

Министерство образования и науки Республики Казахстан
Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Вычисление функции давления в многосвязных областях

Диссертационная работа

Специальность 6М070500 - «Математическое и компьютерное моделирование»

Алматы 2018

РЕЗЮМЕ

Настоящая диссертационная работа содержит 62 страниц, 13 рисунков, заключение и список литературы, состоящий из 60 наименований.

Ключевые слова: многосвязная область, фильтрация, нелокальные краевые условия, скважина, дебит скважины, совместная разработка, двухсвязная область, мощность пласта, сетка скважин, численное решение, метод конечных разностей, аналитическое решение.

В первой главе диссертационной работы рассказывается о фильтрации и о скорости фильтрации, рассмотрен закон Дарси для однофазной фильтрации жидкости и уравнение неразрывности однофазной жидкости.

Во второй главе диссертационной работы выведено уравнение пьезопроводности декартовой и полярной координатных систем на основе закона сохранения массы жидкости.

В третьей главе разработана математическая постановка задачи фильтрации несжимаемой жидкости.

Четвертая глава посвящена доказательству единственности решения задачи фильтрации жидкости с граничным условием второго рода.

В пятой главе рассмотрен численный метод решения задачи фильтрации несжимаемой жидкости с граничным условием второго рода.

В шестой главе приведено численное конечно-разностное решение определения давления многосвязной области, исследуется задача фильтрации нахождения давления с нелокальным краевым условием.

Седьмая глава посвящена построению математической модели фильтрации несжимаемой жидкости при совместной разработке пластов. Полученные результаты методом конечных разностей сравниваются с точным решением.

В восьмой главе представлена программа вычислительного алгоритма расчетов, которая реализована на алгоритмическом языке C++.

Целью работы является численное исследование консервативной конечно-разностной схемы решения задачи несжимаемой фильтрации жидкости в одно- и двухслойных пластах. В случае разработки однослойного пласта системой скважины с заданными забойными давлениями непосредственно построить разностную схему не представляется возможным. В связи с этим в работе строится консервативная разностная схема с учетом поправочных коэффициентов.

В ходе работы построено особое разностное уравнение, отражающее характер изменения искомой функции в окрестности скважины и аппроксимирующее исходное дифференциальное уравнение с погрешностью, зависящей от производных не самой функции, а второстепенных членов ее разложения в окрестности скважины.

ТҮЙІН

Диссертациялық жұмыс 62 беттен, 13 суреттен және 60 әдебиет тізімінен тұрады.

Кілттік сөздер: көп түйіліскен аймақ, қысымдық функциясы, сүзгілеу, шекаралық шарттары, бұрғылау, соңғы айырмашылық әдісі, екі қосылым аймағы, тақтайдың қалыңдығы, сетка скважин, сандық есептеу, аналитикалық есептеу.

Диссертациялық жұмыстың бірінші тарауында сүзгілеу және сүзу жылдамдығы, бір фазалық сұйық сүзу үшін Дарси заңы және бір фазалық сұйықтықтың үздіксіздік теңдеуі туралы айтылған.

Диссертациялық жұмыстың екінші тарауында декарт және полярлы координат жүйелерінің пьезоэлектрлік өткізгіштігінің теңдеуі сұйықтықтың массасын сақтау заңы негізінде анықталады.

Үшінші тарау сығылмайтын сұйықтықты сүзу мәселесінің математикалық қойылымы әзірленді.

Төртінші тарау сұйықтықтың екінші түрдегі шекаралық күйі бар сүзу мәселесінің шешімінің бірегейлігін дәлелдеуге арналған.

Бесінші тарауда сығылмайтын сұйықтықты сүзу мәселесін шешудің сандық әдісі екінші түрдегі шекаралық жағдаймен қарастырылған.

Алтыншы тарауда көбінесе байланыстырылған аймақтың қысымын анықтау үшін сандық түпкілікті-айырымдық шешім қарастырылған және нелокальды шекаралас жағдайға қысымның пайда болуы мәселесі зерттеледі.

Жетінші тарау пластиктің бірлескен дамуында сығылмайтын сұйықтықты сүзу үшін математикалық модельдің құрылысына арналған. Түпкілікті айырмашылық әдісімен алынған нәтижелер дәл шешіммен саластырынады.

Сегізінші тарауда $C++$ алгоритмдік тілінде жүзеге асырылатын есептеулерді есептеу алгоритмі бағдарламасы ұсынылған.

Жұмыстың мақсаты - бір және екі қабатты құрылымдарда сығылмайтын сұйықтықты сүзу мәселесін шешу үшін консервативті түпкілікті айырмашылық схемасын сандық зерттеу. Бір қабатты түзілуді дамыған жағдайда, ұңғымалық жүйе арқылы алдын-ала белгіленген төменгі қысымды қысыммен бөлшектеу сызбасын тікелей салу мүмкін емес. Осыған байланысты түзету коэффициенттерін есепке ала отырып, жұмыс барысында консервативті айырмашылық схемасы құрылады.

Жүргізілген жұмыстар барысында кеңейтудің қайталама терминдеріне қарағанда, функцияның туындыларына байланысты қателіктермен ұңғыма маңында қалаған функцияның өзгеру сипатын көрсететін және бастапқы дифференциалдық теңдеуді жақындататын ерекше айырмашылық теңдеуі құрылады.

SUMMARY

This dissertation work contains 62 pages, 13 figures and a list of literature consisting of 60 titles.

Key words: multiply connected domain, filtration, non-metallic boundary conditions, well, production rate, joint development, two-connected domain, plate thickness, net of wells, numerical solution, finite-difference method, analytical solution.

In the first chapter of the dissertation work, it talks about filtration and the rate of filtration, the Darcy law for single-phase liquid filtration is considered.

The second chapter of the thesis is devoted to the derivation of the equation of piezoelectric conductivity.

The third chapter developed a mathematical design of the problem of filtering an incompressible fluid.

The fourth chapter is devoted to proving the uniqueness of the solution of the problem of filtration of a liquid with a boundary condition of the second kind.

In the fifth chapter, a numerical method for solving the problem of filtering an incompressible fluid with a boundary condition of the second kind is considered.

In the sixth chapter, a numerical finite-difference solution is given for determining the pressure of a multiply connected domain; the problem of filtration of the occurrence of a pressure with a nonlocal boundary condition.

The seventh chapter is devoted to the construction of a mathematical model for the filtration of an incompressible fluid in the joint development of plastics. The results obtained by the finite-difference method are matched with the exact solution.

In the eighth chapter, the program of the computational calculation algorithm is presented, which is implemented in the algorithmic C ++ language using the mpich2.

The aim of the paper is to numerically study a conservative finite-difference scheme for solving the incompressible fluid filtration problem in single- and double-layer formations. In the case of the development of a single-layer formation, it is not possible to directly construct a disassembly scheme by a well system with predetermined bottomhole pressures. In this connection, a conservative difference scheme is constructed in the work with allowance for the correction coefficients.

In the course of the work, a special difference equation is constructed reflecting the nature of the change in the unknown function in the vicinity of the well and approximating the original differential equation with an error that depends on the derivatives of the function itself rather than the secondary terms of its expansion in the vicinity of the well.

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ	6
ОПРЕДЕЛЕНИЯ	7
ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	8
ВВЕДЕНИЕ.....	10
1 ЗАКОН ДАРСИ ДЛЯ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ.....	12
1.1 Общие сведения.....	12
1.2 Скорость фильтрации.....	12
2 ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПЬЕЗОПРОВОДНОСТИ.....	18
3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ.....	21
4 ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА	23
5 ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА.....	25
6 ЧИСЛЕННОЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ.....	30
7 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ СОВМЕСТНОЙ РАЗРАБОТКЕ ПЛАСТОВ.....	33
7.1 Введение.....	33
7.2 Математическая модель фильтрации жидкости в двухслойных пластах.....	34
7.3 Аналитическое решение задачи.....	35
7.4 Численное решение задачи методом конечных разностей.....	37
7.4 Метод Писмена-Рекфорда для решения задачи.....	39
7.6 Результаты.....	42
8 РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА РАСЧЕТОВ НА ЯЗЫКЕ C++.....	44
8.1 Язык программирования C++.....	44
8.2 Программный код.....	45
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	57
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	59

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

1. Закон Республики Казахстан «О науке» (№319 – III, 27.07.2007).
2. Закон Республики Казахстан «О науке»
3. «ГОСО РК 5.04.033 – 2011. Послевузовское образование. Магистратура».
4. «Положение о магистерской диссертации» (утвержденного на заседании научно – методического совета КазНУ протоколом №3 от 17.02.2012г.)

В настоящей диссертации применяют следующие термины с соответствующими определениями:

фильтрация – движение жидкостей, газов и их смесей через твердые тела (вообще говоря, деформируемые) по связанным между собой порам или трещинам;

дебит скважины – объём продукции, добываемой из скважины за единицу времени (секунду, сутки, час и др.), может характеризовать добычу нефти, газа, газоконденсата, воды;

породы-коллекторы – горные породы, которые могут служить вместилищем нефти и газа и в то же время отдавать их при разработке;

мощность пласта – кратчайшее расстояние между кровлей и подошвой пласта; суммарная мощность нефте- или газонасыщенных прослоев в пласте, способных отдавать нефть или газ;

численное решение – приближённое определение корней уравнения или системы уравнений, применяется в случаях, когда точный метод решения неизвестен или трудоёмок;

метод конечных разностей – численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на замене производных разностными схемами;

k_1 - проницаемость первого пласта пористой среды.
 k_2 - проницаемость второго пласта пористой среды.
 H - толщина второго пласта пористой среды.
 h - толщина первого пласта пористой среды.
 L - длина двухслойных замкнутых пластов.
 K -коэффициент проницаемости.
 μ - коэффициент вязкости
 β_c -коэффициент сжимаемости в пористой среде.
 $\beta_{ж}$ -коэффициент сжимаемости жидкости.
 β^* -коэффициент вместимости упругого пласта
 ρ -давление
 X -коэффициент пьезопроводности
 q_0 - количество жидкости,вытекающего из хорошо проницаемого пласта.
 sq_c - общее количество жидкости,вытекающего из хорошо проницаемого пласта
 sq_t - количество жидкости, притекающее из плохо проницаемого пласта в хорошо проницаемый пласт
 sq_1 - количество жидкости, учитывающееся при притоке из - вне
 m - пористость среды
 p - изменение давления первого пласта пористой среды
 P_1 - изменение давления второго пласта пористой среды
 C_u - численное решение
 I_u - интегральное решение
 C_μ -константа
 ρ - плотность
 k - кинетическая энергия турбулентности
 x_i - координата в i направлении
 u_i - компонент скорости в i направлении
 Y_i - концентрация вещества i
 D_i - диффузионный коэффициент вещества i

T - температура

μ - ламинарная вязкость

μ_t - турбулентная вязкость

$\delta_k = 1, \delta_\varepsilon = 1.3$ - турбулентное число Прандтля для k и ε соответственно

G_k - генерация кинетической энергии турбулентности из-за средних градиентов скорости

S – модуль средней скорости тензора напряжений

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена актуальной на сегодняшний день проблеме – созданию экономически эффективной технологии совместной разработки нескольких пластов. Предложено численное решение модели определения давления несжимаемой жидкости, когда известен суммарный дебит при одновременной совместной разработке нескольких изолированных между собой пластов методом конечных разностей. Построены специальные разностные уравнения в окрестности внутренних границ, позволяющие применить интегро-интерполяционный метод в двухсвязной области. На основе проведенного исследования поставленной задачи получены численные результаты на языке программирования C++ и графики модели на TЕСPLOT для двухслойного пласта. Также найдено аналитическое решение данной задачи для двух пластов и сделан сравнительный анализ полученных результатов.

Получено аналитическое и численное решение задачи с нелокальным граничным условием при совместной разработке двухслойных пластов. Научная новизна работы заключается в исследовании нескольких пластов путем одновременного отбора пластовой жидкости единой сеткой скважины. Метод решения и анализ полученных результатов будут интересны специалистам в области разработки нефтяных месторождений.

Из численных методов для решения краевых задач эллиптического дифференциального оператора, описывающих природные процессы, наиболее часто в приложениях используются методы Зейделя и последовательной верхней релаксации, как простые в реализации и дающие удовлетворительные результаты. Возможность выбора алгоритма, используемого при численном моделировании той или иной физической задачи, является объем вычислительной работы, который требуется для его реализации. К недостаткам вышеназванных методов относится медленная сходимость при большом числе узлов сетки. В таких случаях применяют другие численные методы (часто в сочетании с названными методами), имеющие большую скорость сходимости, например, градиентные методы. К числу более “быстрых” численных методов относится многосеточный метод. С теоретической точки зрения многосеточный метод асимптотически оптимален, т. е. количество итераций для достижения заданной точности в нем не зависит от размера сетки. Родоначальником многосеточной технологии можно считать Р. П. Федоренко. Его первые исследования по данной теме относятся к началу 60-х годов прошлого века. Однако эти исследования значительно опередили свое время, - маломощная вычислительная техника того времени не позволяла обрабатывать такие сетки, на которых этот метод наиболее эффективен. Настоящий “бум” многосеточной технологии можно отнести к 80-90-м годам, когда достаточные размеры оперативной памяти позволили полностью оценить его преимущества. Применение параллельных алгоритмов к многосеточному методу уменьшает объем вычислительной работы. Итак, параллельный алгоритм многосеточного метода является довольно эффективным для решения краевых задач эллиптического дифференциального оператора, что и исследуется в данной работе. В настоящее время многосеточные алгоритмы эффективно применяются для решения задач динамики плазмы и гидродинамики, для расчета нейтронных

полей в ядерном энергетическом реакторе, для решения задач теории тепло и массопереноса и ряда других задач.

1. ЗАКОН ДАРСИ ДЛЯ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

1.1 Общие сведения

Нефть и природные газы заключены в недрах Земли. Скопление их теснейшим образом связаны с вмещающими горными породами, а также со структурными и другими особенностями пластов. Горные породы, которые могут служить вместилищем нефти и газа и в то же время отдавать их при разработке, называются породами-коллекторами.

Природные жидкости (нефть, газ, подземные воды) находятся в основном в пустотах – порах и трещинах осадочных горных пород. Их движение происходит либо вследствие естественных процессов (миграция углеводородов), либо в результате деятельности человека, связанной с извлечением полезных ископаемых и эксплуатацией гидротехнических сооружений. Движение жидкостей, газов и их смесей через твердые тела (вообще говоря, деформируемые) по связанным между собой порам или трещинам называется фильтрацией. [16]

1.2 Скорость фильтрации

Основной характеристикой фильтрационного движения является вектор скорости фильтрации $\vec{\omega}$, который определяется следующим образом. Выберем произвольную точку M пористого пласта, через который фильтруется жидкость, и проведем через нее элементарную площадку $\Delta\omega$ (Рис. 1). Через выделенную площадку в единицу времени протекает масса жидкости ΔQ_m (элементарный массовый расход). Тогда проекция вектора $\vec{\omega}$ на нормаль \vec{n} к выделенной площадке

$$\omega_n = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_m}{\rho \Delta\omega}, \quad (1.1)$$

где ρ - плотность жидкости.

Подчеркнем, что массовый расход в (1.1) делится на полную площадь $\Delta\omega$, а не на ее часть, занятую порами. Поэтому очевидно, что скорость фильтрации не является действительной средней скоростью движения в живом сечении фильтрационного потока. Согласно (1.1), скорость фильтрации ω имеет размерность скорости (м/с в СИ) и обладает свойствами вектора. [21]

Установим связь между скоростью фильтрации $\vec{\omega}$ и действительной средней скоростью \vec{v} движения. Действительное (физическое) течение флюида в каждом живом сечении пласта $\Delta\omega$ осуществляется через суммарную площадь активных пор $\Delta\omega_n$. поэтому имеем

$$v_n = \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_m}{\rho \Delta\omega_n}.$$

Сравнивая последнее равенство с (1.1), используя равенство

$$n = \frac{\omega_n}{\omega}, m = \frac{V_n}{V}$$

где n – коэффициент просветности, m – коэффициент пористости V_n – объем пор, находим

$$\omega_n = m v_n. \quad (1.2)$$

Поскольку $0 < m < 1$, из (1.2) следует, что скорость фильтрации ω меньше действительной средней скорости v течения флюида. [42]

Таким образом, при введении скорости фильтрации рассматривается некоторый фиктивный фильтрационный поток, в котором расходы через любое сечение равны реальному расходу флюида, поля давлений фиктивного и реального потока идентичны, а сила сопротивления фиктивного потока равна реальной силе сопротивления. [8] При этом принимается, что скорость фильтрации непрерывно распределена по объему и связана со средней скоростью действительного движения равенством (1.2).

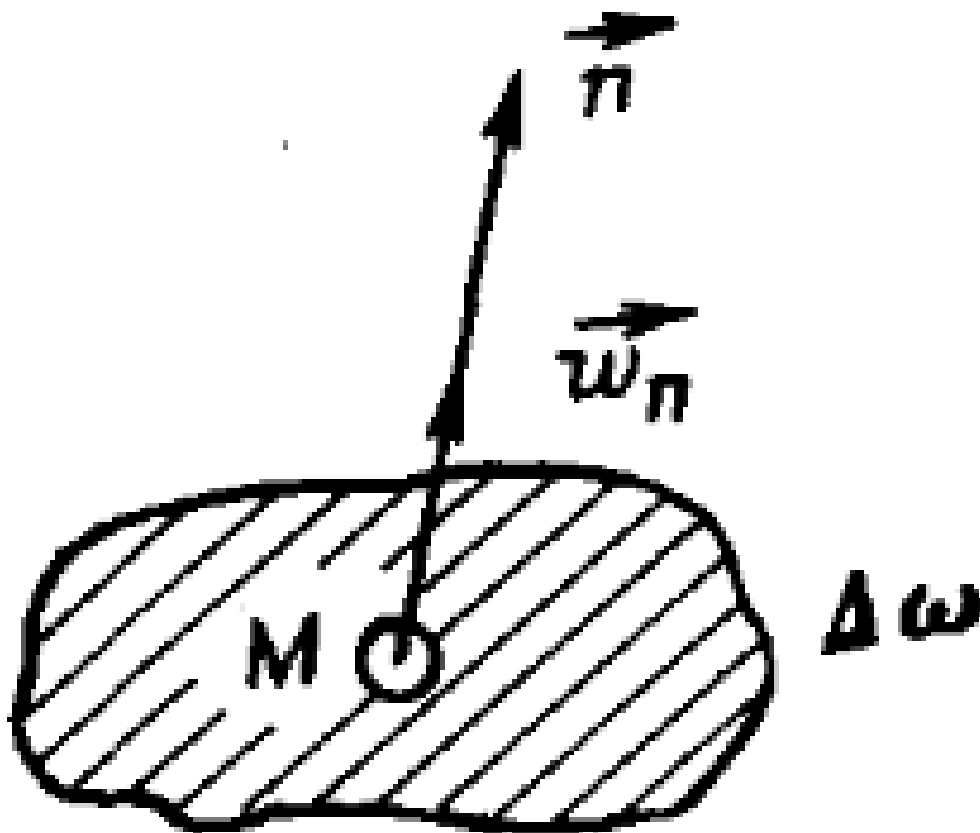


Рис. 1 Элементарная площадка пористого пласта.

Основное соотношение теории фильтрации – закон фильтрации – устанавливает связь между вектором скорости фильтрации и тем полем давления, которое вызывает фильтрационное течение. Первые экспериментальные наблюдения за движением воды в трубах, заполненных песком, провели французские инженеры Дарси (1856 г.) и Дюпюи (1848-1863 гг.). Этими работами было положено начало теории фильтрации. Именем Дарси назван линейный закон фильтрации, который он установил, создавая первую совершенную систему водоснабжения в Европе. Анри Дарси исследовал течение воды через вертикальные песчаные фильтры (Рис. 2), что требовалось для нужд водоснабжения г. Дижона. [24]

В результате тщательно проведенных экспериментов он установил свою, получившую широкую известность, экспериментальную формулу:

$$Q = k_{\phi} \frac{H_1 - H_2}{L} \Omega = k_{\phi} \frac{\Delta H}{L} \Omega \quad (1.3)$$

где Q – объемный расход жидкости через песчаный фильтр, длина которого L , а площадь поперечного сечения Ω ; $\Delta H = H_1 - H_2$ - разность напоров воды над фильтром и у его основания; k_{ϕ} – коэффициент пропорциональности, названный коэффициентом фильтрации, который зависит как от структуры пористой среды, так и от свойств фильтрующейся жидкости.

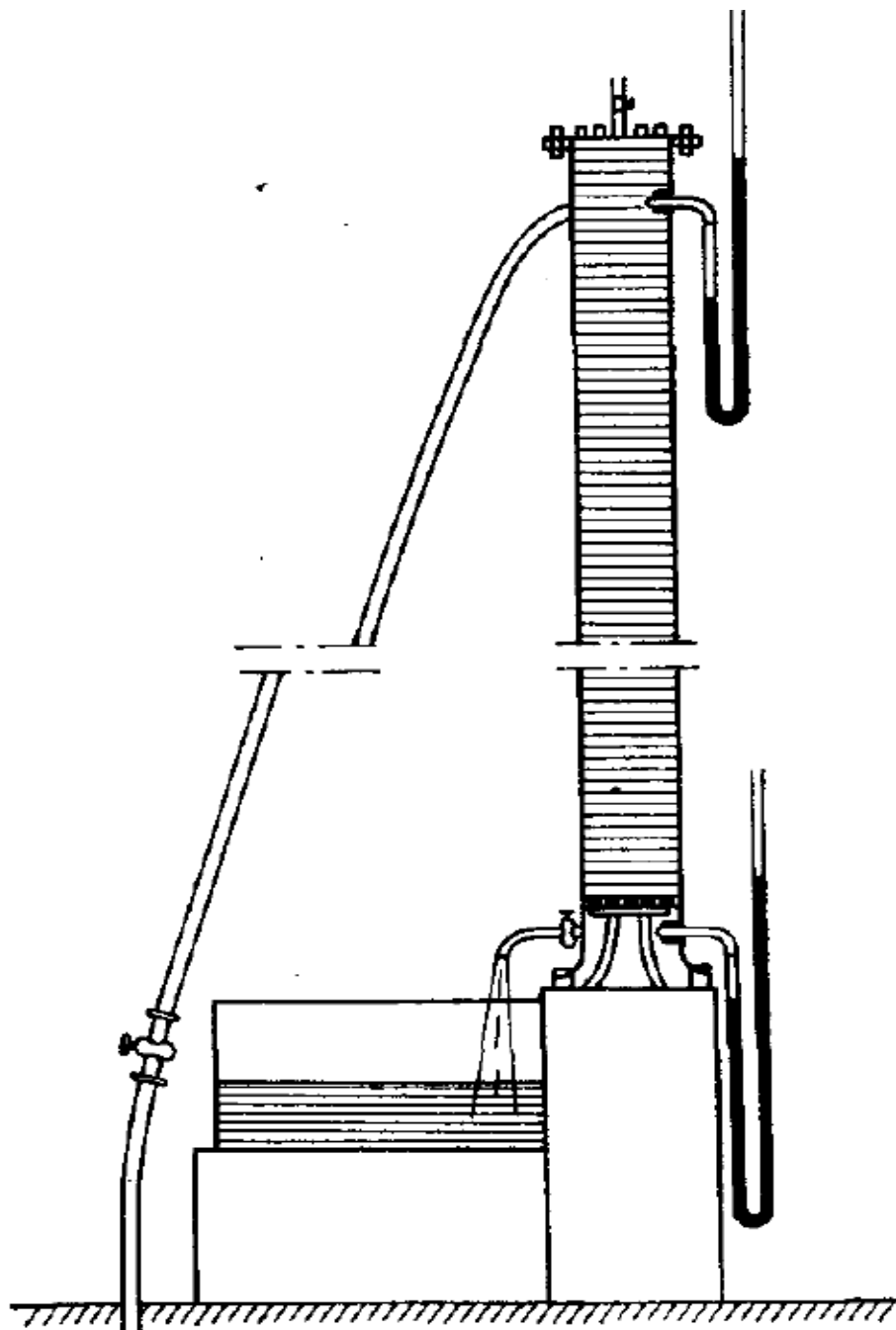


Рис. 2 Установка А. Дарси для исследования течения воды через вертикальные песчаные фильтры.

Этот коэффициент k_f , как следует из (1.3), имеет размерность скорости и характеризует расход потока через единицу площади сечения, перпендикулярного к потоку, под действием единичного градиента напора. [4]

Коэффициент фильтрации k_f используется обычно в гидротехнических расчетах, где приходится иметь дело одной жидкостью – водой. При исследовании фильтрации нефти, газа и их смесей необходимо разделить влияние свойств пористой среды и жидкости. В этом случае формула Дарси (1.3) записывается в несколько ином виде, а именно

$$Q = \frac{k}{\mu} \rho g \frac{\Delta H}{L} \Omega \quad (1.4)$$

или

$$\vec{\omega} = \frac{k \Delta p^*}{\mu L} \quad (1.5)$$

где μ - динамический коэффициент вязкости; $p^* = \rho g H = p + \rho g z$ - приведенное давление (очевидно, приведенное давление p^* совпадает с истинным средним давлением p при $z = 0$); k - коэффициент проницаемости, который не зависит от свойств жидкости и является динамической характеристикой только пористой среды. Из (4) следует, что коэффициент проницаемости имеет размерность площади, так что в СИ $[k] = \text{м}^2$. При этом проницаемость большинства горных пород выражается весьма малыми числами. Так, проницаемость крупнозернистых песчаников составляет $10^{-12} - 10^{-13} \text{ м}^2$ ($1 - 0,1 \text{ мкм}^2$), проницаемость плотных песчаников - около $10^{-14} - 10^{-15} \text{ м}^2$ ($0,01 - 0,001 \text{ мкм}^2$). [51]

Из сравнения (1.3) и (1.4) находим связь между коэффициентами фильтрации k_ϕ и проницаемости k :

$$k_\phi = \frac{k}{\mu} \rho g \quad (1.6)$$

Большинство фильтрационных течений, встречающихся на практике, имеет скорости порядка $10^{-4} - 10^{-5} \text{ м/с}$ и менее. Поэтому, пренебрегая скоростным напором $v^2/2g$, под напором можно понимать величину $H = z + p/\rho g$. Тогда закон Дарси в формуле (1.3) или (1.4) можно истолковать как выражение закона сопротивления при фильтрации, который показывает, что между потерей напора ΔH и расходом Q существует линейная зависимость. При этом, поскольку скорость фильтрационного потока мала, силы инерции несущественны. [32]

Коэффициент фильтрации k_ϕ или коэффициент проницаемости k определяют экспериментально при помощи специального прибора - пермеметра, содержащего образец исследуемого грунта (Рис. 3). Общий расход Q фильтрационного потока при этом поддерживается постоянным. Напоры H_1 и H_2 измеряются двумя пьезометрами, соединенными с пористой средой в сечениях 1 и 2. Превышения центров сечений над плоскостью сравнения равны z_1 и z_2 , а давления - p_1 и p_2 соответственно; расстояние между этими сечениями по оси цилиндра составляет L . В соответствии с формулой (3) или (4) имеем

$$k_\phi = \frac{Q}{\Omega(\Delta H/L)} \text{ или } k = \frac{Q\mu}{\Omega\rho g(\Delta H/L)},$$

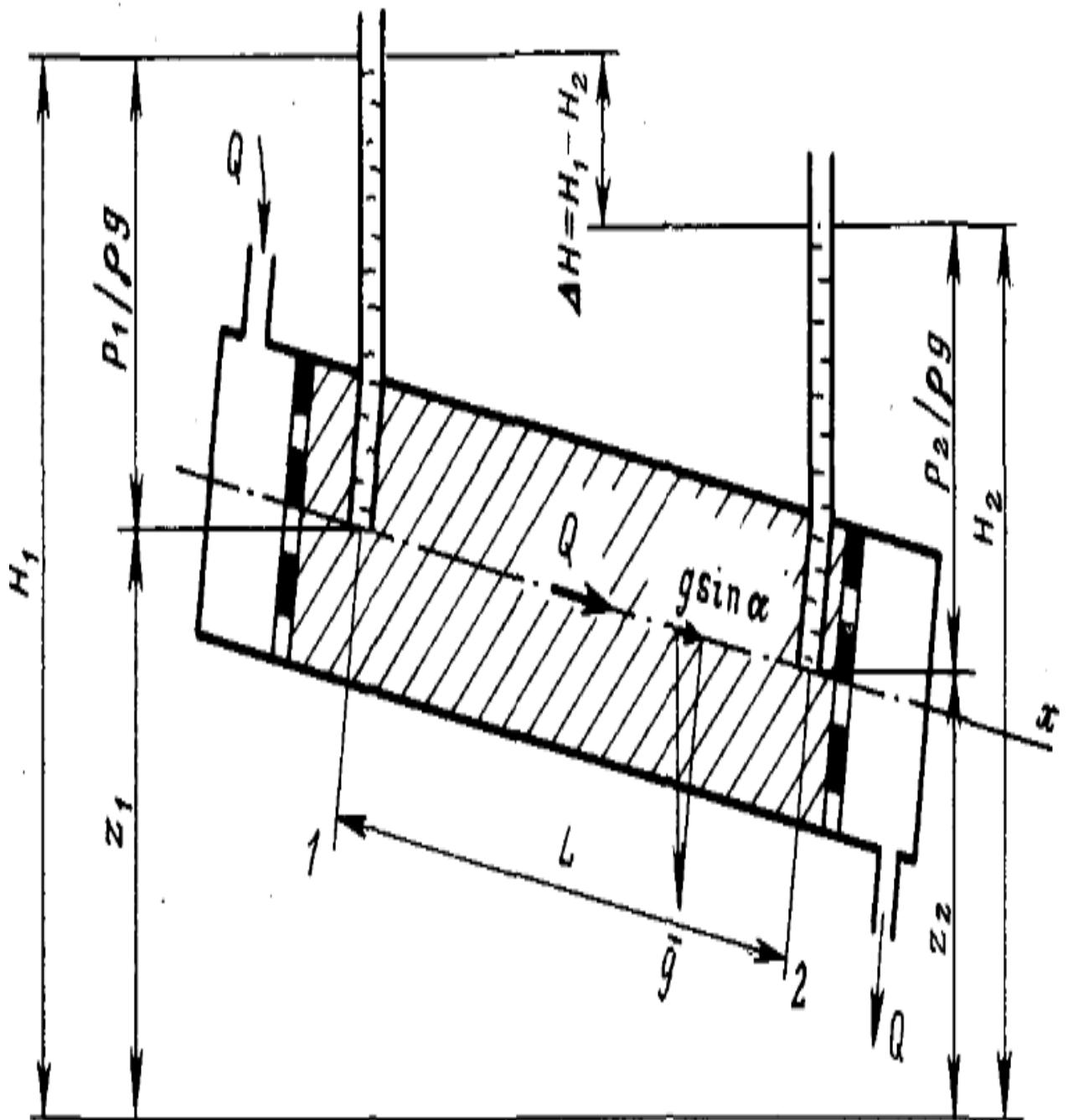


Рис. 3 Схема пермеаметра

где градиент напора можно представить в виде

$$\frac{\Delta H}{L} = \frac{z_1 - z_2}{L} + \frac{p_1 - p_2}{\rho g L} = \frac{p_1^* - p_2^*}{\rho g L}$$

В природных условиях коэффициент проницаемости определяется в результате специального исследования скважин, в котором также используется устанавливаемая в опыте связь между изменением давления в скважинах и их дебитом. [48]

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПЬЕЗОПРОВОДНОСТИ

Выведем уравнение неразрывности (сплошности) фильтрационного потока для однородного сжимаемого флюида в деформируемой пористой среде. Оно представляет собой уравнение баланса массы в элементарном объеме пористой среды. Выделим мысленно в пористой среде, в которой происходит движение флюида, элементарный объем в виде параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz (Рис. 4). Пусть точка M , совпадающая с центром левой грани ab , имеет координаты x, y, z . Тогда точка M' в центре грани $a'b'$ имеет координаты $x + dx, y, z$. Масса флюида, втекающего в объем через грань ab за малый промежуток времени dt записывается в виде

$$(\rho v_x)_{ab} dy dz dt.$$

Отметим, что в силу малости выделенного объема и его граней можно считать, что плотность и скорость фильтрации распределены на гранях ab и $a'b'$ равномерно и равны значениям их в точках M и M' соответственно. [30]

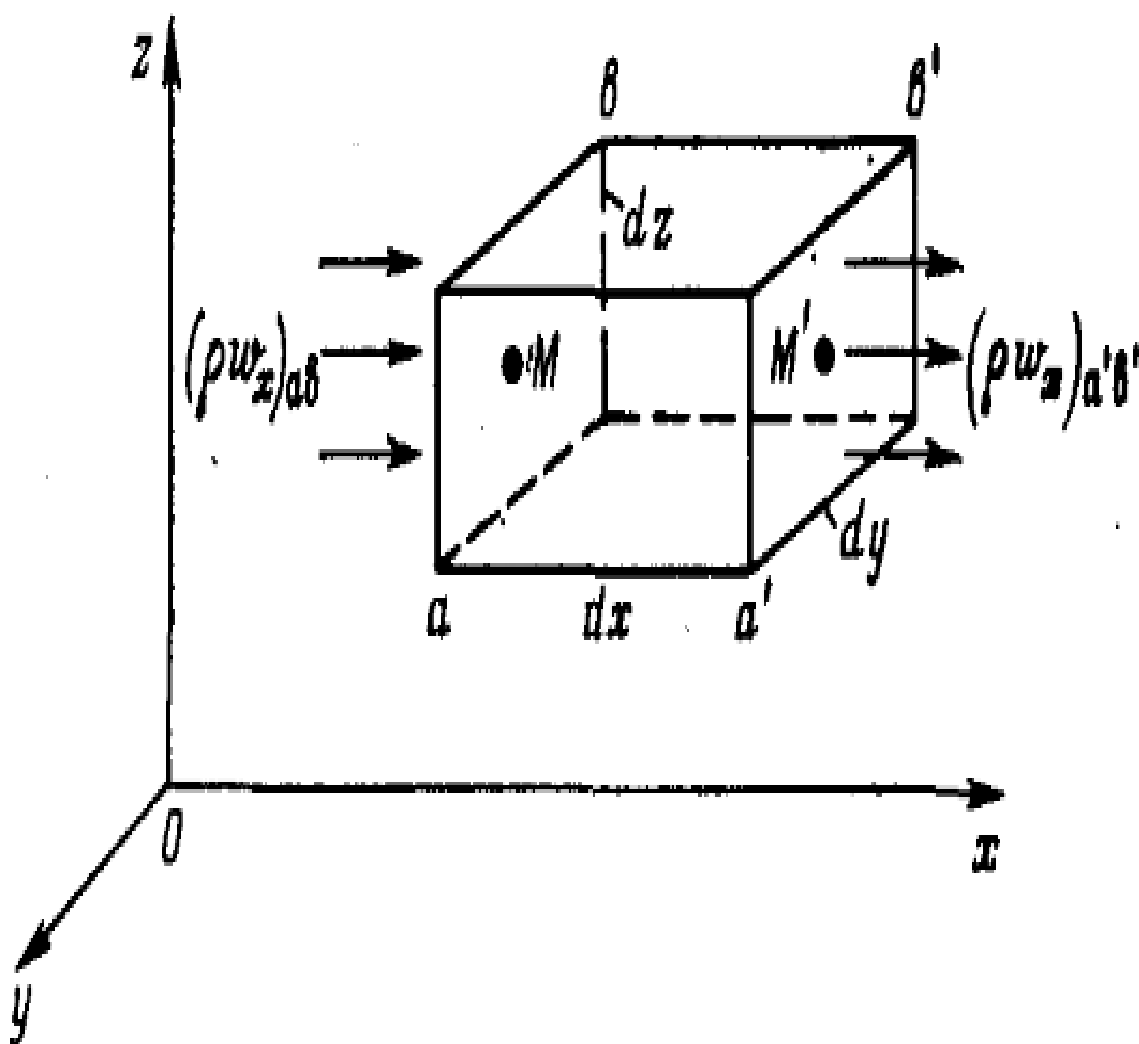


Рис. 4 Схема элемента пласта для вывода уравнения неразрывности, где ω_x – скорость фильтрации

Масса флюида, вытекающая из объема через грань $a'b'$, равна

$$(\rho v_x)_{a'b'} dydzdt.$$

Но так как при переходе от точки M грани ab к точке M' грани $a'b'$ координата x изменилась на малую величину dx , то можно записать

$$(\rho v_x)_{a'b'} = (\rho v_x)_{ab} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx.$$

Тогда изменение массы флюида в объеме $aba'b'$ за промежуток времени dt за счет потока вдоль оси x :

$$[(\rho v_x)_{ab} - (\rho v_x)_{a'b'}] dydzdt = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dydzdt.$$

Рассматривая фильтрацию флюида в направлениях вдоль осей y и z , получим аналогичное выражение для изменения массы в элементарном объеме за счет потока вдоль этих осей в виде

$$-\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz dt \text{ или } -\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dx dy dz dt.$$

Таким образом, общее изменение (накопление) массы в объеме $dx dy dz$ за время dt будет

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt \quad (2.1)$$

С другой стороны, масса флюида, находящегося в рассматриваемом элементарном поровом объеме,

$$M = \rho m dx dy dz,$$

где m – коэффициент пористости пласта.

Изменение массы флюида за промежуток времени dt записывается в следующем виде (объем элемента $dx dy dz$ фиксирован):

$$\frac{\partial M}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} dx dy dz dt \quad (2.2)$$

Приравнивая выражения (2.1 и 2.2) и сокращая их на $dx dy dz dt$, получим уравнение неразрывности:

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} \quad (2.3)$$

Отметим, что уравнение (2.3) справедливо только в том случае, если внутри выделенного элемента породы нет источников или стоков, выделяющих или поглощающих флюид (химических реакций, фазовых превращений и т. д.). [20]

Выражение в левой части уравнения (2.3) представляет собой дивергенцию вектора массовой скорости фильтрации $\rho \vec{v}$ и кратко записывается так:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = \text{div}(\rho \vec{v}) \quad (2.4)$$

Поэтому уравнение (2.3) имеет также следующую запись:

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим изотермическую фильтрацию однородной жидкости в однослойных пластах, вскрытых системой скважин.

Направим ось Oz против силы тяжести и введем функция приведенного пластового давления $p^* = p + \rho gz$. Тогда скорость фильтрации (1.5) преобразуется к виду

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad} p^* \quad (3.1)$$

В дальнейшем звездочку у p^* опустим и под функцией p будем понимать приведенное пластовое давление. Учитывая, что мощность пласта мала по сравнению с его размерами в горизонтальной плоскости и что кровля и подошва пласта непроницаемы, можно предварительно провести все необходимые осреднения параметров пласта по мощности и, таким образом, перейти от пространственных задач к плоским. В этих условиях обычно вместо уравнения неразрывности (2.3) и закона Дарси (1.5) записывается уравнение материального баланса

$$\mathcal{L}_t(\sigma, p) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \beta H \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

где $\sigma = \frac{kH}{\mu} > 0$ - гидропроводность, H – мощность пласта.

При численном решении задачи определения давления главная трудность в применении разностных схем обусловлена наличием нагнетательных и эксплуатационных скважин, работающих или в режиме заданных дебитов, или в режиме заданных забойных давлений. Этим режимам соответствуют разные математические задачи. [11]

В задачах с заданными дебитами обычно освобождаются от внутренних малых границ Γ_k (Рис. 5) путем “стягивания” контура скважины в точку O_k - центр скважины, т. е. скважину заменяют математической точкой-скважиной, в которой находится источник (сток). В этом случае функция p в точке O_k становится неограниченной, а дебит q_k определяется как предел

$$\lim_{l_k \rightarrow 0} \oint_{l_k} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} dl = q_k \quad (3.3)$$

где l_k - некоторый замкнутый контур, охватывающий k -ю скважину, n – внешняя нормаль к l_k .

Такой подход вполне оправдан при фильтрации однородных жидкостей. Однако при двухфазной фильтрации “стягивание” скважины в точку оправдано, вообще говоря, только для нагнетательных скважин, так как в эксплуатационных точках-скважинах после прорыва воды, водонасыщенность s становится

неоднозначной. Но если сохранить границы Γ_k , то оказывается, что задания на них только дебитов скважин недостаточно для единственности решения задачи определения p . Нужны дополнительные условия на контурах Γ_k . Покажем это на задаче определения поля давления при $\beta = 0$.

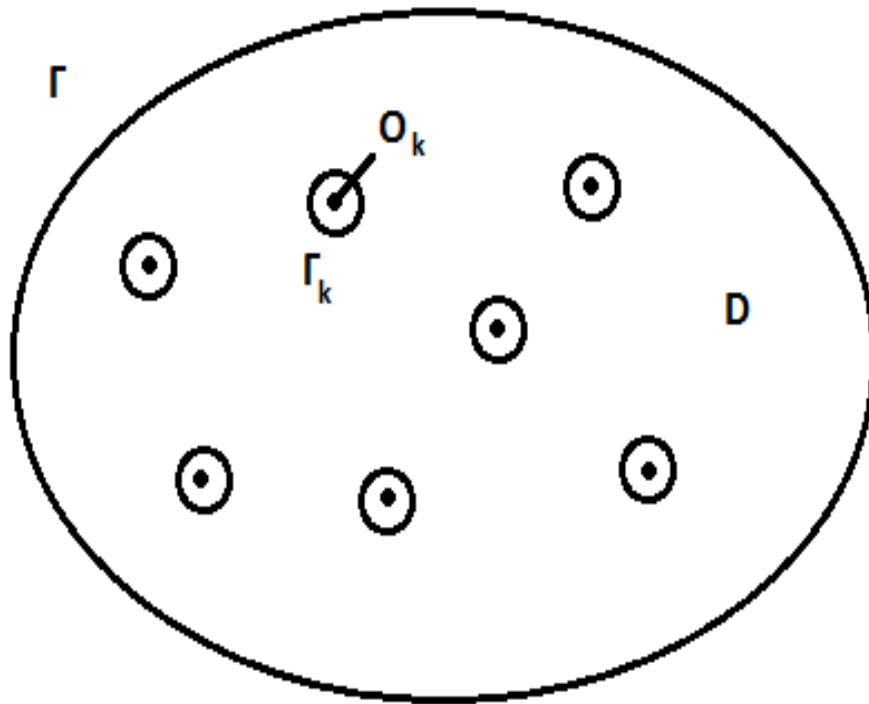


Рис. 5 Вскрытая система скважин.

Сформулируем математическую задачу с дополнительными условиями и докажем ее единственность.

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

Найти непрерывное решение уравнения

$$\mathcal{L}(\sigma, p) = \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} p = 0 \quad (4.1)$$

в $(N + 1)$ -связной области D с границами $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, удовлетворяющее граничным условиям:

$$p = \varphi(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Gamma \quad (4.2)$$

$$\int_{\Gamma_k} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma = q_k \quad (k = \overline{1, N}) \quad (4.3)$$

$$p = c_k \text{ при } (x, y) \in \Gamma_k, (k = \overline{1, N}) \quad (4.4)$$

где $\varphi(x, y)$ - заданная функция, $\frac{\partial p}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к Γ_k ($k = \overline{1, N}$), c_k - некоторые неизвестные постоянные.

Дополнительные условия (4.4) позволяют доказать единственность решения задачи. Пусть имеются два решения p_1 и p_2 , удовлетворяющие условиям (4.1), (4.2), (4.3). Рассмотрим разность их $\varpi = p_1 - p_2$. Очевидно, эта функция будет решением уравнения (4.1) и будет удовлетворять граничным условиям:

$$\varpi = 0 \text{ при } (x, y) \in \Gamma, \int_{\Gamma_k} \sigma \frac{\partial \varpi}{\partial n} d\gamma = 0 \quad (k = \overline{1, N}) \quad (4.5)$$

$$\varpi = c_{1,k} - c_{2,k} = \text{const при } (x, y) \in \Gamma_k (k = \overline{1, N}) \quad (4.6)$$

Из обобщенной формулы Грина

$$\int_G (u \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} v + \sigma \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v) dv = \int_G \sigma u \frac{\partial v}{\partial n} ds,$$

положив $u = v = \varpi$, для функции ϖ , удовлетворяющей уравнению (4.1) в области D с границами $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, следует

$$\int_D \sigma (\operatorname{grad} \varpi)^2 dv = \int_{\Gamma} \sigma \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial n} d\gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \sigma \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial n} d\gamma \quad (4.7)$$

Используя условие (4.6) запишем

$$\int_{\Gamma_k} \sigma \varpi \frac{\partial \varpi}{\partial n} d\gamma = (c_{1,k} - c_{2,k}) \int_{\Gamma_k} \sigma \frac{\partial \varpi}{\partial n} d\gamma.$$

Теперь нетрудно убедиться, что правая часть уравнения (3.10) обращается в нуль в силу условия (4.4) и (4.5). Итак,

$$\int_D \sigma(\mathit{grad} \varpi)^2 dv = 0.$$

Отсюда $(\mathit{grad} \varpi)^2 = 0$ (по условию задачи $\sigma > 0$ в D). Значит, $\varpi = \text{const}$ в D и, обращаясь в нуль на Γ , равна нулю всюду в области D , т. е. $p_1 = p_2$. Единственность доказана.

5. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

Малость внутренних границ Γ_k и специфичность задания граничных условий на них не позволяют непосредственно применить метод сеток к задачам 2-го типа. Построим специальные разностные уравнения в окрестности внутренних границ, позволяющие преодолеть трудности, обусловленные этими границами. [44]

Прежде всего установим вид функции p в окрестности скважин. Из соотношений (4.1)-(4.3):

$$\mathcal{L}(\sigma, p) = \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} p = 0$$

в $(N + 1)$ -связной области D с границами $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, удовлетворяющее граничным условиям:

$$p = \varphi(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Gamma$$

$$\int_{\Gamma_k} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma = q_k \quad (k = \overline{1, N})$$

$$p = c_k \text{ при } (x, y) \in \Gamma_k, (k = \overline{1, N})$$

следует, что этой окрестности функция давления p представима в виде

$$p = c_k + \frac{q_k}{2\pi\sigma_{c,k}} \ln \frac{r_k}{r_c} \quad (5.1)$$

Тогда из условия (4.3) будем иметь

$$\sigma_{c,k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(r_c, \varphi) d\varphi \quad (5.2)$$

Видимо, используя соотношения (5.2), задачу второго типа можно свести к задаче первого типа, если гидропроводность продолжить на внутренность скважины таким образом, чтобы в точке-скважине она принимала значение $\sigma_{c,k}$, и потребовать выполнения условия (3.3) вместо условия (4.3). Конечно, в результате такого перехода условие (4.4) будет выполняться только приближенно. Таким образом, метод подстановок может быть применен и для задач второго типа. Однако, когда $\sigma(r_c, \varphi)$ существенно зависит от φ , вспомогательная функция в методе подстановок не будет обладать достаточной гладкостью в окрестности скважин, что может привести к значительной погрешности на грубых сетках. Рассмотрим другой способ. [28]

Пусть область D покрыта сеткой D_h ($h \gg r_c$) таким образом, что в каждую точку-скважину O_k попадает узел (i_k, j_k) . Точка O_k не принадлежит области D , поэтому узел (i_k, j_k) тоже не принадлежит D_h . К сетке \bar{D}_h отнесем все точки, образованные пересечением сеточных линий с границей Γ_k . Это множество узлов будем обозначать $\Gamma_{k,h}$. Обозначим через $D_{i,j}$ элементарную площадку (ячейку), а ее границу – через $\Gamma_{i,j}$. Очевидно, ячейка D_{i_k, j_k} двусвязна, имеет внутреннюю границу Γ_k и, в отличие от других элементарных площадок, содержит не одну сеточную точку, а множество узлов $\Gamma_{k,h}$.

Из обобщенной формулы Грина и условия (4.3) следует

$$\iint_{D_{i_k, j_k}} \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} p dV = \oint_{\Gamma_{i_k, j_k}} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma - \oint_{\Gamma_k} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma = \oint_{\Gamma_{i_k, j_k}} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma - q_k.$$

Таким образом, в результате интегрирования уравнения (4.1) по ячейкам $D_{i,j}$ получим

$$\oint_{\Gamma_{i,j}} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma = \Phi_{i,j} \quad (5.3)$$

Где

$$\Phi_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ при } (i,j) \neq (i_k, j_k) \\ q_k \text{ при } (i,j) = (i_k, j_k) \end{cases} \quad (k = \overline{1, N}).$$

Так как в ϵ -окрестности k -ой скважины ($k = \overline{1, N}$) функция p имеет логарифмический характер, то прежде чем производить численное дифференцирование и интегрирование левой части уравнения (5.3), нужно выделить эту особенность. Для этого в ϵ -окрестности введем вспомогательную функцию

$$u = p - \alpha_k \ln r_k, \quad r_k^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 \quad (5.4)$$

где α_k - пока неопределенная константа. Тогда

$$\oint_{\Gamma_{i,j}} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\gamma = \Phi_{i,j} - \alpha_k \oint_{\Gamma_{i,j}} \sigma \frac{\partial \ln r_k}{\partial n} d\gamma \quad (5.5)$$

В результате численного дифференцирования и интегрирования (в левой части) в уравнении (5.5) получим (с погрешностью, зависящей от функции u)

$$\sum_m \sigma_m \nabla_{n,m} u \Delta \gamma_m = \Phi_{i,j} - \alpha_k \sum_m \sigma_m \bar{\omega}_m \quad (5.6)$$

где $\nabla_{n,m}$ - разностная производная по нормали к границе γ_m , σ_m - длина границы γ_m , $\Gamma_{i,j} = \sum_m \gamma_m$, γ_m - ортогональна к m -ой сеточной линии, выходящей из узла (i, j) , $\bar{\omega}_m = \int_{\gamma_m} \frac{\partial \ln r_k}{\partial n} d\gamma$.

Теперь сделаем обратный переход на сетке, т. е. из соотношения (5.6) исключим сеточные значения вспомогательной функции u с помощью равенства (5.2.4), связывающего значения функции p и u . В результате получим разностные уравнения для p :

$$\sum_m \sigma_m \nabla_{n,m} p \Delta \gamma_m = \Phi_{i,j} + \alpha_k \sum_m \sigma_m \bar{\omega}_m \quad (5.7)$$

Где

$$\bar{\omega}_m = \nabla_{n,m} \ln r_k \Delta \gamma_m - \bar{\omega}_m \quad (5.8)$$

Отметим, что из соотношения (5.8) следует: значения функции $\bar{\omega}_m$ в смежных ячейках на границе γ_m , разделяющей эти ячейки, равны по величине и противоположны по знаку. Так как в ячейку D_{i_k, j_k} входит множество сеточных узлов $\Gamma_{k,h}$, то в уравнении (5.7) при $i = i_k, j = j_k$ казалось бы войдет столько же значений функции p , сколько сеточных узлов на Γ_k . Однако из условия (4.4) следует, что вместо множества значений будем иметь одно значение p_{i_k, j_k} и формальная запись левой части уравнения (5.7) будет одинакова для всех ячеек $D_{i,j}$ [2]

Если ячейка $D_{i,j}$ попадает не целиком в ρ - окрестность скважины, то в уравнении (5.7) правая часть (5.8) отлична от 0 только для тех значений m , при которых граница γ_m попадает в окрестность скважины. Действительно, вне ρ - окрестности скважины $\bar{\omega}_m = 0$ с погрешностью того же порядка, что и левая часть уравнения (5.7).

Рассмотрим конкретную сетки.

Пусть сетка - квадратная $x = ih, y = jh, i, j = \pm 1, \pm 2, \dots$, где $\Gamma_{i,j} = \left(x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}} \leq y \leq y_{j+\frac{1}{2}} \right)$, и левая часть разностного уравнения (5.2.7) на пятиточечном шаблоне при ошибке $O(h^2)$ будет иметь вид

$$\mathcal{L}(\sigma, p) = \sigma_{i+\frac{1}{2}}(p_{i+1} - p) + \sigma_{i-\frac{1}{2}}(p_{i-1} - p) + \sigma_{j+\frac{1}{2}}(p_{j+1} - p) + \sigma_{j-\frac{1}{2}}(p_{j-1} - p) \quad (5.9)$$

Рассмотрим ячейку D_{i_k, j_k} ($k = \overline{1, N}$). Внешняя граница ее образуется отрезками прямых $x = x_k \pm \frac{1}{2}(h + r_c), y = y_k \pm \frac{1}{2}(h + r_c)$. В этой ячейке 4 точки принадлежат сетке D_h (Рис. 6). Очевидно, расстояние от всех этих точек до точки-скважины O_k равно r_c и при $m = 1, 3$ (соответствие индексов см. на Рис. 6) запишем

Так как в нашем случае $h \gg r_c$, то можно положить $\frac{h+r_c}{h-r_c} = 1 + \frac{2r_c}{h-r_c} \approx 1$.

Нетрудно убедиться, что

$$\bar{\omega}_{i_k \pm \frac{1}{2}, j_k} = \bar{\omega}_{i_k, j_k \pm \frac{1}{2}} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1 + z^2} dz = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, учитывая соотношение (5.8), (5.10) и (5.11) будем иметь

$$\omega_{i_k \pm \frac{1}{2}, j_k} = \omega_{i_k, j_k \pm \frac{1}{2}} = \ln \frac{h}{r_c} - \frac{\pi}{2}.$$

Подставив (5.8) в (5.7), учитывая последнее равенство, получим

$$\begin{aligned} \sum_m \sigma_m \nabla_{n,m} p \Delta \gamma_m &= \Phi_{i,j} + \alpha_k \sum_m \sigma_m \bar{\omega}_m = \Phi_{i,j} + \alpha_k \sum_m \sigma_m (\nabla_{n,m} \ln r_k \Delta \gamma_m - \bar{\omega}_m) \\ &= |(i,j) = (i_k, j_k)| = q_k + \alpha_k \sum_m \sigma_m \left(\ln \frac{h}{r_c} - \frac{\pi}{2} \right) = \left| \alpha_k = \frac{q_k}{2\pi \bar{\sigma}_k}, \bar{\sigma}_k = \frac{\sum_m \sigma_m}{4} \right| = q_k + \\ &\frac{q_k}{22\pi \bar{\sigma}_k} \sum_m \sigma_m \left(\ln \frac{h}{r_c} - \frac{\pi}{2} \right) = q_k + \frac{q_k^4}{2\pi} \left(\ln \frac{h}{r_c} - \frac{\pi}{2} \right) = q_k + \frac{q_k^2}{\pi} \ln \frac{h}{r_c} - q_k = q_k \frac{2}{\pi} \ln \frac{h}{r_c} \end{aligned}$$

(5.12)

6. ЧИСЛЕННОЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Задача 1. Рассмотрим частный случай. Пусть нам дана симметричная система скважин (Рис. 7)

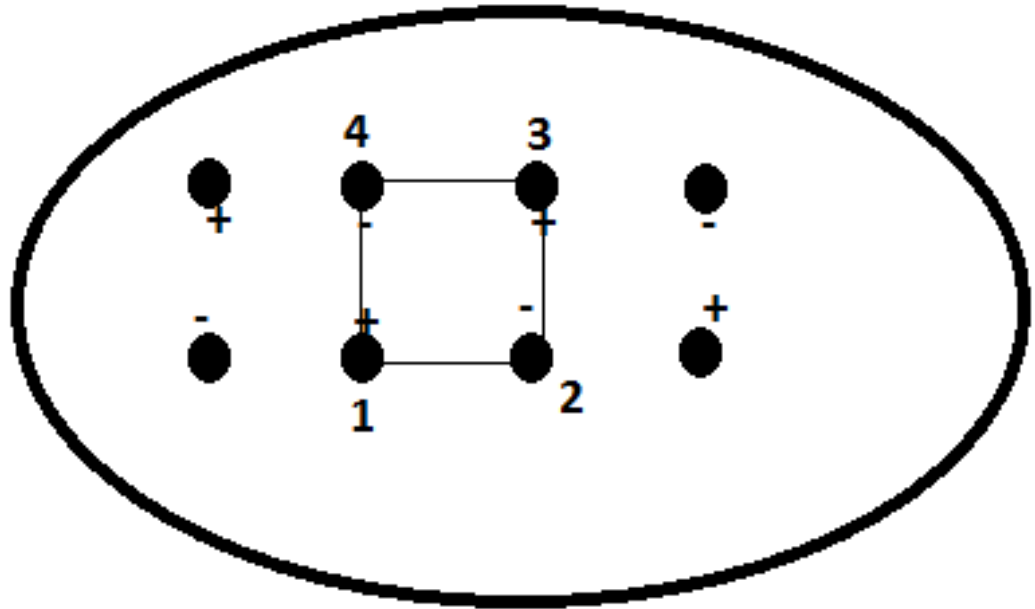


Рис. 7 Симметричная система скважин

«-» - нагнетательная скважина, «+» - добывающая скважина.

Найдем давление пласта вокруг четырех скважин (2,4 - нагнетательные и 1,3 - добывающие) с помощью уравнения $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$. Так как нам дана симметричная система скважин, то найденное давление будет повторяться для других скважин симметрично. Краевые условия будут выглядеть следующим образом, учитывая (5.12):

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{(x,y) \in \Gamma_k} = q_k \frac{2}{\pi} \ln \frac{h}{r_c} \quad (6.1)$$

где $k = \overline{1,4}$, $h = 0.1$, $r_c = 0.0015$ в безразмерном виде, $q_{1,3} = 0.24$, $q_{2,4} = -0.24$. Распишем разностную схему уравнения (6.1) для скважины 1, остальные определяются аналогично:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{(x,y) \in \Gamma_0} = 2 \frac{p_{1,0}^s - p_{0,0}^{s+1}}{\Delta x^2} + 2 \frac{p_{0,1}^s - p_{0,0}^{s+1}}{\Delta y^2} \quad (6.2)$$

где верхний индекс у p – итерация, так как у нас сетка равномерная, то $x = y = h$, за размерность сетки выбрана безразмерная величина 1. Из условия (6.2)

находим $p_{0,0}^{s+1}$ при известных $p_{1,0}^s$ и $p_{0,1}^s$. Левая часть нам полностью известна. Перенесем известные из правой части и найдем $p_{0,0}^{s+1}$. Для скважин 2, 3, 4 проводятся аналогичные вычисления.

Так как у нас симметричная система скважин, то на границе при $N = \overline{1, N-1}$, где N – количество узлов сетки, будем иметь:

при $x=0$ и $x=N$, $j = \overline{1, N-1}$ - $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ и при $y=0$ и $y=N$, $i = \overline{1, N-1}$ - $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

Данные условия означают $x=0$: $p_{-1,j}^s = p_{1,j}^s, j = \overline{1, N-1}$. Мы можем заменить неизвестные значения удвоив известные. Для $x=N$, $y=0$, $y=N$ вычисления производятся аналогично.

Внутри области давление находится по уравнению $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$ многосеточным методом. Начальное условие определяется из принципа суперпозиции. Мы взяли начальное условие за нуль.

После вычисления на ЭВМ данной задачи многосеточным методом с применением параллельного вычисления, получили следующий результат (Рис. 8)

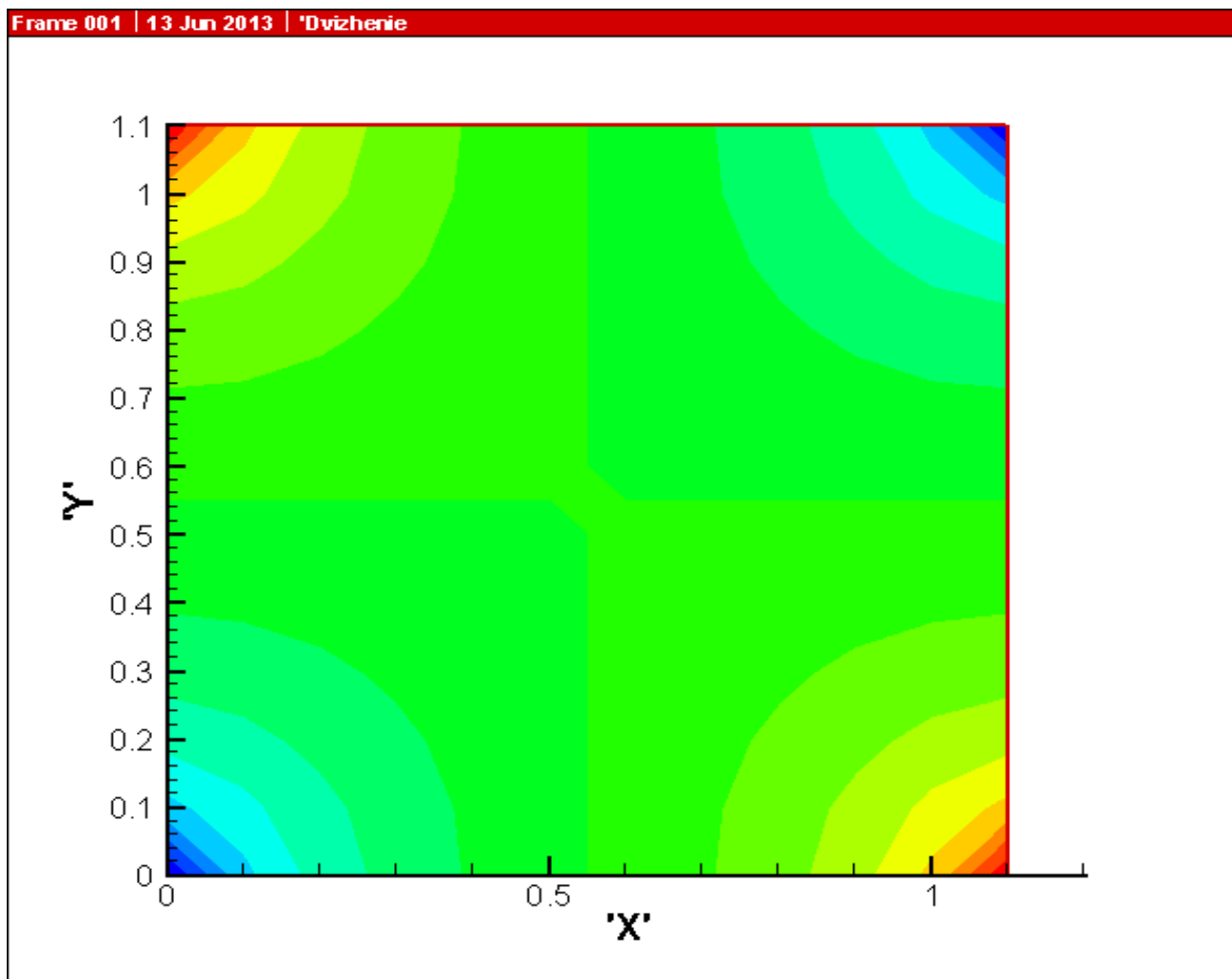


Рис. 8 Система добывающих и нагнетательных скважин.

При $\varepsilon = 10^{-5}$ (ε - точность) число итераций равно $k=71$.

Данный график представляет поле давления. Из графика видно, что вокруг каждой скважины поле давления образует концентрические круги, т.е. для добывающих скважин это давление в центре мало и увеличивается по концентрическим окружностям, для каждого кольца давление постоянно. Для нагнетательных скважин все наоборот: давление в центре огромное за счет закачки жидкости, постепенно удаляясь от скважины давление падает. Такой принцип используется в нефтедобывающей промышленности. Мы можем смоделировать нефтедобывающий процесс с помощью задания давления на скважинах и узнать эффективность скважины. Вычислив давление, при котором добыча нефти будет эффективна, мы можем непосредственно приметить вычисления к скважине.

Задача 2. Возьмем такую же систему скважин, только в данной системе все скважины будут добывающими. Все условия остаются прежними. Получим следующий результат (Рис. 9)

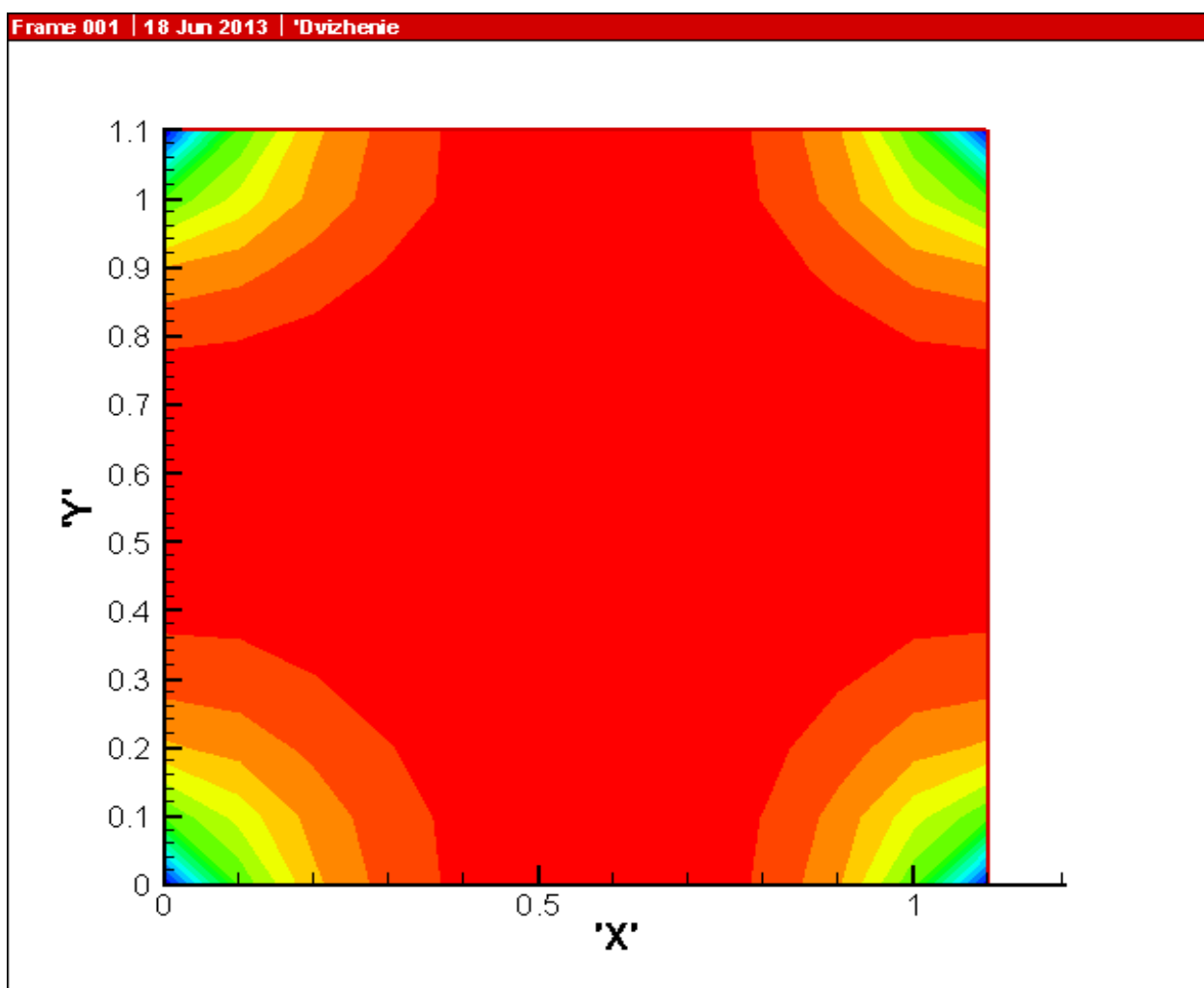


Рис. 9 Система добывающих скважин.

При $\varepsilon = 10^{-4}$ число итераций равно $k=8$.

Как показал график все скважины добывающие.

7. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ СОВМЕСТНОЙ РАЗРАБОТКЕ ПЛАСТОВ

7.1 Введение

Рассматривается изотермическая фильтрация однородной жидкости в двухслойных пластах, изолированных между собой, но вскрытых одной скважиной. Таким образом, задача об установившейся плановой фильтрации жидкости к совершенной скважине из изотропного ограниченного пласта сводится к нахождению решения уравнения Лапласа в двухсвязной области, внешней границей которой является контур области фильтрации, а внутренней - граница контура скважины. Поэтому при решении таких задач, когда на скважины задан расход, обычно пренебрегают размерами скважины, считая его точечным источником с мощностью, равной расходу реальной скважины, и уже эту задачу аппроксимируют на сетке.

В связи с тем, что размеры области фильтрации, как правило, намного больше размеров скважины при решении указанной задачи методом сеток аппроксимировать область фильтрации сеточной областью так, чтобы учесть размеры и форму скважины, представляют определенные трудности.

Когда скважину заменяют материальной точкой – скважиной, в которой находится источник (сток) функция p в точке O_0 становится неограниченной, а дебит q определяется как предел

$$\lim_{l \rightarrow 0} \oint_l \sigma \frac{\partial p}{\partial n} dl = q \quad (7.1.1)$$

где l некоторый замкнутый контур, охватывающий скважину, n – внешняя нормаль к l .

При фильтрации однородной жидкости условие (7.1.1) вполне оправдано. Если сохранить границу $\partial\omega_\varepsilon$, связанную с контуром скважины, тогда задания на них только дебита скважины недостаточны, нужны дополнительные условия на контуре скважины т.е.,

$$\int_{\partial\omega_\varepsilon} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma = q, \quad (7.1.2)$$

$$p(x, y) = C, \text{ при } (x, y) \in \partial\omega_\varepsilon. \quad (7.1.3)$$

где C - некоторые неизвестные постоянные. В этом случае из соотношений (7.1.2), (7.1.3) следует, что в ε окрестности скважины функция $p(x, y)$ представима в виде

$$p = u + \alpha \ln \frac{r}{r_c}, \quad (7.1.4)$$

где $\alpha = \frac{q}{2\pi\sigma_c}$, r_c - радиус скважины.

Тогда из (7.1.2) будем иметь

$$\sigma_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(r_c, \varphi) d\varphi \quad (7.1.5)$$

Видимо, используя соотношение (7.1.5) и гидропроводность, необходимо продолжить на внутренность скважины таким образом, чтобы в точке- скважине она принимала σ_c , и потребовать выполнение условия (7.1.1) вместо условия (7.1.2). В этом случае можно применить метод подстановок [3]. Однако, в результате такого перехода условие (7.1.3) будет выполняться только приближенно. Следуя работе заданными условиями (7.1.2), (7.1.3) на скважине и с учетом логарифмической зависимости (7.1.4), функцию давления в ε окрестности скважины построен конечно-разностный метод решения задачи.

При изучении вопроса о течении жидкости к эксплуатационным скважинам в многопластовой системе или в пластах с проницаемой кровлей и подошвой приходится учитывать возможные ее перетоки из одного горизонта в другой, что сильно осложняет теоретические исследования и математическое решение практических задач. Будем исследовать плоско- радиальное движение жидкости в двухслойных пластах, изолированных между собой, но вскрытых одной скважиной. Учитывая, что мощность пласта H мала по сравнению с его размерами в горизонтальной плоскости, что кровля и подошва пластов непроницаемы, можно предварительно провести все необходимые осреднения параметров по мощности и таким образом перейти от пространственных задач к плоским. Направим ось OZ против силы тяжести и введем функцию приведенного давления $p^* = p + \rho gh$. Тогда скорость фильтрации преобразуется к виду $\vec{v} = -\frac{kH}{\mu} \text{grad} p^*$. В дальнейшем звездочку у p^* опустим и под функцией p будем понимать приведенное давление.

7.2 Математическая модель фильтрации жидкости в двухслойных пластах

Введем обозначения: ω_ε - область, заключенная внутри контура $\partial\omega_\varepsilon$, Ω - область, заключенная внутри $\partial\Omega$, Q_0 – суммарный дебит скважины, отбираемый из двух пропластков, $k=1,2$ – номер пропластков. Тогда Ω_k - плоская двухсвязная область $\partial\Omega_k$, а $\omega_\varepsilon \in \Omega_k$ -круг радиуса $r_c=\varepsilon \ll \text{diam } \Omega_k$. Предполагаем, что центр круга совпадает с началом координат. Поставим задачу об отыскании в области $\Omega_{\varepsilon,k} = \Omega_k / \bar{\omega}_\varepsilon$ давления, удовлетворяющие уравнению

$$\text{div} \sigma_k \text{grad} p_k = 0, k = 1, 2 \quad (x, y) \in \Omega_{\varepsilon,k}, \quad (7.2.1)$$

Здесь ε радиус скважины в дальнейшем для удобства иногда принимаем $r_c=\varepsilon$.

На контуре $\partial\Omega_k$ принимает заданные значения

$$p_k(x, y) = \varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega_k, \quad (7.2.2)$$

а на $\partial\omega_\varepsilon$ удовлетворяют следующим условиям

$$\sum_{k=1}^2 \oint_{\partial\omega_\varepsilon} \sigma_k \frac{\partial p_k}{\partial n} d\gamma = Q_0, \quad (x, y) \in \partial\omega_\varepsilon \quad (7.2.3)$$

$$p_2(x, y) = p_1(x, y) + \rho g z_c, \quad \text{при } (x, y) \in \partial\omega_\varepsilon \quad (7.2.4)$$

Где $\sigma_k = \frac{k_k H_k}{\mu} > 0$ – коэффициент гидропроводности, $p_1(x, y) = C$ – некоторая неизвестная постоянная величина, $z_c = const$ – расстояние между серединными поверхностями (горизонтальными плоскостями) двух пропластков, ρ – плотность жидкостей, g – ускорение свободного падения.

7.3 Аналитическое решение задачи (7.2.1) – (7.2.4). Перейдем в полярные координаты в двумерном пространстве

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x.$$

В полярных координатах искомая функция $p(r, \varphi)$ должна быть периодической с периодом 2π : $p(r, \varphi + 2\pi) = p(r, \varphi)$.

Запишем изобарическое поле давления для кругового пласта с постоянным коэффициентом гидропроводности ($\sigma_k = const$):

$$\frac{d^2 p_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_i}{dr} = 0, \quad r_c < r < R. \quad (7.3.1)$$

$$\text{На контуре двухслойных пластов} \quad p_i(R) = p_0. \quad (7.3.2)$$

$$\text{Задаем суммарный дебит } (Q_0) \text{ на скважине} \quad \sum_{i=1}^2 \oint_{\partial\omega_\varepsilon} \sigma_i \frac{\partial p_i}{\partial r} d\gamma = Q_0, \quad (7.3.4a)$$

$$\text{и неизвестное давление на контуре скважины} \quad p_2(r_c) = p_1(r_c) + \rho g H. \quad (7.3.4b)$$

Общее решение в пластах представим в следующем виде

$$p_i(r) = A_i \ln r + B_i, \quad i = 1, 2, \quad (7.3.5)$$

Возьмем сектор кругового пласта (рис. 10), где $\angle AOB = d\varphi$, $d\gamma = AB$. Тогда для малого $(\frac{d\varphi}{2})$ имеем $\frac{d\gamma}{2} = r_c \sin(\frac{d\varphi}{2})$ или запишем $d\gamma \approx r_c d\varphi$.

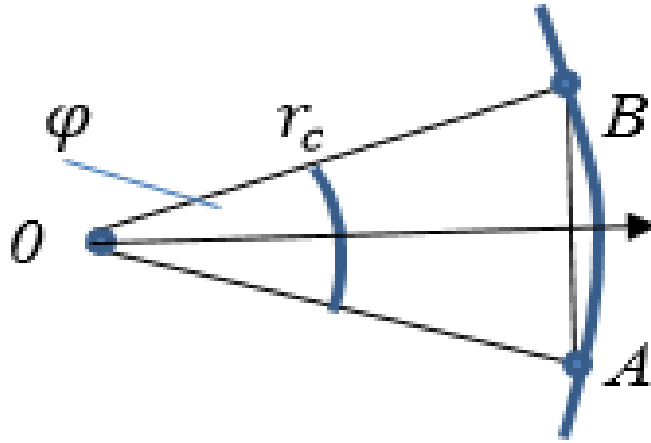


Рис. 10 Сектор круга $d\varphi = \angle AOB$.

Теперь условие (3.4а) с периодом 2π напишем в виде $\sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \sigma_i \frac{\partial p_i}{\partial r} r_c d\varphi = Q_0$. Тогда после интегрирования на основе общего решения получим

$$2\pi\sigma_1 A_1 + 2\pi\sigma_2 A_2 = Q_0. \quad (7.3.6)$$

С учетом граничных условий на контуре скважины определяем интегральные постоянные для первого и второго пластов:

$$A_1 = (P_0 - p_1(r_c)) / \ln \frac{R}{r_c}, \quad (7.3.7)$$

$$A_2 = (p_0 - p_1(r_c) - \rho g H) / \ln \left(\frac{R}{r_c} \right). \quad (7.3.8)$$

Из соотношения (7.3.6)-(7.3.8) найдем давление на контуре скважины первого и второго пластов:

$$p_1(r_c) = p_0 - \frac{Q_0}{2\pi} \ln \left(\frac{R}{r_c} \right) / (\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2 \rho g H / (\sigma_1 + \sigma_2). \quad (7.3.9)$$

$$p_2(r_c) = p_0 - \frac{Q_0}{2\pi} \ln \left(\frac{R}{r_c} \right) / (\sigma_1 + \sigma_2) + (1 - \sigma_2 / (\sigma_1 + \sigma_2)) \rho g H. \quad (7.3.10)$$

Зная граничные условия на контуре двухслойных пластов $p_i(R) = p_0$ и условия на контуре скважины (3.9) и (3.10), построим поле изменения давления в первом и во втором пластах:

$$p_1(r) = p_0 + \left[\frac{Q_0}{2\pi} + \frac{\sigma_2 \rho g H / (\sigma_1 + \sigma_2)}{\ln \left(\frac{R}{r_c} \right)} \right] \ln \left(\frac{r}{R} \right), \quad (7.3.11)$$

$$p_2(r) = p_0 + \left[\frac{\frac{Q_0}{2\pi}}{\sigma_1 + \sigma_2} - \frac{(1 - \sigma_2 / (\sigma_1 + \sigma_2)) \cdot \rho g H}{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)} \right] \cdot \ln \frac{r}{R}. \quad (7.3.12)$$

Если $\rho g H = 0$, получим поле давления, когда забойные давления на скважине, вскрывающие двух пластов $P_1(r_c) = P_2(r_c) = \text{const}$ одинаковые.

7.4 Численное решение задачи методом конечных разностей. Метод решения построим для одного пласта, следуя работе [4] (для простоты примем $(p = p_1 = p_2, \sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \Omega = \Omega_1 = \Omega_2, q_1 = \text{const})$). Пусть область Ω покрыта сеткой $\Omega_h (h \gg r_c)$. Точку скважины O_0 поместим в узел (i_0, j_0) . Точка O_0 не принадлежит области Ω , поэтому узел (i_0, j_0) тоже не принадлежит Ω_h . Отнесем все точки, образованные пересечением сеточных линий с границей $\partial\omega$. Это множество узлов обозначим $\partial\Omega_h$, а также обозначим через $\Omega_{i,j}$ площадку (ячейку), а ее границу - через $\partial\omega_{i,j}$. Тогда ячейка $\partial\Omega_{i_0,j_0}$ двусвязна имеет внутреннюю границу ω_0 и в отличие от других элементарных площадок содержит не одну сеточную точку, а множество узлов $\partial\omega_{0,h}$ (см. рис. 10). Из обобщенной формулы Грина и, применяя условие (2.3), получим

$$\iint_{\partial\Omega_{i_0,j_0}} \text{div} \sigma \text{grad} p dV = \oint_{\partial\omega_{i_0,j_0}} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma - \oint_{\partial\omega_0} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma = \oint_{\partial\omega_{i_0,j_0}} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma - q_1.$$

Сеточная ячейка Ω_{i_0,j_0} двусвязная, так как в ячейке расположена скважина с радиусом r_c (рис. 11).

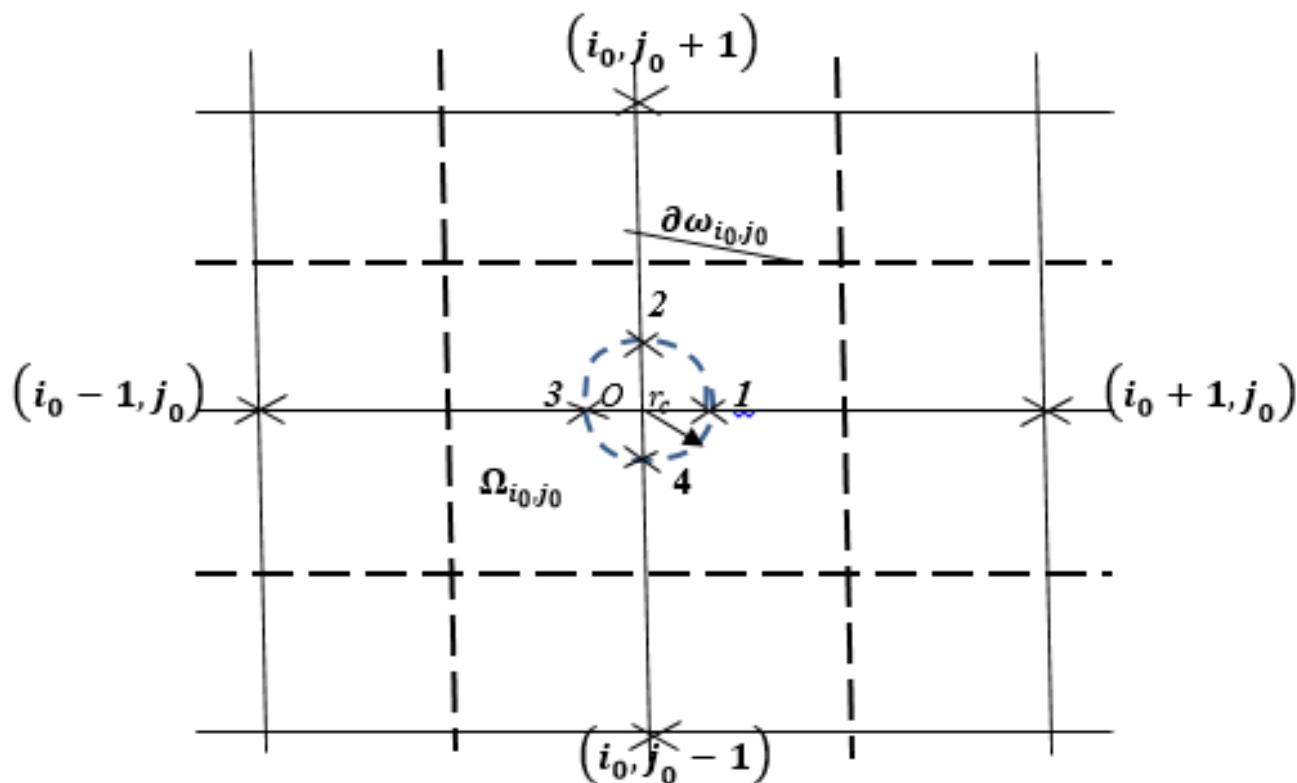


Рис 11. Скважина расположена в узле сетки.

Пусть сетка квадратная $x = ih, y = jh, i, j = \pm 1, \pm 2, \dots$ тогда

$$\bar{\Omega}_{i,j} = \{x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\}.$$

Таким образом, в результате интегрирования уравнения (7.2.1) по ячейкам $\Omega_{i,j}$ получим

$$\oint_{\partial\omega_\varepsilon} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma = \Phi_{i,j}, \quad (7.4.1)$$

где $\Phi_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{при } (i,j) = (i_0, j_0), \\ q_1, & \text{при } (i,j) = (i_0, j_0). \end{cases}$

Радиус (ρ) влияния скважины сравним с шагом сетки (h). Тогда в окрестности ρ скважины функция p имеет логарифмическую зависимость. Поэтому в ρ окрестности введем вспомогательную функцию

$$u = p - \alpha_0 \ln r, \quad r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \quad (7.4.2)$$

где α – неопределенная константа.

Тогда (7.4.1) запишем в следующем виде

$$\oint_{\partial\omega_\varepsilon} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma = \Phi_{i,j} - \alpha_0 \oint_{\partial\omega_\varepsilon} \sigma \frac{\partial \ln r}{\partial n} d\gamma, \quad (7.4.3)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\widehat{n, x}) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\widehat{n, y})$ и с учетом разностной производной по нормали $\nabla n, m$ к границе γ_m (рис 11). При этом γ_m – ортогонально к m -ой сеточной линии, выходящей из узла (i, j) сетки.

В результате численного дифференцирования и интегрирования левой части уравнения (7.4.3) получим

$$\sum_m \sigma_m \nabla_{n,m} u \nabla \gamma_m = \Phi_{i,j} - \alpha_0 \sum_m \sigma_m \int_{\gamma_m} \sigma \frac{\partial \ln r}{\partial n} d\gamma. \quad (7.4.4)$$

Здесь $\nabla \gamma_m$ – длина границы γ_m .

Рассмотрим ячейку Ω_{i_0, j_0} (Рис. 11). Внешняя граница ее образуется отрезками прямых $x = x_0 \pm \frac{1}{2}(h + r_c), y = y_0 \pm \frac{1}{2}(h + r_c)$. В этой ячейке четыре точки принадлежат сетке Ω_h . Очевидно, расстояние от всех точек до точки-скважины O равно r_c . При $m = 1, 3$ и $m = 2, 4$ запишем разностную аппроксимацию $\nabla_{x,m} u(h + r_c)$ и $\nabla_{y,m} u(h + r_c)$. Затем сделаем обратный переход на сетке, т.е.

исключим сеточные значения вспомогательной функции $u(x, y)$ с помощью равенства (7.4.2), связывающего значения функций $p(x, y)$ и $u(x, y)$. Так как в нашем случае $h \gg r_c$, то можно получить:

$$\nabla_{x,m} u = \left(p_{i_0 \pm 1, j_0} - p_{i_0, j_0} - \alpha \ln \frac{h}{r_c} \right), \quad \nabla_{y,m} u = \left(p_{i_0, j_0 \pm 1} - p_{i_0, j_0} - \alpha \ln \frac{h}{r_c} \right),$$

Нетрудно убедиться, что для всех m имеем $\int_{\gamma_m} \frac{\partial \ln r}{\partial n} d\gamma = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1/2 h dy}{1/4 h^2 + (x - i_0 h)} = \frac{\pi}{2}$.

Здесь $\alpha_0 = \frac{q_1}{2\pi \bar{\sigma}_{cp}}$, где $\bar{\sigma}_{cp} = \frac{1}{4} \left(\sigma_{i_0+1/2, j_0} + \sigma_{i_0-1/2, j_0} + \sigma_{i_0, j_0+1/2} + \sigma_{i_0, j_0-1/2} \right)$.

Окончательно для ячейки Ω_{i_0, j_0} разностные уравнения с заданным дебитом q_1 для одного пласта запишется в виде

$$h^2 L(\sigma, p)_{i_0, j_0} = \sigma_{i_0+1/2, j_0} (p_{i_0+1, j_0} - p_{i_0, j_0}) + \sigma_{i_0-1/2, j_0} (p_{i_0-1, j_0} - p_{i_0, j_0}) + \sigma_{i_0, j_0+1/2} (p_{i_0, j_0+1} - p_{i_0, j_0}) + \sigma_{i_0, j_0-1/2} (p_{i_0, j_0-1} - p_{i_0, j_0}) = q_1 \ln \frac{h}{r_c}.$$

Таким образом, когда радиус влияния скважины (ρ) равен шагу (h) сетки, для одного пласта условие (7.4.1) имеет следующую разностную аппроксимацию

$$h^2 L(\sigma, p)_{i_0, j_0} = \frac{2}{\pi} q_1 \ln \frac{h}{r_c}. \quad (7.4.5)$$

Соответственно, выражение (7.4.5) дает разностную аппроксимацию в точке-скважине и для второго пласта. Допустим, что шаг сетки для двух пластов будет одинаковый. В этом случае для двух пластов можно записать следующее выражение

$$h^2 L_1(\sigma_1, p)_{i_0, j_0} + h^2 L_2(\sigma_2, p)_{i_0, j_0} = \frac{2}{\pi} q_1 \ln \frac{h}{r_c} + \frac{2}{\pi} q_2 \ln \frac{h}{r_c}. \quad (7.4.6)$$

Тогда с учетом суммарного расхода ($Q_0 = q_1 + q_2$) из двух пластов получим

$$h^2 L_1(\sigma_1, p)_{i_0, j_0} + h^2 L_2(\sigma_2, p)_{i_0, j_0} = \frac{2}{\pi} Q_0 \ln \frac{h}{r_c}, \quad (7.4.7)$$

Численные решение задачи (7.2.1)-(7.2.4) построим продольно-поперечной схемой, предложенной Писменом и Рекфердом. [14]

7.5 Метод Писмена-Рекфорда для решения задачи (7.2.1)-(7.2.4).

Пусть сетка квадратная $x = ih$, $y = jh$, $i, j = \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда левая часть разностного уравнения внутри области на пятиточечном шаблоне с погрешностью $O(h^2)$ будет иметь вид

$$h^2 L_k (\sigma_m, p)_{i,j} = \sigma_{k,i+\frac{1}{2},j} (p_{i+1,j} - p_{i,j}) + \sigma_{k,i-\frac{1}{2},j} (p_{i-1,j} - p_{i,j}) + \sigma_{k,i,j+\frac{1}{2}} (p_{i,j+1} - p_{i,j}) + \sigma_{k,i,j-\frac{1}{2}} (p_{i,j-1} - p_{i,j}), \quad (7.5.1)$$

здесь $k=1,2$ номера пластов.

Запишем граничные условия на скважине

$$h^2 L_1 (\sigma_1, p)_{i_0, j_0} + h^2 L_2 (\sigma_2, p)_{i_0, j_0} = \frac{2}{\pi} Q_0 \ln \frac{h}{r_c}, \quad (7.5.2a)$$

$$p_{2, i_0, j_0} = p_{1, i_0, j_0} + \rho h N. \quad (7.5.2b)$$

На контуре $r=R$ двухслойных пропластков

$$p_k(r) = \varphi_0. \quad k=1,2. \quad (7.5.3)$$

Уравнение (7.5.1) запишем с постоянным коэффициентом гидропроводности $\sigma = const$. Введем разностные операторы: $p_{\pm 1} p \equiv p_{\pm 2} p \equiv p_{i,j \pm 1}$, $E p \equiv p_{i,j}$.

Представим оператор L_k в виде суммы, например для $k=1$

$$L_1 = A_1 + A_2, \quad A_1 = \frac{\sigma_1}{h^2} (p_{+1} - 2E + p_{-1}), \quad A_2 = \frac{\sigma_1}{h^2} (p_{+2} - 2E + p_{-2})$$

Если известно $p^k = \{p_{i,j}^k\}$, производится в два этапа через нахождение промежуточной величины $p^{k+1/2} = \{p_{i,j}^{k+1/2}\}$:

$$\frac{p_{i,j}^{k+1/2} - p_{i,j}^k}{\omega} = h^2 A_1 p^{k+1/2} + h^2 A_2 p^k, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq N-1 \quad (7.5.4)$$

соответствующая запись имеет и при $k=2$.

Условие (7.5.2a) на промежуточном этапе

$$A_{10} p^{k+1/2} + A_{20} p^k = L_2 (\sigma, p)_{i_0, j_0} + \frac{2}{\pi} Q_0 \ln \frac{h}{r_c} / h^2, \quad (7.5.5a)$$

$$\text{На контуре пластов } p_{i,j}^{k+1/2} = \varphi_0. \quad (7.5.5b)$$

Аналогично метод Письмена-Рекфорда строится и для второго пласта в случае оператора $L_2 (\sigma_2, p)$. [26]

Вычислительный алгоритм задачи (7.2.1) - (7.2.4) состоит из двух этапов - внутренней и внешней итерации. В случае внутренней итерации определяется функция давления в отдельных пластах. А внешняя итерация завершается при выполнении нелокального граничного условия (7.5.2).

При вычислительном процессе, например, для первого пласта в точке-скважине из выражения (7.4.2) определяем $L_1(\sigma_1, p)_{i_0, j_0}$ при фиксированном $L_2(\sigma_2, p)_{i_0, j_0}$ и решаем $L_1(\sigma_1, p)_{i, j}$ т.е. выполняем внутреннюю итерацию для первого пласта. Затем внутреннюю итерацию осуществляем для второго пласта с фиксированным $L_1(\sigma_1, p)_{i_0, j_0}$ и решаем $L_2(\sigma_2, p)_{i, j}$. Эта процедура продолжается пока не выполнится условие (7.5.2) и на этом завершается внешняя итерация.

Кратко остановимся на вопросе сходимости метода Писмена-Рекфорда [5]. Матрицы A_1 и A_2 симметричные и отрицательно-определенные имеют общую полную ортонормированную систему собственных векторов $2 \sin(i \pi_k h_1) \sin(i \pi l h)$; $k = \overline{1, N_1 - 1}$; $l = \overline{1, N_2 - 1}$

Собственные числа оператора A_1 и A_2 есть

$$(\lambda_i)_{A_1} = -\frac{4}{h_1^2} \sin^2\left(\frac{i \pi h_1}{2}\right), (\lambda_j)_{A_2} = -\frac{4}{h_2^2} \sin^2\left(\frac{j \pi h_2}{2}\right), 1 \leq i \leq N_1 - 1, \\ 1 \leq j \leq N_2 - 1.$$

В случае трехдиагональной матрицы, исключая $p^{k+1/2}$, можно написать

$$(E - \omega A_1)(E - \omega A_2)p^{k+1} = (E + \omega A_1)(E + \omega A_2)p^k,$$

$$\text{Отсюда } p^{k+1} = (E - \omega A_2)^{-1}(E - \omega A_1)^{-1}(E + \omega A_1)(E + \omega A_2)p^k.$$

Известно, что собственные числа оператора перехода принимаются $B = (E - \omega A_1)(E - \omega A_2)(E + \omega A_1)(E + \omega A_2)$ равным

$$(\lambda_{i,j})_B = \frac{1+\omega(\lambda_i)_{A_1}}{1-\omega(\lambda_i)_{A_1}} \cdot \frac{1+\omega(\lambda_j)_{A_2}}{1-\omega(\lambda_j)_{A_2}}. \quad (7.5.6)$$

Так как $(\lambda_i)_{A_1} < 0$, $(\lambda_j)_{A_2} < 0$, то $(\lambda_{i,j})_B < 1$ при любых $\omega > 0$. Следовательно, метод Писмена- Рекфорда сходится. [35]

Получается, если внутренняя итерация, связанная с методом Писмена-Рекфорда, сходится, то очевидно сходится и внешняя итерация. В данном методе вопрос об оптимальном выборе ω является сложным вопросом, не во всех случаях решенным.

Можно поступить следующим образом: для первых $N-1$ итераций положить

$$\omega_{k+1} = -\frac{1}{(\lambda_i)_{A_1}}, \quad k = \overline{0, N_1 - 2}.$$

Тогда $(\lambda_{i,j})_B$ $1 \leq i \leq N_1 - 1$ из (7.5.6) обратятся в нуль. Если при этом еще не будет выполнено неравенство $\max_{\substack{1 \leq i \leq N_1 - 1 \\ 1 \leq j \leq N_2 - 1}} |p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j}^k| < \varepsilon$, то далее ω выбирается

равным

$$\omega_k = -\frac{1}{(\lambda_{k-N_1+2})_{A_2}}, k = N_1 - 1, N_1, \dots, N_1 + N_2 - 3.$$

При этом нулями будут $(\lambda_{i,j})_B$ $1 \leq j \leq N_2 - 1$. Качество итерационного метода решения можно оценивать следующим образом. Определим норму “невязки” приближенного решения

$$R^k = \|Au - h^2 f\| = \left[\sum_{i,j=1} h^2 (Au - h^2 f)_{i,j}^2 \right]^{1/2}$$

R^k будет величиной порядка $e^{-\gamma_N k}$. Величина γ_N характеризует собой качество итерационного метода. Как известно, для простейшего итерационного процесса $P^{k+1} = P^k + \alpha(Au^k - h^2 f)$ при определенных ограничениях на α имеем $\gamma_N = 1/N_2$ [5].

7.6 Результаты

Решение задачи (7.2.1)-(7.2.4) проводилось со следующими параметрами. На контуре пластов поддерживалось одинаковое давление 15 Мпа, расход жидкости из двух пластов 80 т/сут, мощности пластов 10 м, 15м, а толщина непроницаемой межпластовой перемычки 0.5м., вязкости флюида 4 Спз, проницаемости были разные 0.3 Д, 0.5Д.

Полученные результаты методом конечных разностей сравнивались с точным решением. В области фильтрации радиуса влияния скважины погрешность в среднем была 0.1 процент, эта погрешность при приближении к контуру пласта не превышало 0.05 процента, т.е. уменьшалась. Для $1/4$ области полученные решения по формулам (7.3.9)-(7.3.10) приведены на рис. 12 и рис. 13. Здесь показаны изобарические поверхности поля давления $P(x, y)$.

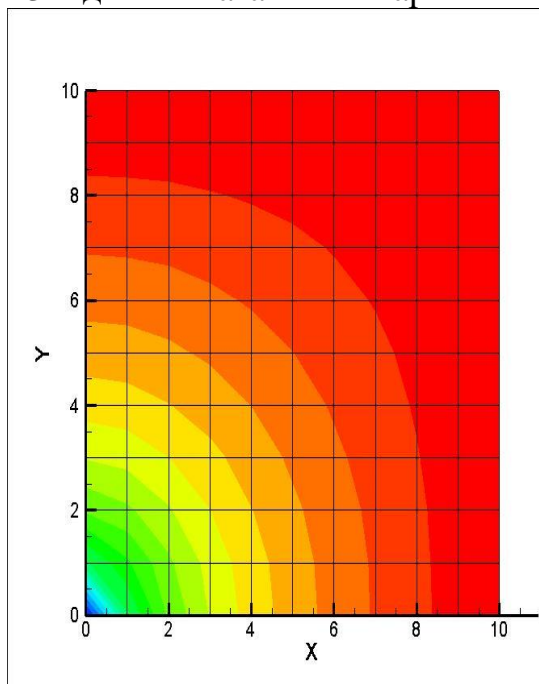


Рис. 12. Поле давления для первого пласта с проницаемостью 0.5 Д.

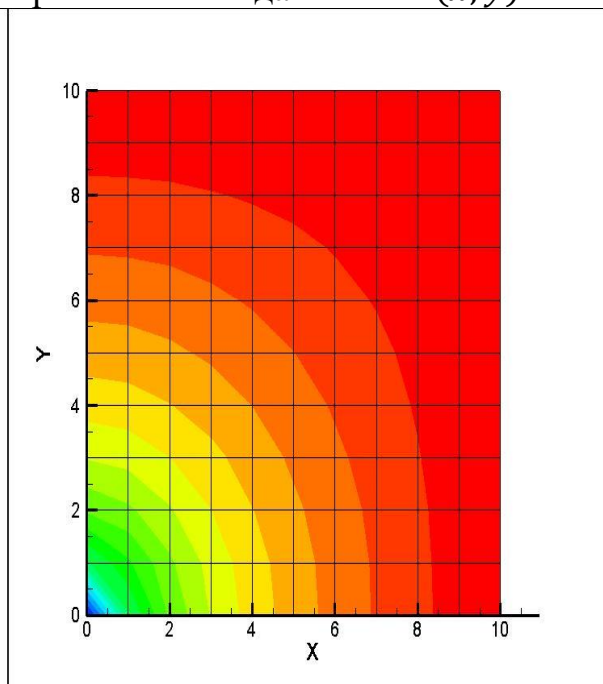


Рис. 13. Поле давления для второго пласта с проницаемостью 0.3 Д.

Совместная разработка нескольких пластов одной скважиной может быть эффективной в экономическом плане, особенно при разработке малопродуктивных пластов, которые по отдельности не могут быть эксплуатированы ввиду нерентабельности с точки зрения экономичности. Полученные результаты с помощью аналитического метода показывают правильность и высокую точность численного метода конечных разностей.

8. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА РАСЧЕТОВ НА ЯЗЫКЕ C++

8.1 Язык программирования C++

Язык программирования C++ представляет собой компилируемый, статически типизированный язык программирования общего назначения.

Поддерживает такие парадигмы программирования, как процедурное программирование, объектно-ориентированное программирование, обобщённое программирование. Язык имеет богатую стандартную библиотеку, которая включает в себя распространённые контейнеры и алгоритмы, ввод-вывод, регулярные выражения, поддержку многопоточности и другие возможности. C++ сочетает свойства как высокоуровневых, так и низкоуровневых языков. В сравнении с его предшественником — языком C, — наибольшее внимание уделено поддержке объектно-ориентированного и обобщённого программирования. [50]

C++ широко используется для разработки программного обеспечения, являясь одним из самых популярных языков программирования. Область его применения включает создание операционных систем, разнообразных прикладных программ, драйверов устройств, приложений для встраиваемых систем, высокопроизводительных серверов, а также развлекательных приложений (игр). Существует множество реализаций языка C++, как бесплатных, так и коммерческих и для различных платформ. Например, на платформе x86 это GCC, Visual C++, Intel C++ Compiler, Embarcadero (Borland) C++ Builder и другие. C++ оказал огромное влияние на другие языки программирования, в первую очередь на Java и C#.

Синтаксис C++ унаследован от языка C. Одним из принципов разработки было сохранение совместимости с C. Тем не менее, C++ не является в строгом смысле надмножеством C; множество программ, которые могут одинаково успешно транслироваться как компиляторами C, так и компиляторами C++, довольно велико, но не включает все возможные программы на C.[10]

Стандартная библиотека C++ включает в себя набор средств, которые должны быть доступны для любой реализации языка, чтобы обеспечить программистам удобное пользование языковыми средствами и создать базу для разработки как прикладных приложений самого широкого спектра, так и специализированных библиотек. Стандартная библиотека C++ включает в себя часть стандартной библиотеки C. Стандарт C++ содержит нормативную ссылку на стандарт C от 1990 года и не определяет самостоятельно те функции стандартной библиотеки, которые заимствуются из стандартной библиотеки C.

Доступ к возможностям стандартной библиотеки C++ обеспечивается с помощью включения в программу (посредством директивы `#include`)

соответствующих стандартных заголовочных файлов. Всего в стандарте C++11 определено 79 таких файлов. Средства стандартной библиотеки объявляются как входящие в пространство имён std. Заголовочные файлы, имена которых соответствуют шаблону «сХ», где Х — имя заголовочного файла стандартной библиотеки С без расширения (cstdlib, cstring, cstdio и пр.), содержат объявления, соответствующие данной части стандартной библиотеки С. [57]

8.2. Программный код

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<mpi.h>
#include<math.h>

void ProcessInitialization(int, int, int&, double&, int&);
void ProcessTermination(double*, double*);
void PrintMatrix(double*,int,int);
void TestDistribution(double*, double*, int, int, int, int);
void DataDistribution(int, double*, double*);
void nevjazka (double*, double*, int, double, double*, int);
void NevNaGrSet(double*, double*, int, int, int);
void Interp (double*, double*, int&, int, int, int, int);

int main(int argc, char **argv)
{FILE *fl;
int size, rank, N, RowNum, i, j;
double e, h, *pMatrix, *pPR, start,finish,duration, *f, *fPR, *dPR, *DPR, *VPR, *v;

    MPI_Init(&argc, &argv);
    MPI_Status st;
    MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &size);
    MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &rank);
    start=MPI_Wtime();
    ProcessInitialization(rank, size, N, h, RowNum);
```

```

MPI_Bcast(&N,1,MPI_INT,0,MPI_COMM_WORLD);
MPI_Bcast(&h,1,MPI_DOUBLE,0,MPI_COMM_WORLD);
MPI_Bcast(&RowNum,1,MPI_INT,0,MPI_COMM_WORLD);
int m=(RowNum-1)/2, n=N/2;
pPR=new double [RowNum*(N+1)];
fPR=new double [RowNum*(N+1)];
dPR=new double [RowNum*(N+1)];
DPR=new double [RowNum*(N+1)];
VPR=new double [RowNum*(N+1)];
v=new double [RowNum*(N+1)];
for(i=0; i<RowNum*(N+1); i++)
VPR[i]=0;

if(rank==0)//na glavnom procece sozdaem big matrix i zadaem n.y.
{
f=new double [(N+1)*(N+1)];
pMatrix=new double [(N+1)*(N+1)];
DataDistribution(N, pMatrix,f);
for(i=0;i<=N;i++)
pPR[i]=pMatrix[i];
MPI_Send(pMatrix+N*(N+1),N+1,MPI_DOUBLE,size-
1,5,MPI_COMM_WORLD);
}

MPI_Scatter(pMatrix+N+1,(RowNum-
2)*(N+1),MPI_DOUBLE,pPR+N+1,(RowNum-
2)*(N+1),MPI_DOUBLE,0,MPI_COMM_WORLD);
MPI_Scatter(f+N+1,(RowNum-2)*(N+1),MPI_DOUBLE,fPR+N+1,(RowNum-
2)*(N+1),MPI_DOUBLE,0,MPI_COMM_WORLD);
if(rank==(size-1))

```

```

    MPI_Recv(pPR+(RowNum-
1)*(N+1),N+1,MPI_DOUBLE,0,5,MPI_COMM_WORLD,&st);

    int NextProcNum = (rank==size-1)? MPI_PROC_NULL: rank+1;
    int PrevProcNum = (rank==0)? MPI_PROC_NULL:rank-1;
    MPI_Sendrecv(pPR+(N+1)*(RowNum-
2),N+1,MPI_DOUBLE,NextProcNum,4,pPR,N+1,MPI_DOUBLE,PrevProcNum,4,
MPI_COMM_WORLD,&st);

MPI_Sendrecv(pPR+N+1,N+1,MPI_DOUBLE,PrevProcNum,5,pPR+(N+1)*(RowN
um-1),N+1,MPI_DOUBLE,NextProcNum,5,MPI_COMM_WORLD,&st);
    for(i=1;i<RowNum-1;i++)
        for(j=1;j<N;j++)
            pPR[(N+1)*i+j]=0.25*(pPR[(N+1)*i+j+1]+pPR[(N+1)*i+j-
1]+pPR[(N+1)*(i+1)+j]+pPR[(N+1)*(i-1)+j]+fPR[(N+1)*i+j]*h*h);

    int k=0;
    double delta;
    do {
        k++;

        nevjazka (pPR, fPR, N, h, dPR, RowNum);
        NevNaGrSet(DPR, dPR, N, RowNum, rank);

    int K=0;
    double vdelta;
    do {
        K++;
        int Next = (rank==size-1)? MPI_PROC_NULL: rank+1;
        int Prev = (rank==0)? MPI_PROC_NULL:rank-1;

```

```

if(rank%2==0) {
    MPI_Sendrecv(VPR+(N+1)*(m-
1),N+1,MPI_DOUBLE,Next,4,VPR,N+1,MPI_DOUBLE,Prev,4,MPI_COMM_WO
RLD,&st);

    MPI_Sendrecv(VPR+N+1,N+1,MPI_DOUBLE,Prev,5,VPR+(N+1)*m,N+1,MPI_D
OUBLE,Next,5,MPI_COMM_WORLD,&st);
}
if(rank%2!=0) {

    MPI_Sendrecv(VPR+(N+1)*m,N+1,MPI_DOUBLE,Next,4,VPR,N+1,MPI_DOUBL
E,Prev,4,MPI_COMM_WORLD,&st);

    MPI_Sendrecv(VPR+N+1,N+1,MPI_DOUBLE,Prev,5,VPR+(N+1)*(m+1),N+1,MPI
_DOUBLE,Next,5,MPI_COMM_WORLD,&st);
}
if(rank%2==0)
    m=(RowNum-3)/2;
double vdmx=0,vtemp;
for(i=1; i<=m; i++)
    for(j=1; j<n; j++) {
        vtemp=VPR[(N+1)*i+j];
        VPR[(N+1)*i+j]=0.25*(VPR[(N+1)*i+j+1]+VPR[(N+1)*i+j-
1]+VPR[(N+1)*(i+1)+j]+VPR[(N+1)*(i-1)+j]+4*DPR[(N+1)*i+j]*h*h);
        if(fabs(vtemp-VPR[(N+1)*i+j])>vdmx)
            vdmx=fabs(vtemp-VPR[(N+1)*i+j]);
    }

    MPI_Allreduce(&vdmx,&vdelta,1,MPI_DOUBLE,MPI_MAX,MPI_COMM_WOR
LD);

```



```

    //printf("k = %d, K = %d",k,K);
} while(vdelta>0.01);
    Interp (VPR, v, m, n, N, rank, RowNum);
    for(i=0; i<RowNum*(N+1); i++)
        pPR[i]+=v[i];
//printf("K = %d",K);

int NextProcNum = (rank==size-1)? MPI_PROC_NULL: rank+1;
int PrevProcNum = (rank==0)? MPI_PROC_NULL:rank-1;
    MPI_Sendrecv(pPR+(N+1)*(RowNum-
2),N+1,MPI_DOUBLE,NextProcNum,4,pPR,N+1,MPI_DOUBLE,PrevProcNum,4,
MPI_COMM_WORLD,&st);

MPI_Sendrecv(pPR+N+1,N+1,MPI_DOUBLE,PrevProcNum,5,pPR+(N+1)*(RowN
um-1),N+1,MPI_DOUBLE,NextProcNum,5,MPI_COMM_WORLD,&st);
double dmax=0,temp;
for(i=1;i<RowNum-1;i++)
for(j=1;j<N;j++) {
    temp=pPR[(N+1)*i+j];
    pPR[(N+1)*i+j]=0.25*(pPR[(N+1)*i+j+1]+pPR[(N+1)*i+j-
1]+pPR[(N+1)*(i+1)+j]+pPR[(N+1)*(i-1)+j]+fPR[(N+1)*i+j]*h*h);
    if(fabs(temp-pPR[(N+1)*i+j])>dmax)
        dmax=fabs(temp-pPR[(N+1)*i+j]);
}

MPI_Allreduce(&dmax,&delta,1,MPI_DOUBLE,MPI_MAX,MPI_COMM_WORL
D);
}
while(delta>0.0001);

```

```

MPI_Gather(pPR+N+1,(RowNum-
2)*(N+1),MPI_DOUBLE,pMatrix+N+1,(RowNum-
2)*(N+1),MPI_DOUBLE,0,MPI_COMM_WORLD);
TestDistribution(pMatrix, pPR, N, RowNum, rank, size);
if(rank==0)
{
fl=fopen("test.xls","w");
for(j=0;j<=N;j++) {
for(i=0;i<=N;i++)
fprintf(fl,"%lf\t",pMatrix[j*(N+1)+i]);
fprintf(fl,"\n");
}
fclose(fl);
}
delete [] pPR;
delete [] fPR;
delete [] dPR;
delete [] DPR;
delete [] VPR;
delete [] v;
finish=MPI_Wtime();
duration=finish-start;
//printf("rank = %d, duration = %lf\n",rank,duration);
if(rank==0) {
ProcessTermination(pMatrix,f);
//printf("Iterations = %d ",k);
}
MPI_Finalize();
return(0);

```

```
}
```

```
void ProcessInitialization(int rank, int size, int &N, double &h, int &RowNum)
```

```
{
```

```
if(rank==0)
```

```
{
```

```
do
```

```
{
```

```
printf("\nEnter the grid size: \n");
```

```
scanf("%lf",&h);
```

```
double j=1.0/h;
```

```
N=static_cast<int>(j);
```

```
if(N<=2)
```

```
printf("The grid size must be greater than 2! \n");
```

```
if(N<size)
```

```
printf("Grid size must be greater than the number of processes! \n");
```

```
if((N-1)%size!=0)
```

```
printf("Number of inner rows of the grid must be divisible by the number of  
processes! \n");
```

```
printf("%d",N);
```

```
}
```

```
while((N<=2)||((N<size)||((N-1)%size!=0)));
```

```
RowNum=(N-1)/size+2;
```

```
}
```

```
}
```

```
void ProcessTermination(double *pMatrix, double *f)
```

```
{
```

```
delete [] pMatrix;
```

```
delete [] f;
```

```
}
```

```
void PrintMatrix(double *pMatrix,int N, int M)
```

```
{
```

```
for(int j=0;j<=M;j++)
```

```
{
```

```
for(int i=0;i<=N;i++)
```

```
printf("%lf\t",pMatrix[j*(N+1)+i]);
```

```
printf("\n");
```

```
}
```

```
}
```

```
void DataDistribution(int N, double *pMatrix, double *f)
```

```
{int i;
```

```
for(i=0;i<(N+1)*(N+1);i++)
```

```
f[i]=0;
```

```
int j=((N+1)*(N+1)-1)/2;
```

```
f[j]=10;
```

```
for(i=0;i<(N+1)*(N+1);i++)
```

```
pMatrix[i]=0;
```

```
}
```

```
void TestDistribution(double *pMatrix, double *pPR, int N, int RowNum, int rank,  
int size)
```

```
{
```

```
if(rank==0)
```

```
{
```

```
printf("Initial matrix: \n");
```

```

PrintMatrix(pMatrix,N,N);
}
MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
for(int i=0;i<size;i++)
{
if(rank==i)
{
printf("\nRank = %d \n", rank);
PrintMatrix(pPR,N,RowNum-1);
}
MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
}
}

void nevjazka (double *pPR, double *fPR, int N, double h, double *dPR, int
RowNum)
{
for(int i=1;i<RowNum-1;i++)
for(int j=1;j<N;j++)
dPR[(N+1)*i+j]=(pPR[(N+1)*i+j+1]+pPR[(N+1)*i+j-
1]+pPR[(N+1)*(i+1)+j]+pPR[(N+1)*(i-1)+j]-
4*pPR[(N+1)*i+j])/(h*h)+fPR[(N+1)*i+j];
}

void NevNaGrSet(double *DPR, double *dPR, int N, int RowNum, int rank)
{
int i,j,I,J;
int m=N/2;
int k=(RowNum-3)/2;
if(rank%2==0) {
for(J=1; J<=k; J++) {

```

```

for(I=1; I<m; I++){
    i=2*I; j=2*J;
    DPR[(N+1)*J+I]=0.5*dPR[(N+1)*j+i]+(dPR[(N+1)*j+i+1]+dPR[(N+1)*j+i-
1]+dPR[(N+1)*(j+1)+i]+dPR[(N+1)*(j-1)+i])/8;
}
}
}
if(rank%2!=0) {
    k=(RowNum-1)/2;
    for(J=1; J<=k; J++) {
        for(I=1; I<m; I++){
            i=2*I; j=2*J;
            DPR[(N+1)*J+I]=0.5*dPR[(N+1)*(j-1)+i]+(dPR[(N+1)*(j-
1)+i+1]+dPR[(N+1)*(j-1)+i-1]+dPR[(N+1)*j+i]+dPR[(N+1)*(j-2)+i])/8;
        }
    }
}
}
void Interp (double *VPR, double *v, int &m, int n, int N, int rank, int RowNum)
{ int i,j, I, J;
if(rank%2==0)
{
    m=(RowNum-3)/2;
    for(J=1; J<=m; J++)
        for(I=1; I<n; I++){
            i=2*I; j=2*J;
            v[(N+1)*j+i]=VPR[(N+1)*J+I];
        }
    for(J=1; J<=m; J++)
        for(I=0; I<n; I++){

```

```

    i=2*I; j=2*J;
    v[(N+1)*j+i+1]=VPR[(N+1)*J+I]+VPR[(N+1)*J+I+1];
}
for(J=0; J<=m; J++)
    for(I=1; I<n; I++){
        i=2*I; j=2*J;
        v[(N+1)*(j+1)+i]=VPR[(N+1)*(J+1)+I]+VPR[(N+1)*J+I];
    }
for(J=0; J<=m; J++)
    for(I=0; I<n; I++){
        i=2*I; j=2*J;
        v[(N+1)*(j+1)+i+1]=(VPR[(N+1)*(J+1)+I]+2*VPR[(N+1)*J+I]+VPR[(N+1)*J+I+1]
)/4;
    }
}

if(rank%2!=0)
{
    for(J=1; J<=m; J++)
        for(I=1; I<n; I++){
            i=2*I; j=2*J;
            v[(N+1)*j+i]=VPR[(N+1)*J+I];
        }
    for(J=1; J<=m; J++)
        for(I=0; I<n; I++){
            i=2*I; j=2*J;
            v[(N+1)*j+i+1]=VPR[(N+1)*J+I]+VPR[(N+1)*J+I+1];
        }
    for(J=0; J<m; J++)
        for(I=1; I<n; I++){

```

```

    i=2*I; j=2*J;
    v[(N+1)*(j+1)+i]=VPR[(N+1)*(J+1)+I]+VPR[(N+1)*J+I];
}
for(J=0; J<m; J++)
    for(I=0; I<n; I++){
        i=2*I; j=2*J;
        v[(N+1)*(j+1)+i+1]=(VPR[(N+1)*(J+1)+I]+2*VPR[(N+1)*J+I]+VPR[(N+1)*J+I+1]
)/4;
    }
}
}

```


ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В случае разработки двухслойных пластов в режиме задания суммарного дебита на скважине в работе дается аналитическое решение задачи. При этом на контуре скважины функция давления неизвестна, но постоянна. Получено аналитическое решение задачи, когда пласты являются однородными по проницаемости и постоянными, но отличающимися друг от друга. На контурах скважины неизвестные давления определяются с учетом веса жидкости в скважине. Полученное аналитическое решение в полярной координатной системе и сравнение с приближенным конечно-разностным решением показало, что результаты, полученные численным методом, имеет небольшую погрешность в окрестности скважины. Показано, что эти погрешности связаны с быстрым изменением градиента давления и возрастанием скорости фильтрации. А также отмечено, что погрешность в окрестности скважины зависит от учета радиуса влияния скважины.

В диссертационной работе рассматривается математическая модель фильтрации несжимаемой жидкости в изотропной пористой среде с разными коллекторскими свойствами. При построении конечно-разностного метода учитывается радиус влияния скважины. При изучении фильтрации несжимаемой жидкости в многосвязной области полученные результаты можно сформулировать в следующем виде.

В случае фильтрации несжимаемой жидкости в многосвязной области сформулирована математическая модель.

Сформулирована математическая постановка задачи фильтрации несжимаемой жидкости в двухслойных пластах с различными проницаемостями.

Построена математическая модель фильтрации жидкости для двухслойного пласта с различной проницаемостью. Эти пласты изолированы между собой, разрабатываются одной скважиной в режиме заданного суммарного дебита. Конечно-разностный метод решения построен с применением метода Письмена-Рекфорда.

Полученный результат численного решения по методу Письмена-Рекфорда сравнивался с точным аналитическим решением. Аналитическое решение задачи получено в полярной координатной системе. При этом показано, что погрешность численного решения возрастает в окрестности эксплуатационной скважины. Это связано с тем, что при приближении к скважине градиенты давления и скорости фильтрации резко возрастают.

Таким образом, в выпускной работе по теме «Вычисление функции давления в многосвязных областях» по численным методам реализован алгоритм расчета на алгоритмическом языке C++.

В работе строится особое разностное уравнение, отражающее характер изменения искомой функции в окрестности скважины и аппроксимирующее исходное дифференциальное уравнение с погрешностью, зависящей от производных не самой функции, а второстепенных членов ее разложения в окрестности скважины. Эти свойства позволяют избежать внутренних малых границ и применить обычные сетки. При этом величина погрешности аппроксимации в окрестности скважины зависит от соответствующих производных вспомогательной функции, более гладкая чем исходная.

Магистерская диссертация основана на современных методах исследования задач с нелокальным граничным условием.

Рассматривается фильтрация жидкости в круговых изотропных двухслойных пластах, изолированных между собой, но дренированных одиночной скважиной. Предполагается, что режим работы пластов зависит от заданного суммарного дебита на скважине с известным на контуре питания давлением. При этом на контуре скважины функция давления неизвестна, но постоянна. Получено аналитическое решение задачи, когда пласты являются однородными по проницаемости и постоянными, но отличающимися друг от друга. На контурах скважины неизвестные давления определяются с учетом веса жидкости в скважине. Полученное точное решение служит для анализа приближенного численного решения задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.И Баренблатт, В.М Ентов, В.М Рыжик «Движение жидкост и газов в природных пластах» М.Недра, 1984г,209с.
2. М.Г.Алишаев, М.ДРозенберг, Е.В. Теслюк «Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений» М.Недра, 1985г,264с
3. М.С. Хантуш «Новое в теории перетекания», в сб. «Вопросы гидрогеологических расчетов» М. Мир, 1964
4. Г.И Баренблатт, В.М Ентов, В.М Рыжик «Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа» М.Недра, 1972г,278с.
5. А.А.Самарский «Введение в теорию разностных схем» М.: Наука, 1971, 552 с.
6. С.Патанкар «Численные методы решение задач теплообмена и динамики жидкости», М.Энергоатомиздат,1984г,145с
7. Борисов Ю.П, Пилатовский В .П., Табаков В.П. «Разработка нефтяных месторождений горизонтальными и многозабойными скважинами» М.: Изд. Недра, 1964
8. В.А.Мироненко, В.М.Шестаков «Основы гидрогеомеханики» М. Недра,1974г,296с
9. В.Н.Николаевский «Геомеханика и флюидодинамика» М.Недра, 1996г,447с
10. Ж.К. Масанов, А.Д.Омаров, Н.М.Махметова «Статическое и сеймонапряженное состояние транспортных подземных сооружений в анизотропном геометрическом нелинейном массиве»Алматы, Бастау,2002г,244с
11. К.А.Каримов, Н.Т. Ажиханов «Исследование фильтрационного движения в гидродинамических связанных пластах»Алматы, КазНТУ им.К.Сатбаева,2004.
12. Басниев К.С., Алиев З.С., Критская С.П. и др. «Исследование влияния геолого-технических факторов на производительность горизонтальных газовых и газоконденсатных скважин»М. ИРЦ Газпром, 1998.
13. К. С. Басниев, А. М. Власов, И. Н. Кочина, В. М. Максимов. Подземная гидравлика: учебник для вузов. - М.: Недра, 1986, 303с
14. В.П. Гергель, В.А.Фурсов. Лекции по параллельным вычислениям: учебное пособие, изд-во Самара государственного аэрокосмического университета, 2009. – 164с.
15. В.Д. Бабушкин, И.И.Плотников, В.М.Чуйко «Методы изучения фильтрационных свойств неоднородных пород» М.Недра, 1974г. 208с.
16. В.В.Стасенко, И.М.Климушин, В.А. Бреев «Методы изучение геологических неоднородности нефтяных пластов» М.Недра, 1972г.,134с

17. Андреев В.Б, Кряквина С.А. О функции источника сеточного оператора. – Ж.вычисл. матем. и матем. физ.,1972, 12, 2
18. В.Б Андреев новая сеточная аппроксимация задачи о скважине.- вычисл. методы и программирование, МГУ, 1981. стр 95-103.
19. Андреев В.Б, Кряквина С.А О фундаментальном решении однопараметрического семейства разностных аппроксимации оператора Лапласа на плоскости. - Ж.вычисл. матем. и матем. физ.,1973, 13, N2
20. А.Н. Чекалин. Численные решения задач фильтрации в водонефтяных пластах.- Казань , КГУ, 1982, -207 стр.
21. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. -М: изд-во, Моск. физ-техн. ин-та, 1994, -528стр.
22. Аксенов С.Н., Истомина В. И., Смирнов А.С., Решение плоских задач установившейся фильтрации методом конечных элементов. Труды координационных совещаний по гидротехнике. Вып.113.Л.,1977, с 43-47
23. . Аравин В.Н., Нумеров С.Б. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой, пористой среде. М., Гостехиздат, 1953, 616 с.
24. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
25. Береславский Э.Н., Панасенко Л.А., Самигулин И.З., Применение метода конечных элементов к решению задач теории фильтрации. Ужгород, Изд. Ужгородского ун-та, 1976, с.7-8.
26. Бугров А.Н. Итерационные схемы решения сеточных уравнений, возникающих в методе фиктивных областей. // Численный анализ. Новосибирск. 1978, с. 10-23.
27. Вабишевич П.Н. Численное решение задачи стационарной фильтрации со свободной границей. Разностные методы математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1984, с.128-133.
28. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988,-512 с.
29. Гладкий Л.В, Ляшко И.И., Мистецкий Г.Е. Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем. Киев: Вища школа. 1981, 251с.
30. Демченко Л.И., Лычман В.В., Мистецкий Г.Е. О применение метода конечных элементов к решению некоторых задач фильтрации.// Вычисл. и прикл. математика. 1983.-Вып.49. С.84-90.
31. Карчевский М.М., Ляшко А.Д., Павлова М.Ф. О разностных схемах для уравнения нестационарной нелинейной фильтрации. — Дифференциальные уравнения, №9, 1979, с.1693-1706.
32. Коновалов А.Н. Метод расщепления по физическим процессам в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. Численные методы

- решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, 1972.
33. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973, 415 с.
 34. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. - 654 с.
 35. Кучеров А.Б., Николаев Е.С. Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 16, N 5, 1976, с 1164-1174.
 36. Лаврик В.И. О двух краевых задачах неустановившейся конвективной диффузии в случае фильтрации. — УМЖ, 1976, 28, №5, с.677-681.
 37. Ляшко И.И., Великоиваненко И.М. Численно-аналитическое решение задач теории фильтрации. К., «Наукова Думка», 1973, 264 с.
 38. Ляшко А.Д., Карачевский М.М. Разностные методы решения нелинейных задач теории фильтрации. Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1983. № 7, с. 28-45.
 39. Максимов М.М., Рыбицкая Л.П. Математическое моделирование процессов разработки нефтяных месторождений. М.: Недра, 1976, 264 е., с илл.
 40. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976, 352 с.
 41. Маринова И.В. Об уравнениях движения жидкости в пористой среде. // Известия ТРТУ. Таганрог: изд-во Таганрогский гос. ун-т, -2000. с.75-78.
 42. Маринова И.В. Численное решение некоторых задач геофильтрации. // Известия ТРТУ. Таганрог: изд-во Таганрогский гос. ун-т, -2003, с. 172-173.
 43. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
 44. Мейланов Р.П. К теории фильтрации в пористых средах. // Письма в Журнал технической физики. 1996. Т.22, №23. - с.40-43.
 45. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). М., «Наука», 1969, 545 с.
 46. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987.
 47. Самарский А.А. Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1984. с. 174-183.
 48. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989, 432 с.
 49. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. - 590 с.
 50. Стампаккья Г.О. Фильтрация жидкости через пористую среду с переменным поперечным сечением // Успехи мат. Наук. - 1974. - 29, №4. - с.89-101.

51. Сухинов А.И., Харина О.Д. О параллельном алгоритме решения задачи фильтрации. — Электронное моделирование. Киев: Наукова Думка, т.5, №1, 1983, с.80-83.
52. Чекалин А.Н., Шевченко В.А. Вычисление функции давления и водонасыщенности в многосвязной области. В кн.: Вычислительные методы и математическое обеспечение ЭВМ. Казань: Изд-во Казанского гос. Ун-та, 1979, с. 7-22.
53. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977, 724с.
54. Чарный И.А. Основы подземной гидравлики. М., Гостоптехиздат, 1956, 260с.
55. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963, 369с.
56. D.Braess. The convergence rate of a multigrid method with Gauss-Seidel relaxation for the Poisson's equation.- Multigrid Methods: Lecture Notes in Math., vol. 960.,1982, p.368-385.
57. O. Axelsson. On multigrid methods of the two- level type. Multigrid Methods: Lecture Notes in Math., vol.960,1982, p. 352-367.
58. Biot M.A General theory of three-dimensional consolidation //J.Appl.Phys/1941.-V.12.-P.155-164
59. J.R.Rice, M.P. Cleary Some basic stress-diffusion solutions for fluid saturated elastic porous media with compressible constituents //Rev. Geophys.Space Phys. 1976.-V.14.-P.227-241
60. H.J. Kumpel, Poroelasticity: parameters reviewed // Geophys. J. Int. 1991.-V.105.-P.783-799