егер} \quad 0 \leq r \leq r_0$$

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{егер} \quad r_0 \leq r \leq \infty$$

(3.3) - (3.5) барлық шекаралық шарттар қанағаттандырылған деген қорытынды жасауға болады:

$$\xi = 0 \quad \text{үшін} \quad \theta'(0) = 0, \quad (3.15)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad (3.16)$$

$$\xi = \infty \quad \text{үшін} \quad \theta(\infty) = 0, \quad (3.17)$$

$$\varphi(\infty) = \frac{u_c}{2}. \quad (3.18)$$

Осылайша, бастапқы мәселе (3.15) - (3.18) шекаралық шарттармен (3.12) - (3.13) теңдеулер жүйесіне дейін азаяды. Шешімін (3.13) қайтадан жазылған теңдеуден іздейміз,

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} - \frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)} \theta(\xi) + \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} = 0.$$

Бұл теңдеудің интеграциясы φ' пен θ арасындағы қатынастарды береді:

$$\ln[\varphi'(\xi)] + \ln\{\rho[\theta(\xi)]\} - \ln(r_0^2 + \xi^2) = \ln C,$$

осылай

$$\varphi'(\xi) = \frac{C\rho(\theta)}{r_0^2 + \xi^2}. \quad (3.19)$$

С тұрақтысы Ом заңымен анықталуы мүмкін. Эквипотенциалды бет (3.6) радиус аймағына жақындайды ξ -ны $\xi \rightarrow \infty$ ретінде алуға болады. Егер ξ және $\xi + d\xi$ екі радиустың осындай аймағының потенциалдары сәйкес келсе, онда олар Ом заңына сай тиісінше φ және $\varphi + d\varphi$ тең болады.

$$d\varphi = I\rho(\theta) \frac{d\xi}{2\pi\xi^2}$$

демек

$$\varphi'(\xi) \rightarrow \frac{I\rho(\theta)}{2\pi\xi^2}, \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Осы өрнекті (3.19)-бен салыстыра отырып, $\xi \rightarrow \infty$ болғандағы шекті есептей отырып, келесіні таба аламыз:

$$C = \frac{I}{2\pi} \quad (3.20)$$

демек

$$\varphi'(\xi) = \frac{I\rho(\theta)}{2\pi(r_0^2 + \xi^2)}. \quad (3.21)$$

Осы өрнекті қолдана отырып, (5.12) теңдеуін келесі формаға түрлендіруге болады:

$$\lambda(\theta)\theta''(\xi) + \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} \lambda(\theta)\theta' + \frac{I^2\rho(\theta)}{4\pi^2(r_0^2 + \xi^2)} = 0$$

бұл теңдеуді шешу үшін біз алмастыруларды қолданамыз:

$$T(\zeta) = \theta(\xi), \quad \zeta = \arctan \frac{\xi}{r_0} \quad (3.22)$$

$-\infty < \xi < \infty$ функциялар аймағын $-\frac{\pi}{2} < \zeta < \frac{\pi}{2}$ аймаққа дейін азайтсақ, келесі жылу теңдеуі қалыптасады:

$$\lambda(T)T''(\zeta) + \lambda'(T)T'(\zeta)^2 + \frac{I^2\rho(T)}{4\pi^2r_0^2} = 0.$$

Туынды $T'(\zeta)$ келесі теңдеуден алынуы мүмкін,

$$\frac{dT}{d\zeta} = \frac{\omega}{\lambda(T)} \left[2 \int_{T(\zeta)}^{T(0)} \rho(T) \lambda(T) dT \right]^{1/2} \quad (3.23)$$

Мұндағы,

$$\omega^2 = \frac{I^2}{4\pi^2 r_0^2}. \quad (3.24)$$

Бұл теңдеуді ζ айнымалыға қатысты шешуге болады:

$$\zeta(T) = \frac{1}{\omega\sqrt{2}} \int_T^{T(0)} \lambda(T_1) \left[\int_{T_1}^{T(0)} \rho(T_2) \lambda(T_2) dT_2 \right]^{-1/2} dT_1. \quad (3.25)$$

$T(\zeta)$ - температура бұл теңдеуден кері функция ретінде табылуы мүмкін, егер $\lambda = \lambda(T)$ және $\rho = \rho(T)$ функциялары берілген болса.

Джоуль жылуын түрлендіретін күш және изотермиялық сыртқы беті арқылы өтетін жылу ағының эквиваленты арқылы біз келесі нәтижеге келеміз:

$$-\lambda \frac{dT}{d\zeta} = \varphi j = \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\zeta},$$

j - тығыздық. Осылайша

$$\varphi \frac{d\varphi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dT} = \varphi \frac{d\varphi}{dT} = -\rho\lambda$$

және интегралдау температура-потенциал арасындағы танымал Kohlrausch's байланысына ие болады:

$$\varphi = \left(2 \int_T^{T_0} \rho\lambda dT \right)^{1/2}, \quad T_0 = T(0). \quad (3.26)$$

Дегенмен, (1.5.25) формуласында (1.5.26) қарағанда артықшылығы бар, себебі ол температура өрісін кеңістіктік бөлу туралы ақпаратты алуға мүмкіндік береді.

Ерекше жағдайлар.

1. *Жылу өткізгіштік және электр кедергісі - тұрақты.*

$$\rho(T) = \rho_0 = const, \quad \lambda(T) = \lambda_0 = const$$

Бұл жағдайда өрнектің (3.25) формуласы келесідей болады:

$$\zeta(T) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho} [T(0) - T]}$$

және түйіспе дағындағы $T(0)$ - максималды температураны келесі жағдайдан табуға болады:

$$T = 0 \quad \text{егер} \quad \zeta = \frac{\pi}{2}$$

бұл [16] белгілі өрнекті береді:

$$T(0) = \frac{I^2 \rho_0}{32r_0^2 \lambda_0}$$

Температура мен потенциал кеңістіктерін бөлу үшін өрнектер:

$$T = T_0 \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \zeta^2\right) = \frac{I^2 \rho}{32r_0 \lambda} \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \arctan \frac{\xi}{r_0}\right) \quad (3.27)$$

$$\varphi = \omega \zeta = \frac{I \rho}{2\pi r_0} \arctan \frac{\xi}{r_0} \quad (3.28)$$

2. *Жылу өткізгіштігі тұрақты, электр кедергісі - бұл температураның сызықтық функциясы*

$$\rho(T) = \rho_0(1 + \alpha T), \quad \lambda(T) = \lambda_0 = const$$

(3.25) интегралдағаннан кейін бізде келесі теңдік шығады,

$$\zeta(T) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\lambda_0 \rho_0}{\alpha} \arccos \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha T_0}}$$

және (3.26) жағдайы келесі теңдікті береді:

$$T(\zeta) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\cos(\omega \zeta \sqrt{\alpha \rho_0 / \lambda_0})}{\cos\left(\frac{\pi \omega}{2} \sqrt{\alpha \rho_0 / \lambda_0}\right)} - 1 \right] \quad (3.29)$$

ол [17] формулада көрсетілген.

Бұл жағдайда максималды температура

$$T(0) = \frac{1}{\alpha} \left[\sec \left(\omega \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha \rho_0 / \lambda_0} \right) - 1 \right] \quad (3.30)$$

Электр потенциалына арналған (3.22) өрнек ауыстыруды пайдаланып, (3.21) теңдеуді интегралдау арқылы алуға болады. Ол келесіні береді:

$$\varphi(\zeta) = \sqrt{\frac{\rho_0 \lambda_0}{\alpha}} \frac{\sin \left(\omega \zeta \sqrt{\alpha \rho_0 / \lambda_0} \right)}{\cos \left(\omega \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha \rho_0 / \lambda_0} \right)}$$

3. Жылу өткізгіштік және электр кедергісі температурадағы сызықтық функциялар болып табылады.

$$\lambda(T) = \lambda_0(1 - \beta T) \quad (3.31)$$

$$\rho(T) = \rho_0(1 + \alpha T) \quad (3.32)$$

Бұл жағдайда екінші кезектегі шексіздікке дейін,

$$\rho(T)\lambda(T) = \rho_0\lambda_0[1 + (\alpha - \beta)T]$$

және (3.25) теңдікті біріктіруі мүмкін.

$$\zeta(T) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\lambda_0(\alpha - \beta)}{\rho_0}} \times \left\{ \alpha \arccos \frac{1 + (\alpha - \beta)T}{1 + (\alpha - \beta)T_0} - \beta \sqrt{[1 + (\alpha - \beta)T_0]^2 - [1 + (\alpha - \beta)T]^2} \right\} \quad (3.33)$$

$T(\zeta)$ температурасы үшін (3.33) теңдеуін, T_0 – ді анықтауға арналған $\zeta(0) = \frac{\pi}{2}$ шартын пайдаланып шешуге болады.

3.2 Идеалды асимметриялық түйіспелер

Биметалдық түйіспелер болған жағдайда, (3.12) және (3.13) теңдеулері әр

түйіспе үшін жеке қарастырылуы қажет. Өртүрлі эллипсоидтық беттерде бұл теңдеулерді былай жазуға болады:

$$\lambda_i(T)T_i''(\zeta) + \lambda_i'(T)T_i'(\zeta)^2 + \omega^2\lambda_i\rho_i = 0 \quad (3.34)$$

$$\varphi_i'(\zeta) = \omega\rho_i \quad (3.35)$$

Мұндағы, егер $i = 1$ болса $-\frac{\pi}{2} < \xi < 0$, егер $i = 2$ болса $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$. Шекаралық шарттар (3.15) - (3.16) түйіспе орнында жылу ағынының және ток тығыздығының үздіксіздігі жағдайымен ауысуы тиіс.

$$T_1(0) = T_2(0), \quad \lambda_1 T_1'(0) = \lambda_2 T_2'(0) \quad (3.36)$$

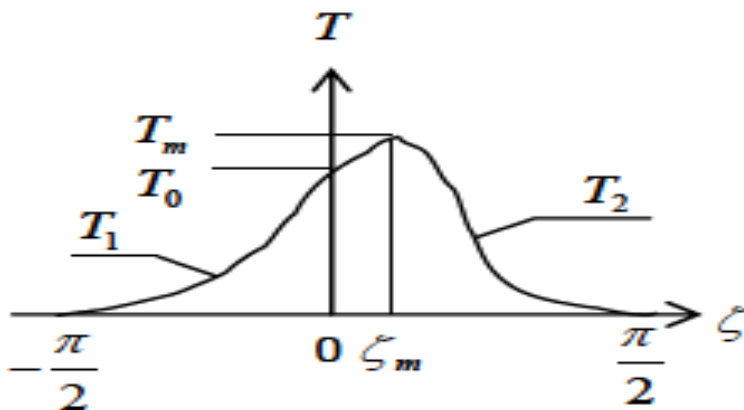
$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0), \quad \frac{1}{\rho_1} \varphi_1'(0) = \frac{1}{\rho_2} \varphi_2'(0) \quad (3.37)$$

(3.17)-(3.18) шарттары жаңа шарттар үшін өзгертілуі қажет.

$$T_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad T_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\varphi_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{U_C}{2}, \quad \varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{U_C}{2}. \quad (3.38)$$

Асимметрикалық түйіспелерде максималды температура T_m түйіспе бетінен T_0 температурасына ие болып, жіңішке пленкадағы жылу өткізгіштің үлкен мәніне ие материал түйіспесіне қарай жылжиды. Осы түйіспе материалы үшін $i = 2$ индексін белгілейміз (5.2-сурет).



5 - сурет. Асимметриялық түйіспелердегі температураны үлестіру

(3.34)-(3.38) мәселелерінің шешімі былай:

$-\frac{\pi}{2} < \xi < 0$ аймағы үшін,

$$\zeta = \frac{1}{\omega} \int_T^{T_0} \lambda_1 \left(2 \int_T^{T_0} \lambda_1 \rho_1 dT + 2 \int_{T_0}^{T_m} \lambda_1 \rho_1 dT \right)^{-\frac{1}{2}} dT \quad (3.39)$$

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{U_c}{2} + \left(2 \int_0^{T_0} \lambda_1 \rho_1 dT \right)^{\frac{1}{2}} - \left(2 \int_T^{T_0} \lambda_1 \rho_1 dT \right)^{\frac{1}{2}}$$

$0 < \xi < \zeta_m$ аймағы үшін,

$$\zeta = \frac{1}{\omega} \int_T^{T_0} \lambda_2 \left(2 \int_{T_0}^{T_m} \lambda_2 \rho_2 dT \right)^{-\frac{1}{2}} dT \quad (3.40)$$

$$\varphi_2(\zeta) = \frac{U_c}{2} - \left(2 \int_0^{T_m} \lambda_2 \rho_2 dT \right)^{\frac{1}{2}} + \left(2 \int_T^{T_m} \lambda_2 \rho_2 dT \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\zeta_m < \xi < \frac{\pi}{2}$ аймағы үшін,

$$\zeta = \zeta_m + \frac{1}{\omega} \int_T^{T_m} \lambda_2 \left(2 \int_T^{T_m} \lambda_2 \rho_2 dT \right)^{-\frac{1}{2}} dT \quad (3.41)$$

$$\varphi_2(\zeta) = \frac{U_c}{2} - \left(2 \int_0^{T_m} \lambda_2 \rho_2 dT \right)^{\frac{1}{2}} + \left(2 \int_T^{T_m} \lambda_2 \rho_2 dT \right)^{\frac{1}{2}}$$

T_0 және T_m мәндері теңдеулер жүйесінде табылуы мүмкін.

$$\frac{\pi\omega}{2} = \int_0^{T_0} \lambda_1 \left(2 \int_T^{T_0} \lambda_1 \rho_1 dT + 2 \int_{T_0}^{T_m} \lambda_1 \rho_1 dT \right)^{-\frac{1}{2}} dT \quad (3.42)$$

$$\frac{\pi\omega}{2} = \int_{T_0}^{T_m} \lambda_2 \left(2 \int_T^{T_m} \lambda_2 \rho_2 dT \right)^{-\frac{1}{2}} dT + \int_0^{T_m} \lambda_2 \left(2 \int_0^{T_m} \lambda_2 \rho_2 dT \right)^{-\frac{1}{2}} dT \quad (3.43)$$

Максималды температура мына нүктеде болады:

$$\zeta_m = \frac{1}{\omega} \int_{T_0}^{T_m} \lambda_2 \left(2 \int_T^{T_m} \lambda_2 \rho_2 dT \right)^{-\frac{1}{2}} dT \quad (3.44)$$

Цилиндрлік координаттар бойынша (r, z) максималды температураның осьтік жылжуы осьтік бағытта $r=0$ болса,

$$z_m = r_0 \tan \zeta_m \quad (3.45)$$

Сызықтық температуралық тәуелділік жағдайында ρ_i және λ_i (3.31), (3.32) өрнектерді интегралдау (3.39) - (3.41) $-\frac{\pi}{2} < \xi < 0$ аймағы үшін мына мәндерді береді:

$$\zeta = -\varepsilon_1 A_1 \left(\arcsin \frac{v_{10}}{v_s} - \arcsin \frac{v_1}{v_s} + B_1 (\sqrt{v_s^2 - v_{10}^2} - \sqrt{v_s^2 - v_1^2}) \right) \quad (3.46)$$

$0 < \xi < \zeta_m$ аймағы үшін,

$$\zeta = \varepsilon_2 \left[A_2 \left(\arcsin \frac{v_2}{v_{2m}} - \arcsin \frac{v_{20}}{v_{2m}} \right) + B_2 (\sqrt{v_{2m}^2 - v_2^2} - \sqrt{v_{2m}^2 - v_{20}^2}) \right] \quad (3.47)$$

$\zeta_m < \xi < \frac{\pi}{2}$ аймағы үшін,

$$\zeta = \zeta_m + \varepsilon_2 \left(A_2 \arccos \frac{v_2}{v_{2m}} - B_2 \sqrt{v_{2m}^2 - v_2^2} \right) \quad (3.48)$$

Мұндағы,

$$v_i = 1 + (\alpha_i - \beta_i)T, \quad v_{i10} = 1 + (\alpha_i - \beta_i)T_0, \quad v_{im} = 1 + (\alpha_i - \beta_i)T_m,$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\lambda_{i0}}{\rho_{i0}(\alpha_i - \beta_i)}}, \quad v_s = \sqrt{v_{10}^2 + \frac{\lambda_{20}\rho_{20}}{\lambda_{10}\rho_{10}} \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_2 - \beta_2} (v_{2m}^2 - v_{20}^2)},$$

$$A_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i - \beta_i}, \quad B_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i - \beta_i}.$$

3.3 Томсон әсерімен идеал түйіспелерді жылыту

Томсон әсерін ескере отырып, стационарлы температура мен электромагниттік өрістерді жабық гетерогенді түйіспелерде қарастырайық. Мысалы, нақты электрлік кедергісі ρ_i және Томсон коэффициенті σ_{Ti} , θ_i температурасында сызықтық тәуелді болады:

$$\rho_i = \rho_{i0}(1 + \alpha_i \theta_i), \quad \sigma_{Ti} = \sigma_{Ti0}(1 + \beta_i \theta_i) \quad (3.49)$$

алайда, жылу өткішгіш λ_i тұрақты болып келеді, себебі оның температуралық тәуелділігі соншалықты маңызды емес және есептелген температура аралығы үшін орташа есеппен алынуы мүмкін.

θ_i температурасы және φ_i потенциалы үшін теңдеулер жүйесі мынадай формада жазылады:

$$\lambda_i \Delta \theta_i + \frac{\sigma_{Ti}}{\rho_i} \nabla \theta_i \cdot \nabla \varphi_i + \frac{1}{\rho_i} \nabla^2 \varphi_i = 0, \quad \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho_i} \nabla \varphi_i \right) = 0 \quad (3.50)$$

Цилиндрлік координат жүйесінде осы теңдеулер мына формада болады:

$$(1 + \alpha_i \theta_i) \left(\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial z^2} \right) + \frac{\sigma_{Ti0}}{\lambda_i \rho_{i0}} (1 + \beta_i \theta_i) \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) + \frac{1}{\lambda \rho_{i0}} \left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.51)$$

$$(1 + \alpha_i \theta_i) \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right) - \alpha_i \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.52)$$

$i = 1$ индексі $D_1(0 < r < \infty, -\infty < z < 0)$ катодтық аймағына сәйкес келеді және $i = 2$ индексі $D_2(0 < r < \infty, 0 < z < \infty)$ анодтық аймағына сәйкес келеді.

Электрлік потенциал мен температура үшін шекаралық шарттар төмендегідей жазылады:

$$\varphi_1 = -\frac{u_c}{2}, \quad \text{if } r^2 + z^2 = \infty, \quad z < 0 \quad (3.53)$$

$$\varphi_2 = \frac{u_c}{2}, \quad \text{if } r^2 + z^2 = \infty, \quad z > 0 \quad (3.54)$$

$$\varphi_1(r, -0) = \varphi_2(r, +0) \quad (3.55)$$

$$\frac{1}{\rho_{10}[1 + \alpha_1 \theta_1(r, -0)]} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{20}[1 + \alpha_2 \theta_2(r, +0)]} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \varphi_1(r, -0)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2(r, +0)}{\partial z} \quad (3.57)$$

$$\theta_i = 0, \quad \text{if } r^2 + z^2 = \infty, \quad i = 1, 2 \quad (3.58)$$

$$\theta_1(r, -0) = \theta_2(r, +0), \quad r < r_0 \quad (3.59)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(r, -0)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_2(r, +0)}{\partial z}, \quad r < r_0 \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \theta_1(r, -0)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \theta_2(r, +0)}{\partial z} = 0, \quad r > r_0 \quad (3.61)$$

Бұл есеп (3.51), (3.52), (3.56) теңдеулері салдарынан негізінен сызықтық емес болып табылатындығын ескере кету керек.

Айнымалы эллипсоидтық бет ξ жағдайында біз мына мәндерді аламыз:

$$(1 + \alpha_i \theta_i) \theta_i'' + \frac{\sigma_{Ti0}}{\lambda_i \rho_{i0}} (1 + \beta_i \theta_i) \theta_i' \varphi_i' + \frac{1}{\lambda_i \rho_{i0}} (\varphi_i')^2 + (1 + \alpha_i \theta_i) \theta_i' \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} = 0 \quad (3.62)$$

$$(1 + \alpha_i \theta_i) \varphi_i'' - \alpha_i \theta_i' \varphi_i' + (1 + \alpha_i \theta_i) \varphi_i' \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} = 0 \quad (3.63)$$

Айнымалы эллипсоидтық бет ξ жағдайында шекаралық шарттарды жазу үшін мына жағдайларды ескеру керек:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial z} = \theta_i'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial z} = (-1)^i \theta_i'(\xi) \frac{z}{\xi} \left[1 + \frac{f^2 r^2}{(r_0^2 + \xi^2)^2 - r_0^2 r^2} \right] \quad (3.64)$$

(3.22) қатынастарын ескере отырып, біз (3.13) және сол сияқты (3.9) шарттарына түйіспелері $\xi(r, z)$ функциясын таңдау кезінде автоматты түрде қанағаттандырылады деп қорытынды жасай аламыз.

(3.22) қатынастары $z = \pm 0$, $r < r_0$ болғанда мына форманы қабылдайды:

$$\left. \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right|_{z=\pm 0} = \theta_i'(0) \cdot \frac{f}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \quad (3.65)$$

Осылайша, (3.12) және сол сияқты (3.8) шарттары мына формаға дейін қысқарады:

$$\frac{1}{\rho_{10}[1 + \alpha_1 \theta_1(0)]} \varphi_1'(0) = \frac{1}{\rho_{20}[1 + \alpha_2 \theta_2(0)]} \varphi_2'(0) \quad (3.66)$$

$$\lambda_1 \theta_1'(0) = \lambda_2 \theta_2'(0) \quad (3.67)$$

Соңында, (3.5), (3.6), (3.7), (3.10) және (3.11) шарттарының орнына эллипсоидтық бет ξ жағдайында сәйкес шарттарды жаза аламыз:

$$\varphi_1(-\infty) = -\frac{u_c}{2} \quad (3.68)$$

$$\varphi_2(\infty) = \frac{u_c}{2} \quad (3.69)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \quad (3.70)$$

$$\theta_1(-\infty) = \theta_2(\infty) = 0 \quad (3.71)$$

$$\theta_1(0) = \theta_2(0) \quad (3.72)$$

Осылайша, бірінші мәселе (3.23) - (3.29) шекаралық шарттармен (3.20) - (3.21) теңдеулер жүйесіне дейін қысқарады. Біз оның шешімін мынадай формада қайта жазылған теңдеуден бастаймыз (3.21).

$$\frac{\varphi_i''}{\varphi_i'} - \frac{\alpha_i \theta_i'}{1 + \alpha_i \theta_i} + \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} = 0$$

Бұл теңдеуді интегралдау φ_i' және θ_i арасындағы қатынастарды береді.

$$\varphi_i'(\xi) = \frac{C_i(1 + \alpha_i \theta_i)}{r_0^2 + \xi^2} \quad (3.73)$$

C_i тұрақтыларын келесі түсініктерден анықтауға болады. Эквипотенциалды бет (3.18) $\xi \rightarrow \pm\infty$ сияқты радиустың ξ аймағына жақындайды. Егер ξ және $\xi + d\xi$ радиусы бар осындай екі аймақтардың потенциалы сәйкесінше φ_i және $\varphi_i + d\varphi_i$ тең болса, онда Ом заңына сәйкес,

$$d\varphi_i = I\rho_{i0}(1 + \alpha_i \theta_i) \frac{d\xi}{2\pi\xi}$$

осылайша

$$\varphi_i'(\xi) \rightarrow \frac{I\rho_{i0}(1 + \alpha_i \theta_i)}{2\pi\xi^2}, \quad \xi \rightarrow \pm\infty$$

Бұл өрнекті (3.30)-бен салыстыра отырып және шегін $\xi \rightarrow \pm\infty$ сияқты есептей отырып, біз мынадай форманы таба аламыз,

$$C_i = \frac{I\rho_{i0}}{2\pi} \quad (3.74)$$

осылайша

$$\varphi_i'(\xi) = \frac{I\rho_{i0}}{2\pi} \frac{1 + \alpha_i \theta_i}{r_0^2 + \xi^2} \quad (3.75)$$

C_i тұрақты шамасының мұндай анықтамасы шарттың автоматты түрде орындалуын қамтитын ескере өту қажет (3.23).

Енді (3.20) теңдеуі (3.32) теңдеуін қолдану арқылы мынадай формаға қысқаруы мүмкін,

$$\theta_i'' + \frac{I\sigma_{Ti0}}{2\pi\lambda_i} (1 + \beta_i\theta_i) \frac{\theta_i'}{r_0^2 + \xi^2} + \frac{I^2\rho_{i0}}{4\pi^2\lambda_i} \frac{1 + \alpha_i\theta_i}{(r_0^2 + \xi^2)^2} + \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} \theta_i' = 0$$

Осы теңдеудің шешімін мынадай форма бойынша табуға тырысайық.

$$\theta_i(\xi) = \Phi_i(\zeta), \quad \zeta = \arctan \frac{\xi}{r_0} \quad (3.76)$$

Сонда $\Phi_i(\zeta)$ қатысты теңдеулер мынадай:

$$\Phi_i'' + \omega_i^2 \left(\Phi_i + \frac{1}{\alpha_i} \right) + 2\delta_i (1 + \beta_i\Phi_i) \Phi_i' = 0 \quad (3.77)$$

мұндағы

$$\omega_i = \frac{I}{2\pi r_0} \sqrt{\frac{\rho_{i0}\alpha_i}{\lambda_i}}, \quad \delta_i = \frac{I\sigma_{Ti0}}{4\pi\lambda_i r_0} \quad (3.78)$$

Томсон әсері Джоуль әсерімен салыстырғанда жабық түйсікпелерді қыздыру үшін маңызды емес, сондықтан δ_i коэффициенті шағын параметр ретінде қарастырылуы мүмкін екендігі төменде көрсетіледі. Сызықты емес дифференциалдық теңдеудің (3.34) жуық шешімін Крылов-Боголюбовтың [24] әдісін қолданған жағдайда табуға болады:

$$\Phi_i(\zeta) = -\frac{1}{\alpha_i} + \exp(-\bar{\delta}_i\zeta) (A_i \cos \omega_i\zeta + B_i \sin \omega_i\zeta) \quad (3.79)$$

мұндағы

$$\bar{\delta}_i = \delta_i \left(1 - \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)$$

A_i мен B_i тұрақты шамалары (3.24), (3.28), (3.29) шекаралық шарттарынан

анықталады:

$$A_i = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{r_1}{\alpha_1} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_1\right) + \frac{r_2}{\alpha_2} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_2\right) - (-1)^i \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right) \Delta_{3-i} \right] \quad (3.80)$$

$$B_i = (-1)^i \left\{ \frac{1}{\alpha_i} \exp\left[(-1)^i \frac{\pi}{2} \bar{\delta}_i\right] \cos ec \frac{\pi \omega_i}{2} - A_i \cot \frac{\pi \omega_i}{2} \right\}$$

мұндағы

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \quad \Delta_i = r_i \left[\cos \frac{\pi \omega_i}{2} + (-1)^i \frac{\bar{\delta}_i}{\omega_i} \sin \frac{\pi \omega_i}{2} \right],$$

$$r_i = \lambda_i \omega_i \sin \frac{\pi \omega_{3-i}}{2}$$

Енді $\varphi_i(\xi)$ потенциалдарын теңдеудің (3.32) шекаралық шарттарымен (3.25), (3.26) интегралдау арқылы табуға болады:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= -\frac{u_c}{2} + \frac{I \rho_{01}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{1 + \alpha_1 \theta_1(\xi)}{r_0^2 + \xi^2} d\xi = -\frac{u_c}{2} + \frac{I \rho_{10}}{2\pi r_0} \int_{-\pi/2}^{\xi} [1 + \alpha_1 \Phi_1(\zeta)] d\zeta = \\ &= -\frac{u_c}{2} + \frac{I \rho_{10} \alpha_1}{2\pi r_0} \frac{\bar{\delta}_1}{\omega^2 + \bar{\delta}_1^2} \left\{ -(A_1 + \frac{\omega_1}{\bar{\delta}_1} B_1) [\exp(-\bar{\delta}_1 \zeta) \cos \omega_1 \zeta - \exp(\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_1) \cos \frac{\pi \omega_1}{2}] + \right. \\ &\left. (\frac{\omega_1}{\bar{\delta}_1} A_1 - B_1) [\exp(-\bar{\delta}_1 \zeta) \sin \omega_1 \zeta + \exp(\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_1) \sin \frac{\pi \omega_1}{2}] \right\} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Соған ұқсас

$$\begin{aligned} \varphi_2(\xi) &= \frac{u_c}{2} - \frac{I \rho_{20} \alpha_2}{2\pi r_0} \frac{\bar{\delta}_2}{\omega^2 + \bar{\delta}_2^2} \left\{ -(A_2 + \frac{\omega_2}{\bar{\delta}_2} B_2) [\exp(-\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_2) \cos \frac{\pi \omega_2}{2} - \right. \\ &\left. - \exp(-\bar{\delta}_2 \zeta) \cos \omega_2 \zeta] + \right. \\ &\left. (\frac{\omega_2}{\bar{\delta}_2} A_2 - B_2) [\exp(-\frac{\pi}{2} \bar{\delta}_2) \sin \frac{\pi \omega_2}{2} - \exp(-\bar{\delta}_2 \zeta) \sin \omega_2 \zeta] \right\} \end{aligned} \quad (3.82)$$

мұндағы

$$\zeta = \arctan \frac{\xi}{r_0} \quad (3.83)$$

(3.34) өрнектерін және Ом заңын пайдалана отырып, (3.38) және (3.39) функцияларының (3.27) шартын қанағаттандыратындығын тексеру қиын емес. Осылайша, (3.3)-(3.13) есептерінің жуық шешімі (3.30) -(3.40) формулаларымен анықталады, мұнда ξ (3.18) өрнегі арқылы беріледі.

Электродтық материалдардың гетерогенді қасиеттеріне және термоэлектрлік әсерге байланысты максималды температураның түйіспе жазықтығынан анодқа немесе катодқа қарай ауытқуы бар екенін атап өту қажет. Мұндай жылжу түйіспе сұйық көпірдің нысанына, пластикалық және түйіспе дәнекерлеу аймақтарына, сондай-ақ құрылымдық фазалық өзгерістермен қоса, басқа да құбылыстарға, әсіресе, электродтың ішінде пайда болатын түйіспе материалдарының балқытылуына әсер етуі мүмкін. Егер температурасы максимумға жететін изотерма ξ_0 позициясы болса, онда осы позицияны анықтайтын параметрлерді талдауға болады. Осылайша, бұл түйіспе жылу құбылыстарының бағытын алдын-ала болжауға және белгілі бір дәрежеде түйіспе материалдардың тиісті таңдауы арқылы басқаруға мүмкіндік береді.

ξ_0 мәні функция үшін экстремалды тесттен табылуы мүмкін (3.36). Бұл мынадай формуланы береді:

$$\xi_0 = \frac{1}{\delta_i \kappa_i} \arctan \frac{-A_i + \kappa_i B_i}{\kappa_i A_i + B_i} \quad (3.84)$$

Мұнда $\kappa_i = 1 - \beta_i / \alpha_i$ және $i=1$ немесе $i=2$ индекстері ρ_i үлкен мәнге ие материалға сәйкес таңдалуы тиіс.

Қысу кедергісі R_c өрнек арқылы анықталады.

$$R_c = \frac{\rho_{10}}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{1 + \alpha_1 \theta_1}{r_0^2 + \xi^2} d\xi + \frac{\rho_{20}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \alpha_2 \theta_2}{r_0^2 + \xi^2} d\xi =$$

$$\frac{\rho_{10}}{2\pi r_0 \omega_1} \left[A_1 \sin \frac{\omega_1 \pi}{2} - B_1 \left(\cos \frac{\omega_1 \pi}{2} - 1 \right) \right] + \frac{\rho_{20}}{2\pi r_0 \omega_2} \left[A_2 \sin \frac{\omega_2 \pi}{2} - B_2 \left(\cos \frac{\omega_2 \pi}{2} - 1 \right) \right] \quad (3.85)$$

3.4 Ерекше жағдайлар

Мәселені нақты шешу үшін нақты шешімі болатын кейбір ерекше жағдайларды қарастырайық.

1. Томсон коэффициенті тұрақты. Егер $\beta_i = 0$ болса, (3.34) теңдеуі мынадай форманы қабылдайды.

$$\Phi_i'' + 2\delta_i\Phi_i' + \omega_i(\Phi_i + \frac{1}{\alpha_i}) = 0 \quad (3.86)$$

оның шешімдері температура үшін (3.33) - (3.34) өрнектері арқылы және потенциалдар үшін (3.38) - (3.39) өрнектері арқылы анықталады, онда $\bar{\delta}_i$ және ω_i тиісінше δ_i және $\omega_i\sqrt{1 - \frac{\sigma_{T10}}{4\rho_{i0}\alpha_i\lambda_i}}$ ауыстыруы қажет.

2.Томсон әсері өте әлсіз. Егер $\sigma_{T10} = 0$, $\beta_i = 0$ болса және (3.36) – (3.39) өрнектері мынадай формулаға өзгереді:

$$\Phi_i(\zeta) = -\frac{1}{\alpha_i} + A_i \cos \omega_i \zeta + B_i \sin \omega_i \zeta, \quad i = 1, 2 \quad (3.87)$$

мұндағы

$$A_i = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\lambda_1 \omega_1}{\alpha_1} \sin \frac{\pi}{2} \omega_2 + \frac{\lambda_2 \omega_2}{\alpha_2} \sin \frac{\pi}{2} \omega_1 - (-1)^i \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) \Delta_{3-i} \right],$$

$$B_i = \frac{\lambda_{3-i} \omega_{3-i}}{\Delta} \left[\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) \cos \frac{\pi}{2} \omega_1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \omega_2 - \frac{1}{\alpha_1} \cos \frac{\pi}{2} \omega_2 + \frac{1}{\alpha_2} \cos \frac{\pi}{2} \omega_1 \right],$$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \quad \Delta_i = \lambda_i \omega_i \cos \frac{\pi}{2} \omega_i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \omega_{3-i}$$

және

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{u_c}{2} + \sqrt{\rho_{10}\alpha_1\lambda_1} [A_1(\sin \omega_1 \zeta + \sin \frac{\pi}{2} \omega_1) - B_1(\cos \omega_1 \zeta - \cos \frac{\pi}{2} \omega_1)]$$

$$\varphi_2(\zeta) = \frac{u_c}{2} - \sqrt{\rho_{20}\alpha_2\lambda_2} [A_2(\sin \frac{\pi}{2} \omega_2 - \sin \omega_2 \zeta) - B_2(\cos \frac{\pi}{2} \omega_2 - \cos \omega_2 \zeta)]$$

Бұл формулалар есептеу үшін ыңғайлы болады, егер біз түйіспе алаңында температураны және потенциалды ескерсек:

$$\theta_0 = \Phi_1(0) = \Phi_2(0) = \frac{\frac{\lambda_1 \omega_1}{\alpha_1} \tan \frac{\pi \omega_1}{4} + \frac{\lambda_2 \omega_2}{\alpha_2} \tan \frac{\pi \omega_2}{4}}{\lambda_1 \omega_1 \cot \frac{\pi \omega_1}{2} + \lambda_2 \omega_2 \cot \frac{\pi \omega_2}{2}} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) &= -\frac{u_c}{2} + \sqrt{\rho_{10} \alpha_1 \lambda_1} \left(\frac{2}{\alpha_1} + \theta_0 \right) \tan \frac{\pi \omega_1}{4} = \\ &= \frac{u_c}{2} - \sqrt{\rho_{20} \alpha_2 \lambda_2} \left(\frac{2}{\alpha_2} + \theta_0 \right) \tan \frac{\pi \omega_2}{4} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Осылайша,

$$\Phi_i(\zeta) = -\frac{1}{\alpha_i} + \frac{(1 + \alpha_i \theta_0) \sin \left\{ \omega_i \left[\frac{\pi}{2} - (-1)^i \zeta \right] \right\} - \sin \left[\omega_i (-1)^i \zeta \right]}{\alpha_i \sin \frac{\pi \omega_i}{2}} \quad (3.90)$$

$$\varphi_i(\zeta) = \varphi_0 + \sqrt{\rho_{i0} \alpha_i \lambda_i} [A_i \sin \omega_i \zeta + B_i (1 - \cos \omega_i \zeta)] \quad (3.91)$$

Түйіспе беті және изотермамен ζ шектелген аймақтың қысу кедергісі өрнектен анықталады:

$$R_i(\zeta) = \frac{(-1)^i}{I} [\varphi_i(\zeta) - \varphi_0], \quad i = 1, 2 \quad (3.92)$$

3. Гомогенді түйіспелер. Томсон эффекті өте әлсіз.
 $\rho_{10} = \rho_{20} = \rho_0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\sigma_{Ti} = 0$ болса, (3.44) өрнектері қарапайым формада болады.

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cos \omega \zeta}{\sin \omega \zeta} - 1 \right) \quad (3.93)$$

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{u_c}{2} + \sqrt{\frac{\rho_0 \lambda}{\alpha}} \frac{1}{\cos \frac{\pi \omega}{2}} \left(\sin \omega \zeta + \sin \frac{\omega \pi}{2} \right) \quad (3.94)$$

$$\varphi_2(\zeta) = \frac{u_c}{2} - \sqrt{\frac{\rho_0 \lambda}{\alpha}} \frac{1}{\cos \frac{\pi \omega}{2}} \left(\sin \frac{\pi \omega}{2} - \sin \omega \zeta \right) \quad (3.95)$$

Бұл өрнектер жоғарыда көрсетілген белгілі формулаларға сәйкес келеді [25]. Түйіспе бетімен шектелген қысу кедергісі және эквипотенциал беті ζ мына жағдайда анықталады.

$$R(\zeta) = \frac{\rho_0}{2\pi r_0 \omega} \frac{\sin \omega \zeta}{\cos \frac{\pi \omega}{2}} \quad (3.96)$$

Бір түйіспе элементінің қысу кедергісі ($\zeta = \pi/2$) мынадай,

$$R(\pi/2) = \frac{\rho_0}{2\pi r_0 \omega} \tan \frac{\pi \omega}{2} \quad (3.97)$$

және толық кедергі екі еселенеді.

4. Гетерогенді түйіспе. Томсон әсер өте әлсіз. Электр кедергісі тұрақты.

Егер $\sigma_{Ti} = 0$, $\alpha_i = 0$, $\rho_{20} > \rho_{10}$, онда

$$\theta_i(\zeta) = -\frac{I^2 \rho_{i0}}{8\pi^2 \lambda_i r_0^2} \zeta^2 + A_i \zeta + B_i, \quad R = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad (3.98)$$

Мұндағы,

$$A_i = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{I^2}{32r_0^2} \left(\frac{\rho_{20}}{\lambda_2} - \frac{\rho_{10}}{\lambda_1} \right), \quad B_1 = B_2 = \frac{I^2 (\rho_{20} \lambda_1 - \rho_{10} \lambda_2)}{32r_0^2 (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

$$\zeta_0 = \frac{\pi (\rho_{20} \lambda_1 - \rho_{10} \lambda_2)}{4\rho_{20} (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

Максималды температура изотермасының ζ_0 ең үлкен жылжуы түйіспе аймағының радиусынан f аспайды, өйткені $\zeta_0 \leq \frac{\pi}{4}$.

Егер температура аралығы салыстырмалы түрде аз болса (немесе α_i аз болса) қысу кедергісі R мынадай түрде жазылуы мүмкін

$$R = \frac{\rho_{10} + \rho_{20}}{2r_0} + \frac{2}{3} \frac{\rho_{10} \alpha_1 \theta_{10} + \rho_{20} \alpha_2 \theta_{20}}{2r_0} + \frac{\rho_{10} \alpha_1 \lambda_2 - \rho_{20} \alpha_2 \lambda_1}{4r_0 (\lambda_1 + \lambda_2)} (\theta_{20} - \theta_{10}) \quad (3.99)$$

Мұндағы $\theta_{i0} = A_i - \frac{1}{\alpha_i}$ түйіспе аймағындағы температураның мәні болып табылады.

5. Томсон әсерімен гетерогенді түйіспе. Электр кедергісі тұрақты.

Егер $\alpha_i = 0$ және (4.36) теңдеуі былай өзгереді

$$\Phi_i'' + 2\delta_i(1 + \beta_i\Phi_i)\Phi_i' + \chi_i = 0 \quad (3.100)$$

Мұндағы

$$\chi_i = \frac{I^2 \rho_{i0}}{4\pi^2 r_0^2 \lambda_i}$$

Алмастыру,

$$\Phi_i(\zeta) = y_i(x_i) \quad (3.101)$$

Мұндағы

$$y_i(x_i) = \exp\left\{\delta_i \int_0^{x_i} [1 + \beta_i \Phi_i(\zeta)] d\zeta\right\}, \quad x_i = P_i \zeta, \quad P_i = (\delta_i \chi_i \beta_i)^{1/3} \quad (3.102)$$

бұл теңдеуді мына формаға дейін қысқартты.

$$\frac{d}{dx_i} \left\{ \frac{1}{y_i(x_i)} \frac{d^2}{dx_i^2} [y_i(x_i)] \right\} + 1 = 0,$$

$$-\frac{\pi}{2} P_1 < x_1 < 0, \quad 0 < x_2 < \frac{\pi}{2} P_2$$

Соңғы теңдеудің жалпы шешімі Бессель функциялары бойынша көрініс табуы мүмкін:

$$y_i(x_i) = \sqrt{v_i} \left[C_i J_{1/3} \left(\frac{2}{3} v_i^{3/2} \right) + D_i Y_{1/3} \left(\frac{2}{3} v_i^{3/2} \right) \right], \quad v_i = x_i + E_i \quad (3.103)$$

C_i, D_i, E_i тұрақты шамалары (3.30), (3.58), (3.59) теңдеулеріне байланысты жазылуы мүмкін (3.24), (3.28), (3.29) шарттарын пайдалана отырып, мынадай формада анықталады:

$$\frac{\lambda_1 P_1^2}{\beta_1 \delta_1} [y_1''(0) - y_1'(0)] = \frac{\lambda_2 P_2^2}{\beta_2 \delta_2}, \quad \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{P_1}{\delta_1} y_1'(0) - 1 \right] = \frac{1}{\beta_2} \left[\frac{P_2}{\delta_2} y_2'(0) - 1 \right] \quad (3.104)$$

$$y_1' \left(-\frac{\pi}{2} P_1 \right) = \delta_1 P_1, \quad y_2' \left(\frac{\pi}{2} P_2 \right) = \delta_2 P_2$$

қосымша екі шартпен бірге

$$y_i(0) = 1, \quad i = 1, 2 \quad (3.105)$$

(3.59) өрнегінен шығады.

φ_i потенциалдары алдыңғы өрнектер бойынша анықталады.

$$\varphi_i(\zeta) = \{(-1)^i \frac{u_c}{2} + \frac{I\rho_{i0}}{2\pi r_0} \int_{(-1)^i \pi/2}^{\zeta} [1 + \alpha_i \Phi_i(\zeta)] d\zeta \quad (3.106)$$

3.5 Максимал тоқтың шегі

Жоғарыда келтірілген формулалар егер $\omega_i < 1$ болса мәнге ие болады, басқа сөзбен айтқанда

$$\frac{I}{2f} < \kappa_0 = \pi \sqrt{\frac{\lambda_i}{\rho_{i0} \alpha_i}} \quad (3.107)$$

Мұндай ерекше шектеулер түйіспе кернеуін тіпті шексіздікке дейін ұлғайтуға мүмкіндік беретін электр кернеуінің температуралық тәуелділігімен түсіндіріледі, бірақ ол температураның шексіз көтерілуіне және қысу кедергісіне әкеледі, ал ағымның мәні теңсіздікпен шектелген болып қалады (3.64). Бұл теңсіздікті дәлелдейік. Біз Томсон әсері жоқ симметриялық біртекті түйіспелердің қарапайым екендігін қарастырамыз. Температура $\theta(\xi)$ үшін (3.20) теңдеуі катодта, сондай-ақ анодта жазылуы мүмкін.

$$(1 + \alpha\theta)\theta'' + \frac{1}{\lambda\rho_0} \varphi'^2 + (1 + \alpha\theta)\theta' \frac{2\xi}{r_0^2 + \xi^2} = 0 \quad (3.108)$$

Бұл теңдеулердің шешімі (3.50), (3.40) өрнектері арқылы беріледі:

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\cos(\omega \arctan \frac{\xi}{r_0})}{\cos \frac{\pi\omega}{2}} - 1 \right] \quad (3.109)$$

Мұндағы

$$\omega = \frac{I}{2\pi r_0} \sqrt{\frac{\rho_0 \alpha}{\lambda}} \quad (3.110)$$

ω үшін (3.67) өрнегі (3.30) теңдеуін қолдану арқылы табылды, бұл

$$\varphi'(\xi) = \frac{C(1 + \alpha\theta)}{r_0^2 + \xi^2} \quad (3.111)$$

ал C тұрақты шамасы (3.34) формуласын пайдалана отырып физикалық тұрғыдан табылды. Енді оны бұл жағдайда түйіспе симметриясына байланысты жазылуы мүмкін потенциал үшін шекаралық шарттардан тікелей табайық:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \frac{u_c}{2} \quad (3.112)$$

(3.68) өрнегін (3.65) теңдеуіне қоя отырып және бұл теңдеуді шеше отырып біз ұқсас (3.66) формуласын аламыз, мұндағы

$$\omega = \frac{C}{r_0} \sqrt{\frac{\alpha}{\rho_0 \lambda}}$$

(3.66) және (3.69) формулаларын қолдана отырып, (3.68) теңдеуінің интегралдау потенциал үшін келесі өрнектерді береді:

$$\varphi(\xi) = \frac{C}{r_0 \omega} \frac{\sin(\omega \arctan \frac{\xi}{r_0})}{\cos \frac{\pi \omega}{2}} = \sqrt{\frac{\rho_0 \lambda}{\alpha}} \frac{\sin(\omega \arctan \frac{\xi}{r_0})}{\cos \frac{\pi \omega}{2}}$$

осылайша

$$\varphi(\infty) = \frac{u_c}{2} = \sqrt{\frac{\rho_0 \lambda}{\alpha}} \tan \frac{\omega \pi}{2}$$

Сондықтан,

$$\omega = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{u_c}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\rho_0 \lambda}}\right) \quad (3.113)$$

және

$$C = r_0 \sqrt{\frac{\rho_0 \lambda}{\alpha}} \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{u_c}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\rho_0 \lambda}} \right) \quad (3.114)$$

Оны $\omega < 1$ болатын (3.70) өрнегінен тікелей алуға болады, сондықтан теңсіздік (3.64) дәлелденді. Осылайша түйіспе аймағының әрбір радиусы үшін түйіспе материалының қасиеттері бойынша анықталатын токтың максималды мәні бар. Дегенмен, бұл мән ешқашан жетпейді, себебі ол шексіз температураға сәйкес келеді, ал түйіспе аймағының радиусы жұмсарту температурасында және балқу температурасында әлдеқайда көп болады.

Ең үлкен мәнге сәйкес келетін түйіспе аймағының ағымы және диаметрінің қатынасы

$$\left(\frac{I}{2r_0} \right)_{\max} = \kappa_0 = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0 \alpha}}$$

$$r_0 < r < \infty$$

сондай-ақ балқу температурасына θ_m сәйкес келеді,

$$\left(\frac{I}{2r_0} \right)_m = \kappa_m = 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0 \alpha}} \arccos \frac{1}{1 + \alpha \theta_m}$$

1-кестедегі кейбір материалдар үшін берілген.

κ_0 және κ_m мәндері тереңдікте болуы мүмкін, түйіспе бетінен жылу бөліну әсерінен үлкен мәнге ие болуы мүмкін.

Электр кедергісінің температуралық тәуелділігі ескерілмеген жағдайда ток шектеуі орын алмайтындығын атап өту қажет. Бұл тұжырым формуламен расталады,

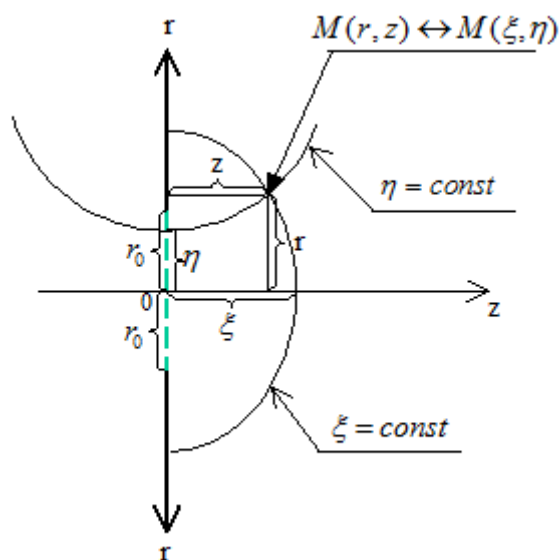
$$\theta(\xi) = \frac{I^2 \rho_0}{32 r_0^2 \lambda} \left(1 - \frac{4}{\pi} \arctan^2 \frac{\xi}{r_0} \right) \quad (3.115)$$

Бұл (3.66) өрнегінен $\alpha \rightarrow 0$ үшін лимит ретінде шығуы мүмкін. Бұл факт формуланың (3.72) шектеулі қолданылатынын растайды. Сонымен қатар, түйіспе кернеуінің температуралық тәуелділігімен байланыстағы жылу проблемасының дұрыс математикалық мәлімдемесі кіріс тоғының орнына кернеуді қамтиды.

1-кесте. Максимал токтың шегі.

Материал	ρ_0 $10^{-8} \Omega \cdot m$	α $10^{-3} K^{-1}$	λ $10^2 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	κ_0 $10^6 A \cdot m^{-1}$	κ_m $10^6 A \cdot m^{-1}$
<i>Al</i>	2.9	4.0	2.10	4.23	3.42
<i>Cr</i>	20.0	2.0	0.67	1.29	1.09
<i>Fe</i>	10.0	6.5	0.60	0.96	0.90
<i>Ni</i>	8.0	5.0	0.70	1.32	1.21
<i>Cu</i>	1.75	4.0	3.80	7.33	6.45
<i>Zn</i>	6.1	3.7	1.10	2.19	1.63
<i>Mo</i>	5.8	4.5	1.40	2.30	1.59
<i>Ag</i>	1.65	4.0	4.18	7.92	6.87
<i>Cd</i>	7.5	4.0	0.90	1.72	1.23
<i>Sn</i>	12.0	4.5	0.64	1.08	0.73
<i>Ta</i>	14.0	3.0	0.54	1.13	1.05
<i>Au</i>	2.3	4.0	3.10	5.78	5.07
<i>W</i>	5.5	5.0	1.90	2.62	2.53
<i>Pt</i>	11.0	3.8	0.7	1.29	1.18
<i>Pd</i>	10.8	3.3	0.7	1.39	1.25
<i>Pb</i>	21.0	4.0	0.35	0.64	0.46

(3.3) - (3.13) мәселелерін шешуді эллипсоидтік координаттар (ξ, η) үшін өзара шектелген цилиндрлік координаттардың (r, z) ресми түрде өзгеруі арқылы алуға болатындығын айта кеткен жөн.



6-сурет. Эллипсоидты координаталар

$$\frac{r^2}{\xi^2 + r_0^2} + \frac{z^2}{\xi^2} = 1 \quad (3.116)$$

$$\frac{r^2}{\eta^2} - \frac{z^2}{r_0^2 - \eta^2} = 1 \quad (3.117)$$

Эллипсоидтық координаталар айналымның изотермиялық эллипсоидтардың тегі және (3.73) және (3.74) теңдеулерін беретін бір бетінің гиперболоидтарының ортогонал тегі арқылы анықталады. Осы теңдеулерден кері байланыс алуға болады:

$$r = \frac{\eta}{r_0} \sqrt{r_0^2 + \xi^2}, \quad z = \frac{\xi}{r_0} \sqrt{r_0^2 - \eta^2}, \quad (3.118)$$

$$-\infty < \xi < \infty, \quad 0 < \eta < r_0$$

$z=0$, $0 < r < r_0$ арқылы цилиндрлік координаталарда берілген түйіспе аймағы эллипсоидальді координаталарда $\xi=0$, $\eta \neq r_0$ арқылы ауыстырылады, ал түйіспе жазықтығының $z=0$, $r > r_0$ қалған бөлігі $\eta=r_0$, $\xi \neq 0$ арқылы ауыстырылады. Мәселені шешу айналымының бөліну әдісін қолдану арқылы үйлестіру жүйелерінің өзгеруінен кейін алынуы мүмкін.

Осы бөлімнің ең маңызды теориялық нәтижелерінің бірі - идеал түйіспе аймағының температурасы (тіпті біркелкі емес) түйкеліс аймағының $z=0$, $0 < r < r_0$ барлық ауданы үшін стационарлық режимде бірдей екенін тұжырымдау. Ол (3.29) - (3.36) өрнектерінен $\xi=0$ -де алынған болуы мүмкін. Бұл тұжырым максималды температура ток тығыздығы максималды болатын жерде, түйіспе аймағының шетіне жылжыған кезде түйіспе жылудың стационарлық режимі үшін жарамды еместігі төменде көрсетіледі.

Түйіспе аймағындағы температураның таралуы да идеал емес түйіспе болған жағдайда біркелкі болмайды.

4 МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

4.1 Кольер әсері.

Туннельдің әсер ету арқылы өткізгіш электрондарға енетін жұқа (бірнеше Å) хемосорбциялық немесе адгезивтік пленкалармен жабылған катод және анод арасындағы айналмалы байланыс нүктесін қарастырайық. Электрондар туннельдеу кезінде олардың энергетикалық деңгейін өзгертпейді. Олар катодта қарағанда әлсіз теріс потенциалы бар анодқа қонғандықтан, оларда артық кинетикалық энергия бар. Кинетикалық энергияның артуы анод пен пленка арасындағы аралықта белгілі бір сыйымдылығы бар бастау болатын жылу ретінде беріледі:

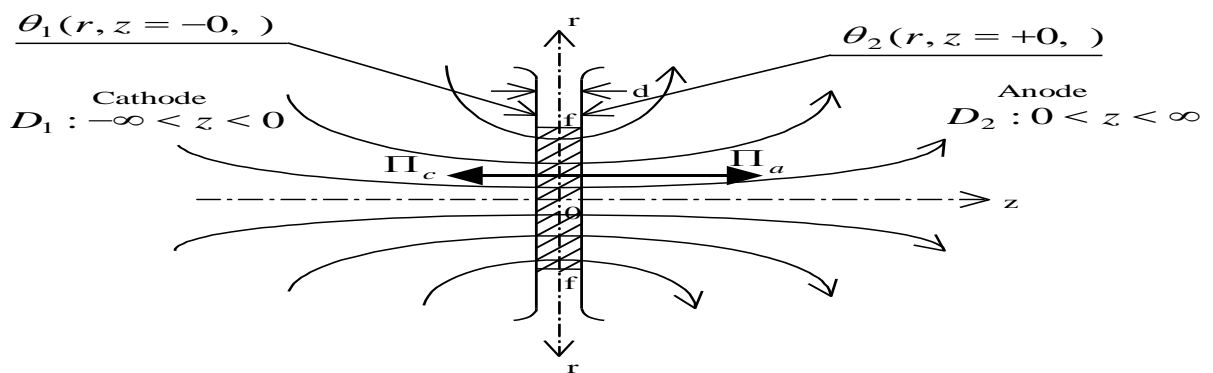
$$\Pi = j \cdot u_f = j^2 \cdot \sigma_f \quad (4.1)$$

j - түйіспелі нүктедегі тоқ тығыздығы, u_f - пленкадағы туннель кернеуі, σ_f - пленка бірлігіне электр туннельдің кедергісі. Белгілі қуаттылықпен босатылған жылудың бөлігі

$$\Pi_c = \frac{\theta_f}{W} \quad (4.2)$$

θ_f температура айырымы және W пленкадағы арнайы жылу кедергісі пленка арқылы катодқа қайта барады, ал қалғандары - бүкіл пленкада термиялық кедергі пленка арқылы катодқа қайта оралады, ал қалған бөлігі – анодқа барады (1-сурет).

$$\Pi_a = \Pi - \frac{\theta_f}{W} \quad (4.3)$$



7-сурет. Түйіспелі пленка бойымен катодтық және анодтық жылу тоғы.

Туннельдік электрондар арқылы анодтың қызып кетуі Кольер әсері деп аталады. Туннельдік кедергі шамасы σ_f байланыс материалдарына, әсіресе жұмыс істеу функциясы Φ , байланыс алаңының радиусы f және пленка қалыңдығына d байланысты.

Пленкаға арнайы жылу кедергісі W берілген

$$W = \frac{d}{\lambda_f} \quad (4.4)$$

λ_f Кольер әсерінің маңызды параметрі болып табылады. Алайда бұл формула пленканың жылу өткізгіштікке λ_f қатысты тым аз ақпаратының себебінен практикалық есептеулер үшін аз пайдаланады. Бірақ Кохлер мен Видиманның бірігуі - Франц заңдары болып табылады. $\lambda_f \rho_f = \lambda \rho = LT$, ρ_f және

ρ пленка мен металлдың электр кедергісін білдіреді, λ түйіспелі металлдың жылу өткізгіштігі, және $\sigma_f = \rho_f d$ бұл қатынасты қолданып, біз орнына бұл (4.4) әлдеқайда тиімді мағынаны аламыз:

$$W = \frac{\sigma_f}{\lambda \rho} \quad (4.5)$$

4.2 Математикалық модель

Цилиндрлік жарты кеңістіктерде катод $\theta_1(r, z)$ және анод $\theta_2(r, z)$ температураның таралуы $D_1(-\infty < z < 0, 0 < r < \infty)$ және $D_2(0 < z < \infty, 0 < r < \infty)$ сәйкесінше жылулық теңдеулермен сипатталады.

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial z^2} + \frac{\rho j^2}{\lambda} = 0 \quad (4.6)$$

$i=1$ мағынасы D_1 үшін және $i=2$ мағынасы D_2 үшін.

Тоқ тығыздығы келесі өрнекпен анықталады [5]

$$j^2 = j_r^2 + j_z^2 = \frac{I^2}{\pi^2} \frac{1}{G^+ G^- (G^+ + G^-)^2}, \quad (4.7)$$

$$G^\pm = \sqrt{z^2 + (r \pm f)^2}$$

Түйіспелі пленкадағы өте аз қалыңдығына байланысты, біз идеалды емес түйіспе үлгісін пленканың температуралық айырмашылығымен θ_f дөңгелек нүкте $S_0(z=0, 0 \leq r \leq f)$ арқылы қолдана отырып, сол жақ шегі θ_2 мен оң шегі θ_1 арасындағы $z \rightarrow 0$ және $0 \leq r \leq f$ мәндері болатын айырмашылық ретінде қолданамыз:

$$\theta_f = \theta_2(r, +0) - \theta_1(r, -0) \quad (4.8)$$

Осындай идеалды емес түйіспе үшін шекаралық шарттар (4.2), (4.3), (4.6) -дан алуға болады:

$$z = 0, 0 \leq r \leq f :$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_1(r, -0)}{\partial z} = \frac{\theta_2(r, +0)}{W} \quad (4.9)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial \theta_2(r, +0)}{\partial z} = \Pi - \frac{\theta_2(r, +0) - \theta_1(r, -0)}{W} \quad (4.10)$$

Демек, байланыс орнында жылу алмасу болмайды,

$$z = 0, f < r < \infty: \quad \frac{\partial \theta_1(r, -0)}{\partial z} = \frac{\partial \theta_2(r, +0)}{\partial z} = 0 \quad (4.11)$$

Егер $\theta_i(r, z)$ түйіспе температурасы мен қоршаған ортаның температурасы арасындағы айырмашылықты білдіреді, демек түйіспе орнынан алшақ

$z = -\infty$, немесе $z = +\infty$, немесе $r = \infty$:

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 \quad (4.12)$$

4.3 Шешімі

(4.8) - (4.12) мәндермен бірге (4.6) теңдеулерді шешу үшін бастапқы $\theta_1(r, z)$ және $\theta_2(r, z)$ орнына $u(r, z)$ және $v(r, z)$ жаңа белгісіз функцияларды енгіземіз.

$$u(r, z) = \theta_2(r, z) + \theta_1(r, -z), \quad v(r, z) = \theta_2(r, z) - \theta_1(r, -z) \quad (4.13)$$

демек $z > 0$.

Егер біз $i=1$ үшін (4.6) шешімде z -ны $-z$ -ға өзгертсек, содан кейін $i=1$ және $i=2$ үшін осы теңдеулердің сол және оң бөліктерін қосып, келесідей мәнге келеміз, $j^2(r, z) = j^2(r, -z)$, содан $u(r, z)$ және $v(r, z)$ теңдеулер аламыз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2\rho j^2}{\lambda} = 0, \quad r > 0, z > 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad r > 0, z > 0 \quad (4.15)$$

(4.9) - (4.12) Шекаралық шарттарды қосу мен алып тастаудан кейін $u(r, z)$ және $v(r, z)$ мәндерге келтіріледі:

$$-\lambda \frac{\partial u(r, 0)}{\partial z} = \begin{cases} \Pi & \text{if } r \leq f \\ 0 & \text{if } r > f \end{cases} \quad (4.16)$$

$$-\lambda \frac{\partial v(r, 0)}{\partial z} = \begin{cases} \Pi - \frac{2}{W} v(r, 0) & \text{if } r \leq f \\ 0 & \text{if } r > f \end{cases} \quad (4.17)$$

$$u = v = 0, \text{ егер } r = \infty \text{ немесе } z = \infty \quad (4.18)$$

Демек (4.14), (4.16), (4.18) үшін $u(r, z)$ және (4.15), (4.17), (4.18) үшін $v(r, z)$ екі тәуелсіз шекаралық мәндер аламыз. [5] Алғашқылардың шешімі қазірдің өзінде белгілі:

$$u(r, z) = \frac{\Pi f}{\lambda} \int_0^{\infty} \exp(-xz) \cdot J_0(xr) \cdot J_1(xf) \frac{dx}{x} + \frac{I^2 \rho}{16 f^2 \lambda} \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \arctan^2 \frac{\xi}{f}\right) \quad (4.19)$$

демек $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s + \sqrt{s^2 + 4f^2 z^2}},$

$$s = z^2 + r^2 - f^2$$

Екінші мәселені шешу төменг түрде ұсынылуы мүмкін

$$v(r, z) = \int_0^{\infty} A(x) \cdot \exp(-xz) \cdot J_0(xr) dx \quad (4.20)$$

Шекаралық шартты қанағаттандыру үшін (4.17) белгісіз функция үшін $A(x)$ қос интегралдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\int_0^{\infty} \left(x + \frac{2}{\lambda W}\right) \cdot A(x) \cdot J_0(xr) dx = \frac{\Pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq f \quad (4.21)$$

$$\int_0^{\infty} A(x) \cdot J_0(xr) x dx = 0, \quad f < r < \infty$$

Орнына қойғаннан кейін

$$A(x) = \int_0^f \varphi(t) \cos(xt) dt$$

(4.21) жүйесі $\varphi(t)$ үшін Фредгольм интегралдық теңдеуіне дейін азайтылуы мүмкін:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{2\Pi}{\lambda\pi} \sqrt{f^2 - t^2} - \\ & \frac{4}{\pi\lambda W} \int_0^f \ln \frac{\sqrt{f^2 - t^2} + \sqrt{f^2 - t_1^2}}{\sqrt{|t^2 - t_1^2|}} \varphi(t_1) dt_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

$t = t_1$ Бұл интегралдық теңдеудің ядросында сингулярлық бар, сондықтан Пикар стандартты әдісімен шешілуі мүмкін.

Осы тәсіл шеңберінде, түйіспе нүктесінің орталығында Кольердің қызып кетуіне арналған аналитикалық өрнек алуға болады. (4.20)-дан $z = 0$ және (4.22)-ден біз келесі мәнді аламыз:

$$\begin{aligned} v(r,0) = & \int_0^{\infty} A(x) J_0(xr) dx = \int_0^{\infty} J_0(xr) dx \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos(xt) dt = \\ & \int_0^r \frac{\varphi(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt = \int_0^1 \frac{\varphi(rx)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \end{aligned}$$

Демек, $v(0,0) = \varphi(0) \cdot \frac{\pi}{2}$.

$\varphi(0)$ табу үшін біз (4.22) өрнекті қайта жазамыз,

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{2\Pi}{\pi\lambda} \sqrt{f^2 - t^2} - \\ & \frac{4f}{\pi\lambda W} \cdot \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \ln \frac{\sqrt{\delta^2 - 1} + \sqrt{\delta^2 - x^2}}{\sqrt{|1 - x^2|}} \cdot \varphi(tx) dx \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty (t \rightarrow 0)} \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \ln \frac{\sqrt{\delta^2 - 1} + \sqrt{\delta^2 - x^2}}{\sqrt{|1 - x^2|}} \cdot \varphi(tx) dx = \varphi(0) \cdot \frac{\pi}{2}$$

демек (4.23) -тен $t \rightarrow 0$ біз келесіні көре аламыз

$$\varphi(0) = \frac{2\Pi f}{\pi\lambda} \cdot \frac{1}{1 + 2f / (\lambda W)}$$

және

$$v(0,0) = \frac{\theta_k}{1 + \varepsilon} \quad (4.24)$$

Мұндағы,

$$\theta_k = \frac{\Pi f}{\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{2f}{\lambda W} \quad \text{болып табылады.} \quad (4.25)$$

Содан кейін (4.19) –дан біз табамыз:

$$u(0,0) = \frac{\Pi f}{\lambda} + \frac{I^2 \rho}{16 f^2 \lambda} = \theta_k + 2\theta_J \quad (4.26)$$

Мұндағы, $\theta_J = \frac{I^2 \rho}{32 f^2 \lambda}$ болып табылады. (4.27)

Ақыр соңында (4.13) формуладан температураны катодта және анодта байланыс нүктесінің ортасында алуға болады.

$$\theta_1(0,0) = \theta_J + \frac{\theta_k}{2} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

$$\theta_2(0,0) = \theta_J + \frac{\theta_k}{2} \frac{2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad (4.28)$$

Осылайша түйіспе аймағының ортасындағы түйіспе пленка бойынша температура айырмасы келесі болады.

$$\theta_f(0) = \theta_2(0,0) - \theta_1(0,0) = \frac{\theta_k}{1 + \varepsilon} \quad (4.29)$$

θ_k шамасы - катодтың туннельдер механизмі арқылы ғана Joule көздері болмаса және катодқа жылу берілуін қажет етпейтін температураға тең. Керісінше, θ_j шамасы Джоульдың жылу механизмінде туннель әсері болмайтын түйіспе нүктесінің ортасындағы ең жоғары температураға тең.

4.4 Туннельдік жылыту критерийі

Кольер әсерін түйіспелі жылуға әсерін бағалау үшін жаңа Кольер критерийі деп аталатын Ko енгізілді, бұл [2] $R_c = \frac{\rho}{2f}$ белгілі формула арқылы анықталған пленка кедергісінің қатынасы $R_f = \sigma_f / (\pi f^2)$ және байланыссыз кедергі пленка (конструкция кедергісі деп аталады) R_c . Демек біз Кольер критерийін келесідей мәңдейміз:

$$Ko = \frac{R_f}{R_c} = \frac{2\sigma_f}{\pi \rho f} \quad (4.30)$$

Ол конструкция аймағының Joule жылытуымен салыстырғанда туннельдеу әсеріне байланысты анодтық түйіспе бетінің қосымша жылу деңгейін анықтайды. Ko критерийі бойынша (4.1) формула төмендегі түрде жазылады

$$\Pi = \frac{I^2 \sigma_f}{\pi^2 f^4},$$

мұндағы I ағымдағы болып табылады, демек

$$\theta_k = \frac{\Pi f}{\lambda} = \frac{16}{\pi} Ko \cdot \theta_j \quad (4.31)$$

Содан

$$Ko = \frac{\pi \theta_k}{16 \theta_j} \quad (4.32)$$

Әрі қарай (4.5), (4.30), (4.25)

$$W = Ko \cdot \frac{\pi f}{2\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{4}{\pi} \frac{1}{Ko} \quad (4.33)$$

және (4.28) формуланы қолдана отырып, біз келесіні аламыз

$$\begin{aligned}\theta_1(0,0) &= \theta_J [1 + \eta_1(Ko)] \\ \theta_2(0,0) &= \theta_J [1 + \eta_2(Ko)]\end{aligned}\tag{4.34}$$

Мұндағы,

$$\begin{aligned}\eta_1(Ko) &= \frac{32}{\pi^2} \frac{1}{1 + 4/(\pi \cdot Ko)} \\ \eta_2(Ko) &= \frac{16}{\pi} Ko \cdot \frac{1 + 2/(\pi \cdot Ko)}{1 + 4/(\pi \cdot Ko)}\end{aligned}\tag{4.35} \text{ болып}$$

табылады.

Туннельдік қызып кету

$$\theta_f(0) = \theta_2(0,0) - \theta_1(0,0) = \frac{1}{2} \theta_J \cdot Ko \cdot \eta_1(Ko)\tag{4.36}$$

$\eta_1(Ko)$ және $\eta_2(Ko)$ функциялар туннельдер мен Joule компоненттерінің тиісінше катодты және анодты қыздыру қатынасы болып табылады. $Ko < 0.02$ болса есептеу өте оңай, анодтық туннельдік жылыту Joule жылытудан 10%-ға кем; егер $Ko = 0.28$ олар тең; егер $Ko > 1$, анод температурасының туннельдік құрамы Joule компонентіне қарағанда 10 есе артық болады.

Бұл $32/\pi^2 \approx 3.03$ коэффициент катодтың мәні бойынша шектелген, тіпті егер $Ko = \infty$ болған жағдайда да. $Ko = 0.04$ және $Ko = 0.57$ қатынасында болғанда ол 0.1 және 1-ге тең.

4.5 Тәжірибелік деректермен салыстыру

Эксперименттік деректерді Р.Холм және И. Дитрих [2] жағдайында Pt түйіспелері үшін алды:

$$\begin{aligned}I &= 10A, \quad f = 0.5 \cdot 10^{-5} m, \quad \lambda = 60W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}, \\ \rho &= 9.5 \cdot 10^{-7} Ohm \cdot m, \quad \sigma_f = 1.3 \cdot 10^{-12} Ohm \cdot m^2\end{aligned}$$

Пленкадағы температураның айырмашылығы $\theta_f = 176^\circ C$ болды. (4.30) - (4.35) формулалар келесіні береді.

$$\theta_J = 2000^\circ C, \quad \theta_k = 1770^\circ C, \quad \varepsilon = 7.34, \quad Ko = 0.177$$

$$\theta_1(0,0) = 2780^\circ C, \theta_2(0,0) = 2970^\circ C, \theta_f = 190^\circ C$$

Теориялық және эксперименттік деректердің сәйкестігі қанағаттанарлық екенін көруге болады.

Байқалғандай, қазіргі кездегі туннельдік қызулар көп болмайды. Өкінішке орай, әдебиетте әлі де температуралық өлшемдерге қатысты басқа да эксперименталдық деректер жоқ. Алайда, пленка қарсылығының өлшенген мәндері туралы ақпарат, кіші түйіспелі кедергісі бар төменгі ток (көп жағдайда төменгі ток) кезінде Кохлер әсерін түйіспелі жылытуда негізгі рөл атқаруы мүмкін деген қорытынды жасауға мүмкіндік береді.

1-кестеде (1 - 4 бағандар) Au контактілері үшін түйіспелі кедергісінің өлшенген мәндері үшін эксперименттік деректер келтірілген, және өлшемдердің тиісті есептік мәндері (5-ші баған) Ko критерийі төмен тогы кезінде (төменгі кедергіге сәйкес) туннельдік жылудың Joule үлкен мәні екенін қорытындылайды.

2-кесте. Кедергінің тарылуға тәуелділігі R_c пленка кедергісі R_f , және $Ko - N$ түйіспелі күштің критерийі.

N $10^{-3} kg$	σ_f $10^{-13} Ohm \cdot m^2$	R_c $10^{-4} Ohm$	R_f $10^{-4} Ohm$	Ko
400	8.6	1.16	0.28	0.24
35	5.0	3.94	1.86	0.47
11	6.1	7.0	7.2	1.08
1.15	4.6	22.0	52.0	2.36

Кольер эффектiсi стационарлық емес әрекеттердi сыни уақытқа дейiн көрсетедi. Жоғарыда көрсетiлген кестеден анодтың температурасы жұқа пленка арқылы өтетiн катодты туннель әсерiнен де жоғары екенiн көруге болады. Уақытты көбейту уақытша және стационарлық температурада қолданылады. Жұқа пленкадағы өте төмен қарсылықта температура мәні екі жағдайда да бiрдей. Бiрақ, жұқа пленканың кедергiсi арасындағы айырмашылықтың артуына уақытша және стационарлық температураның өсуi алып келедi. Тиiмдiлiктi арттыру үшiн (N1) радиусты байланыс температурасы пленка бойынша артады және төменде әртүрлi жүктемедегi ток (N1) шегiне ие болады.

Металл-Аи

1) $N_1 = 1.15 \times 10^{-3}$ кг

$$10^{-3} \leq I < 0.1$$

2) $N_1 = 11 \times 10^{-3}$ кг

$$10^{-3} < I \leq 0.1$$

3) $N_1 = 35 \times 10^{-3}$ кг

$$10^{-3} < I < 1$$

4) $N_1 = 400 \times 10^{-3}$ кг

$$10^{-2} < I \leq 1$$

Металл -Cu

1) $N_1 = 35 \times 10^{-3}$ кг

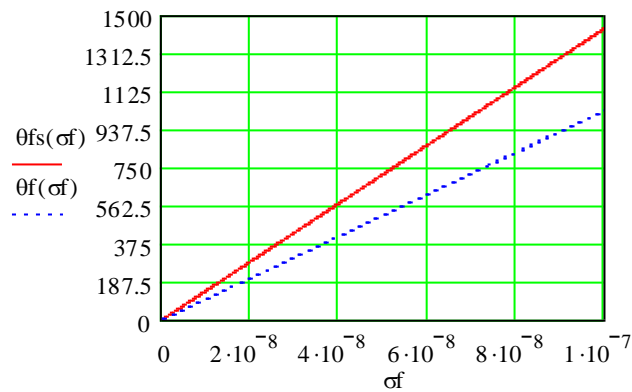
$$10^{-2} < I \leq 0.1$$

Металл -Ni

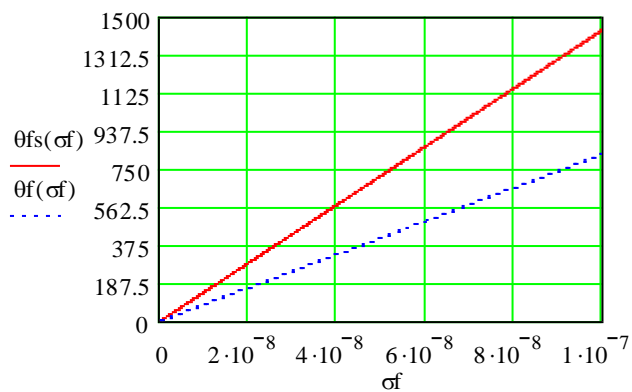
1) $N_1 = 35 \times 10^{-3}$ кгш

$$0.004 < I \leq 0.03$$

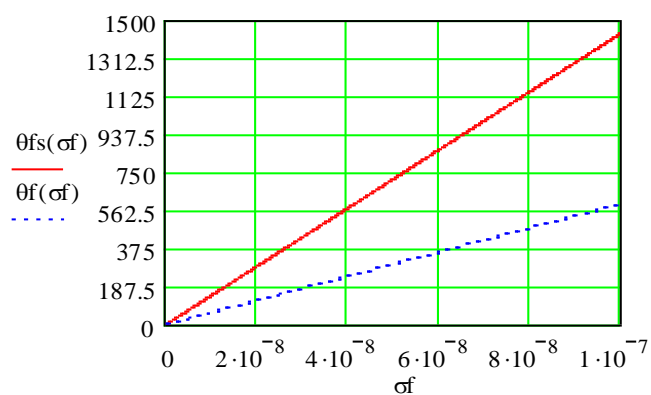
Жүктеме $N_1 = 400 \times 10^{-3}$, ток $I = 1$ А, $r_0 = 1.784 \times 10^{-5}$



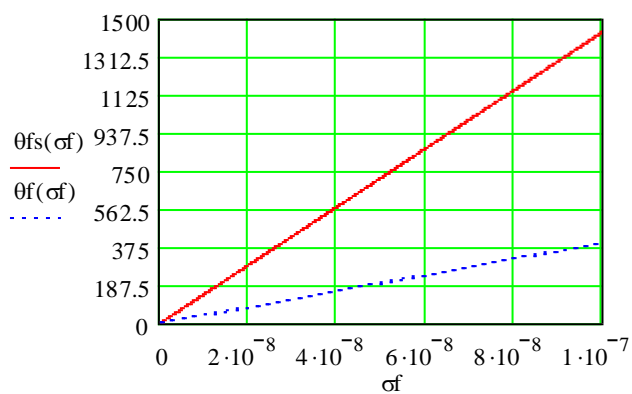
8- сурет. $\tau = 10$



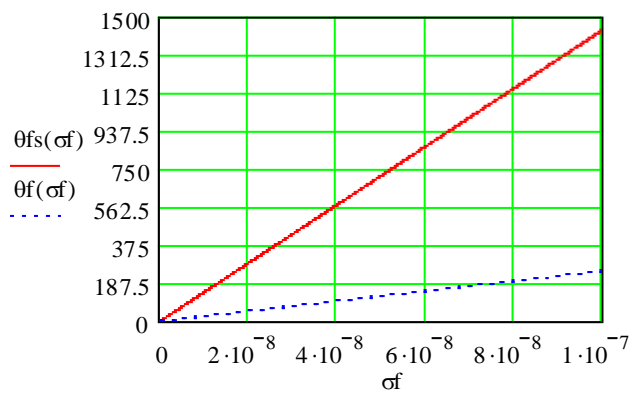
9- сурет. $\tau = 1$



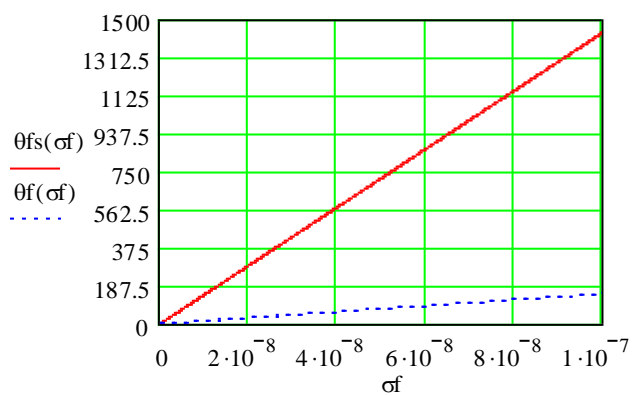
10- сурет. $\tau = 0.1$



11- сурет. $\tau = 0.01$



12- сурет. $\tau = 0.001$



13- сурет. $\tau = 0.0001$

Қорытынды

Зерттеу нәтижелері бойынша қысқаша қорытындылар:

1. Мінсіз квази-металлик электрлік түйіспенің математикалық моделі түйіспе орнының ортасындағы температураны аналитикалық түрде есептеуге мүмкіндік береді.
2. Джоуль және туннельдік компоненттер электродтардың температура өрісіне түйіспелі жылуды салыстыру үшін жаңа Кольер критерийі енгізілді.
3. Төмен және өте төмен ток диапазонында Кольер әсерінен түйіспелі қызып кетуі Джоуль қызып кету әсерінен әлдеқайда көп болуы мүмкін.

Қойылған міндеттерді шешу толықтығын бағалау:

Алынған нәтижелер қойылған мақсаттар мен міндеттерді толықтай қамти алады.

Нәтижелерін нақты қолдану бойынша ұсынымдар мен бағдарларын дамыту:

Берілген жұмыстағы алынған нәтижелер басқа сандық зерттеулер кезінде салыстырулар үшін қолданыла алады.

Іске асырудың техникалық және экономикалық тиімділігін бағалау:

Берілген жұмыс бойынша алынған нәтижелер өте аз ток диапазоны кезінде жаңа электротүйіспелі құрылғылар жүйесін жасауда қолданысқа ие бола алады.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. R. Holm, *Electric Contacts. Theory and Application*, Fourth Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1981
2. J.B. Greenwood, Constriction Resistance and Real Area of Contact, *British Journal of Applied Physics*, 17, pp.1621-1630, 1966
3. R. Malucci, Multi-spot Model of Contacts Based on Surface Features, *Proc. 15th ICEC*, Montreal, pp. 625-634, 1990
4. J.A. Greenwood and J.B.P. Williamson, Contact of Nominally Flat Surfaces, *Proc. Royal Soc., London*, A295, pp. 300-319, 1966
5. M.D. Bryant, Time-wise Increase in Contact Resistance due to Surface Roughness and Corrosion, , *Proc. 15th ICEC*, Montreal, pp. 635-645, 1990
6. M.T. Singer and K. Kshonze, Electrical Resistance of Random Rough Contacting Surface using Fractal Surface Modeling, *Proc. Holm Conf.*, Chicago, pp. 735-81, 1991
7. R.A. Burton and R.G. Burton, Cooperative Interaction of Asperities in the Thermo-tribology of Sliding Contacts , *Proc. 15th ICEC*, Montreal, pp. 256-258, 1990
8. I. Minowa et al., Film Resistance and Constriction Effect, *Proc. Int. Conf. on Electric Contacts and Electromechanical Components, Beijing*, pp. 13-22, 1989
9. W. Gruszczynski, The Computer Model of Contact Resistance, *Proc. Int. Conf. on Electric Contacts and Electromechanical Components, Beijing*, pp. 33-28, 1989
10. R. Jackson, Electrical Performance of Aluminum/Copper Bolted Joints, *Proc. Iee*, vol. 120, pp. 177-183, 1982
11. N. Bond, Aluminum Contact Surface in Electrical Transition Interfaces, *IEEE Trans., PMP-9*, pp.104-110, 1969
12. N.E. Lyssov, Welding of Closed Single-point and Flat Contacts, *Electrotechnika, №4, 1964*, pp. 27-30 (rus)
13. E.Ya. Blui, Yu.A. Mikhailov, R.Ya. Ozols, Heat- and Mass Transfer in Magnetic Field, *Zinatne Ed., Riga, 1980*, p. 355 (rus.)
14. G.N. Alexandrov, Theory of Electrical Apparatus. *Vyschaya Shkola Ed., Moscow, 1985*(rus.)
15. I.S. Taev, Electrical Contacts and Arc-Suppressing Devices, *Energiya, Moscow, 1985* (rus.)
16. S.G. Kalashnikov, Electricity, 3rd Ed., *Nauka, Moscow 1985*(rus.)
17. I.V. Kochergin, Welding by pressure, *Mashinostroyenie Ed., Leningrad, 1972*, (rus.)
18. S.N. Kharin, H. Nouri, T. Davies, "Influence of Inductance on the Arc Evolution in AgMeO Electrical Contacts", *Proc. 48th IEEE Holm Conf. On Electrical Contacts, Orlando, USA, 2002*, pp. 108-119
19. S.N. Kharin, Temperature Displacement in Electrical Contacts due to Kohler and Thomson effects", *Proc. 9th International Conference on Switching Arc Phenomena (SAP-2001), Lodz, Poland, 2001*, pp. 190-195

20. S.N. Kharin, S. Kassabek, The Role of Thomson and Kohler Effects in Bridge Erosion of Electrical Contacts, Computational Technologies (Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk), V.20 №3 (86), 2015, pp. 171-178
21. K.K. Namitokov, Electrical Erosion Phenomena, *Energiya, Moscow, 1978 (rus.)*
22. I.K. Kikoin, The Tables of Physical Quantities, *Atomizdat, Moscow, 1976 (rus.)*
23. J. Cooke, C. Tranter, Dual Fourier- Bessel series, *Quart. J. Mech. And Appl. Math.*, v.25, №2, 1972, pp. 247-263
24. S.N. Kharin, H. Nouri, T. Davies ,“ The Mathematical Models of Welding Dynamics in Closed and Switching Electrical Contacts”, Proc. 49th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts, Washington, USA, 2003, pp. 107- 123
25. Kharin S.N. Mathematical models of phenomena in electrical contacts: Monograph . / A.P. Ershov Institute of Informatics system , Siberian Branch of RAS, 2017. 193 p. 6-11