

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

МЕХАНИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТІ  
МАГИСТРАТУРА

Математикалық және компьютерлік пішіндеу кафедрасы

МАГИСТРЛІК ДИССЕРТАЦИЯ

Веригин есебі үшін арнайы функциялар әдісі

Орындаған \_\_\_\_\_ Айтқали Б.Е. «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 ж.  
/ қолы/

Ғылыми жетекші \_\_\_\_\_ Харин С.Н. «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 ж.  
ф.-м.ғ.д, профессор / қолы/

Норма бақылаушы \_\_\_\_\_ Карибаева М. «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 ж.  
/ қолы/

Қорғауға жіберілді:

Кафедра меңг. \_\_\_\_\_ Исахов А.А. «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 ж.  
PhD, профессор м.а. / қолы/

Алматы, 2018

## ТҮЙІНДЕМЕ

Диссертациялық жұмыста 60 бет, 11 сурет, 1 кесте, өзара бөлімшелерге бөлінген 4 тарау, 15 аттан тұратын оқулықтар тізім және нормативтік сілтемелер қамтылған.

Кілттік сөздер: Веригин есебі, Хартри функциялары, кері есеп, айдағыш галерея, су-мұнай контакті.

Жұмыстың мақсаты қысымға байланысты су-мұнай контактінің орналасуын реттеу үшін арнайы функциялар әдісі арқылы Веригин есебін шешу.

Жұмыстың өзектілігі. Мұнай-су контактісінің жағдайын айдағыш галереясының төменгі жағындағы қысымға байланысты реттеу мәселесі мұнай кен орындарының жұмысында өте маңызды. Бұл мәселені пьезоөткізгіштік теңдеулер жүйесі үшін кері Веригин есебімен модельдеуге болады. Веригиннің тура есебі су мен мұнай құрылымдарындағы қысым мен айдағыш галереясының төменгі жағында сыртқы қысым берілген кезіндегі олардың арасындағы байланыстың динамикасын анықтау болып табылады. Кері есепте, сыртқы шекараның қозғалыс заңын қанағаттандыратын сыртқы қысымның динамикасын табу қажет. Бұл мәселе математикалық тұрғыдан әлдеқайда күрделі, өйткені ол математикалық физиканың қисынсыз мәселелер класына жатады, бірақ оны шешу тәжірибе үшін өте маңызды. Бұл жұмыста әртүрлі геометрияның айдағыш галереясының су-маймен байланысындағы қысымның динамикасын сипаттайтын пьезоөткізгіштік теңдеуі үшін кері есептің мәселесі қарастырылады. Бұл мәселе Хартридің арнайы функциялары мен өзгешеленген гипергеометриялық функцияның көмегімен шешіледі. Шешім айқын аналитикалық түрде табылған. Есептеу мысалы келтірілген. Нәтижелер MathCAD бағдарламасының көмегімен есептелген.

## РЕЗЮМЕ

Диссертационная работа содержит 60 страниц, 11 рисунков, 1 таблицу, 4 главы состоящих из подглав, список литературы, состоящий из 15 наименований и нормативные ссылки.

Ключевые слова: задача Веригина, функции Хартри, обратная задача, нагнетательная галерея, водонефтяной контакт.

Целью работы является решение задачи Веригина методом специальных функций для регулирования положения водонефтяного контакта в зависимости от давления.

Актуальность работы. В настоящее время вычислительная аэро и гидродинамика часто применяются в моделировании циркуляции воздуха, распространения температуры и загрязнителей внутри помещения. Нужно учитывать распространения загрязнителей в динамической среде, и эффективность удаления загрязнителей с наименьшим расходом энергии. В основном инженерной практике чистый воздух приходит снаружи, но это требует больших затрат энергии. При проектировании вентиляции малая скорость воздуха не требует больших затрат энергии, но это может привести к повышению загрязнителей в воздухе. В связи с этим нужно моделировать турбулентность и теплоперенос в помещении, с использованием осредненных уравнений Навье-Стокса по времени (RANS). В данной работе рассматривается двухдиффузионная конвекция. С целью проверки математической модели и вычислительного алгоритма проводились сравнения с экспериментальными данными и вычислениями других авторов. Верификация показала хорошие результаты, после этого рассматривались следующие способы подачи воздуха: однонаправленный, неоднаправленный и смешанный. В ходе исследования выяснилось, что однонаправленный поток воздуха является эффективным способом. Вычисления проводились в программном пакете ANSYS Fluent.

## SUMMARY

The dissertation work contains 60 pages, 11 images, 1 table, 4 chapters consisting of sub-chapters, list of references, consisting 15 names and normative references.

Key words: Verigin problem, Hartree functions, inverse problem, pressure gallery, water-oil contact.

The aim of the work is to solve the Verigin's problem by the method of special functions to regulate the position of the water-oil contact in relation to the pressure.

Actuality of work. . Nowadays, computational aero and hydrodynamics are often used in modeling of air circulation, the spread of temperature and indoor pollutants. It is necessary to take into account the spread of pollutants in a dynamic media, and the efficiency of removing pollutants with the lowest energy consumption. In basic engineering practice, pure air comes from the outside, but it requires a lot of energy. When designing ventilation, the low air speed does not require much energy, but this can lead to an increase of pollutants in the air. Thus, it is necessary to simulate turbulence and heat transfer in a room, using the averaged Navier-Stokes equations in time (RANS). In this work we consider two-diffusion convection. To verify the mathematical model and the computational algorithm, comparisons were made with the experimental data and calculations of other authors. Verification showed good results, then the following air delivery methods were considered: unidirectional, unidirectional and mixed. The study revealed that a unidirectional air flow is an effective way. Calculations were carried out in the software package ANSYS Fluent.

## МАЗМҰНЫ

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР .....	6
БЕЛГІЛЕУЛЕР ЖӘНЕ ҚЫСҚАРТУЛАР .....	7
КІРІСПЕ .....	8
I I. ХАРТРИ ФУНКЦИЯЛАР АППАРАТЫ .....	210
1.1 Хартри функцияларының анықталуы.....	10
1.2 Хартри функцияларының қасиеттері .....	11
1.3 Хартри функцияларын жалпылау .....	13
1.4 Айнымалы көлденең қимасы бар жылу теңдеуі.....	17
II ЖЫЛУ ӨТКІЗУ ТЕҢДЕУЛЕРІ .....	21
2.1 Жылулық теңдеу. Жарты шексіз жолақ .....	21
2.2 Жылуға байланысты мәселе .....	24
2.3 Қозғалыс шекарасы бар облыс .....	26
III Шекаралық ағынмен екі жақты Стефан мәселесі .....	32
3.1 Математикалық модель.....	32
3.2 Шешім әдісі .....	33
3.3 Фаа-ди-Бруно формуласы.....	35
3.4 Шексіз шекарадағы қатарлар .....	39
3.5 Қатары бар конвергенттер .....	42
IV ВЕРИГИН ЕСЕБІ .....	45
4.1 Жалпы мәлімет.....	45
4.2 Математикалық модель.....	47
4.3 Шешу тәсілі .....	49
4.4 Есептелу мысалы .....	54
ҚОРЫТЫНДЫ.....	21
ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ .....	60

## НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Магистрлік диссертация Қазақстан Республикасы Ғылым және Білім Министрлігінің, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің келесідей нормативтік құжаттарына сүйене отырып жазылған:

1. Қазақстан Республикасының Білім туралы Заңы (№ 319 - III, 27.07.2007).
2. Қазақстан Республикасының Білім туралы Заңы.
3. ҚР МЖМБС 5.04.033-2011. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім. Магистратура.
4. Магистрлік диссертацияға қойылатын талаптар (әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-дың Ғылыми Әдістемелік Кеңесінің Мәжілісінде 17.02.2012 ж. Бекітілген (хаттама № 3)).

## БЕЛГІЛЕУЛЕР ЖӘНЕ ҚЫСҚАРТУЛАР

$p_i$  – әрбір аймақтағы қысым–

$u_1, u_2$  – су және мұнай фильтрациясының жылдамдығы

$k_1, k_2$  - фильтрация коэффициенттері

$m$  - кеуектілік

$x, y, z, x_i$  – нүктенің декарттық координаталары

$t$  – уақыт

$P_1(t)$  - айдағыш галереясының төменгі жағында қысым

## КІРІСПЕ

Жұмыстың өзектілігі. Мұнайдың шаруашылықтағы маңызын халық ерте кездерден-ақ жоғары бағалаған. Оны “жер майы”, “асыл май”, “тау майы” деп құрметпен атаған.

Қазіргі дәуірде мұнайды және одан алынатын әртүрлі құнды өнімдерді қолданбайтын өндіріс немесе ауыл шаруашылық салалары кемде-кем.

Мұнайдан алынатын өнімдер мыналар: жанар май (отын); мұнай майлары; парафиндер, церезиндер, вазелиндер; мұнай битумдары; жарықтандырғыш керосиндер; еріткіштер; басқа мұнай өнімдері (кокс, күйе консистентті майлайтын майлар, мұнай қышқылдары және т.б.).

Бензин, керосин, т.с.с. сан-алуан түрлі жанар және жағар майлардың мұнай айыру зауыттарында жоғары температурада қыздыру, т.б. әдістер арқылы алынатыны бәрімізге мәлім. Бұл өнімдер болмаған жағдайда жер үстінде жүретін, суда жүзетін, ауада ұшатын сан алуан механизмдер мен машиналардың қозғалысы не болмаса, космос корабльдерінің ғарышқа самғауы мүмкін емес еді.

Мұнай- қуатты және арзан отындардың қатарына жатады. Тас көмірмен салыстырғанда оның қызуы әлдеқайда артық. Ол дүние жүзілік жанар-жағар май-энергетикалық балансында орасан зор үлеске ие: оның адамзат пайдаланатын қуат көздері ішінде 48% алады.

Осыған орай мұнайды өндіру әлемдегі ең өзекті мәселелердің бірі болып табылады. Бұл жұмыста мұнай-су контактісінің жағдайын айдағыш галереясының төменгі жағындағы қысымға байланысты реттеу мәселесі қарастырылған.

Жұмыстың мақсаты – негізгі мақсаты су-мұнай контактінің қысымының өзгерісін зерттеу, қажетті қозғалыс заңдылығын қамтамасыз ету үшін сыртқы қысымды қалай алу керектігін анықтау. Бұл мәселелер өндірісте өте өзекті болып табылады. Айдағыш галереядан келетін сыртқы қысымның әсерінен мұнайдың қозғалысы белгілі бір заңдылықпен жүзеге асатыны белгілі. Осы жұмыс мақсаты қажетті қозғалыс заңдылығын қамтамасыз ету мүмкіндігі зерттеу. Жұмыста қойылған мақсаттарға жету үшін келесі міндеттер қойылды:

- a. Веригин есебін талдау, Хартри функциялар аппаратымен танысу
- b. Есептеулер жүргізіп, алынған нәтижелерді талдау
- c. Қазіргі таңда қолданылатын математикалық модельдерді және сандық әдістерді берілген мәселе үшін талдау
- d. Мәселені екіөлшемді тұрғыдан қарастыру

Жұмыстың жаңалығы Веригин кері есебі шығарылып, сумен және мұнаймен толған аудандардағы қысымның таралуы мен олардың байланыс бетінің динамикасы арасындағы қатынастарды анықталды. Қажетті қозғалыс заңы қанағаттандыру және су-мұнай контактіндегі қысымды өзгерту үшін сыртқы қысымды қалай алу керектігі қарастырылды.

Зерттеу нысаны ретінде айдағыш галереясының төменгі жағындағы қысымға байланысты мұнай-су контактісінің жағдайы болып табылады.



Зерттеу пәні ретінде мұнай кен орындары, резервуарлары, мұнай өндіру құрылғылары болып табылады.

Әдістемелік және зерттеу әдістерін таңдау кезінде көптеген мәліметтер, әдебиеттер қарастырылды. Негізгі әдіс ретінде Хартри арнайы функциялар әдісі таңдалды. Есептеулер және графикалық бейнелеу MathCAD бағдарламасы арқылы жүзеге асырылды.

Жұмыстың теориялық және практикалық маңыздылығы. Берілген жұмыстағы зерттеулерді мұнай өндіру процесі кезінде қолдануға болады. Зерттеулер жалғастырып, дамытып, толықтыруға болады.

# I. ХАРТРИ ФУНКЦИЯЛАР АППАРАТЫ

## 1.1 Хартри функцияларының анықталуы

Рекурентті формулалармен анықталатын интегралдық қате функциялар

$$i^n \operatorname{erfc} x = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} v dv$$

$n=1,2,\dots$  (1.1)

$$i^0 \operatorname{erfc} x \equiv \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-v^2) dv$$

1935 жылы Хартри енгізді.

(1.1) осы формуладан келесіні алуға болады

$$i^n \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n!} \int_x^\infty (v-x)^n \exp(-v^2) dv$$
 (1.2)

Олар дифференциалдық теңдеуді

$$\frac{d^2}{dx^2} i^n \operatorname{erfc} x + 2x \frac{d}{dx} i^n \operatorname{erfc} x - 2ni^n \operatorname{erfc} x = 0$$
 (1.3)

Және рекурентті формулаларды қанағаттандырады

$$2ni^n \operatorname{erfc} x = i^{n-2} \operatorname{erfc} x - 2xi^{n-1} \operatorname{erfc} x$$
 (1.4)

Интегралдық қате функциялары (кейде Хартри функциялары деп те аталады) теңдеу арқылы сипатталуы мүмкін, жылу беруді, диффузияны және басқа құбылыстарды зерттеу үшін өте тиімді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
 (1.5)

Анықталу облысы  $D(t > 0, 0 < x < \alpha(t))$ , шексіз  $x = \alpha(t)$ , келесі функциялар

$$u_n(\pm x, t) = t^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc} \frac{\pm x}{2a\sqrt{t}}$$

сызықтық комбинациясы немесе тіпті қатары бар (1.5) теңдеуін қанағаттандырады

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n u_n(x,t) + B_n u_n(-x,t)]$$

$A_n$ ,  $B_n$  кез келген тұрақтылар үшін болып табылады. Егер берілген шекаралық функциялар  $t$  немесе  $\sqrt{t}$  [2] – [3] қоса Тейлор қатарына дейін жіктелетін болса,  $x=0$  және  $x=\alpha(t)$  шекаралық шарттарды қанағаттандыру үшін осы тұрақты мәндерді таңдай аламыз.

Кейінірек Хартри функциялары кейбір мәселелерге [4] – [6]  $n$  толық емес немесе теріс индекстерге қосымшаларымен қоса жалпыланған болатын.

## 1.2 Хартри функцияларының қасиеттері

Жоғарыда көрсетілген мақалаларда қарастырылмайтын Хартри функцияларының жаңа қасиеттерін шығарып алайық.

1. Егер  $n$  бүтін сан болса, онда

$$i^n \operatorname{erfc}(-x) + (-1)^n i^n \operatorname{erfc}x = \frac{1}{2^{n-1} n! i^n} H_n(ix) = \frac{1}{2^{n-1} n!} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{x^2},$$

$i = \sqrt{-1}$  қоса және оң жақта  $H_n(x)$  Хермит көпмүшелілігі. Содан, (1.2) формуланы пайдалана отырып, келесіні жазамыз

$$i^n \operatorname{erfc}(-x) + (-1)^n i^n \operatorname{erfc}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n!} \int_{-x}^{\infty} (v+x)^n \exp(-v^2) dv +$$

$$\frac{(-1)^n 2}{n! \sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} (v-x)^n \exp(-v^2) dv = \frac{2}{n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (v+x)^n \exp(-v^2) dv = \frac{1}{2^{n-1} n! i^n} H_n(ix)$$

Хермит көпмүшелілігі үшін формуланы қолдана отырып, келесі нәтиже аламыз

$$i^n \operatorname{erfc}(-x) + (-1)^n i^n \operatorname{erfc}x = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{n-2m}}{2^{2m-1} m! (n-2m)!} \quad (1.6)$$

Егер  $n = 2k$ , онда

$$i^{2k} \operatorname{erfc} x + i^{2k} \operatorname{erfc} (-x) = \sum_{m=0}^k \frac{x^{2(k-m)}}{2^{2m-1} m! (2k-2m)!} \quad (1.6.1)$$

Мысалы:

$$\operatorname{erfc} x + \operatorname{erfc} (-x) = 2,$$

$$i^2 \operatorname{erfc} x + i^2 \operatorname{erfc} (-x) = \frac{1}{2} + x^2,$$

$$i^4 \operatorname{erfc} x + i^4 \operatorname{erfc} (-x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{12} x^4$$

$$i^{2k} \operatorname{erfc}(-x) + i^{2k} \operatorname{erfc} x = \frac{1}{2^{2k-1} k!} + \frac{x^2}{2^{2k-3} (k-1)! 2!} + \frac{x^4}{2^{2k-5} (k-2)! 4!} + \dots + \frac{x^{2k}}{2^{-1} (2k)!}$$

Егер  $n = 2k + 1$ , онда

$$i^{2k+1} \operatorname{erfc}(-x) - i^{2k+1} \operatorname{erfc} x = \sum_{m=0}^k \frac{x^{2(k-m)+1}}{2^{2m-1} m! (2k-2m+1)!} \quad (1.6.2)$$

Мысалы

$$i \operatorname{erfc}(-x) - i \operatorname{erfc} x = 2x$$

$$i^3 \operatorname{erfc}(-x) - i^3 \operatorname{erfc} x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{3} x^3$$

$$i^5 \operatorname{erfc}(-x) - i^5 \operatorname{erfc} x = \frac{1}{2^3 \cdot 2!} x + \frac{1}{2 \cdot 2! \cdot 3!} x^3 + \frac{2}{5!} x^5$$

$$i^{2k+1} \operatorname{erfc}(-x) - i^{2k+1} \operatorname{erfc} x = \frac{x}{2^{2k-1} k!} + \frac{x^3}{2^{2k-3} (k-1)! 3!} + \frac{x^5}{2^{2k-5} (k-2)! 5!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{2^{-1} (2k+1)!}$$

2. Формулары дэлелдеу

$$i^n \operatorname{erfc}(-x) - (-1)^n i^n \operatorname{erfc} x = \frac{1}{2^{n-1} n!} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{x^2} \operatorname{erfc} x) \quad (1.7)$$

Мұндағы

$$\operatorname{erfx} = 1 - \operatorname{erfcx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-v^2) dv$$

Рекурентті формуланы (1.3) қолдана отырып, математикалық индукция әдісімен шығарылады.

3. Формуланың (1.7) оң жақ бөлігін бөліп, келесіні аламыз

$$i^n \operatorname{erfc}(-x) - (-1)^n i^n \operatorname{erfcx} = P_n(x) \operatorname{erfx} - Q_n(x) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \quad (1.8)$$

мұндағы көпмүшелі  $P_n(x)$  және  $Q_n(x)$  формулалар арқылы анықталады

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{n-2m}}{2^{2m-1} m!(n-2m)!}$$

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} H_{n-k-1}(x)}{2^{n-k} (n-k)!} P_k(x)$$

4. (1.7), (1.8) формулаларынан біз Хартридің бүтін индексінің функцияларына арналған айқын өрнектерді аламыз

$$i^n \operatorname{erfcx} = \frac{(-1)^n}{2} [P_n(x) \operatorname{erfcx} + Q_n(x) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)] \quad (1.9)$$

$$i^n \operatorname{erfc}(-x) = \frac{1}{2} [P_n(x) \operatorname{erfc}(-x) - Q_n(x) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)] \quad (1.10)$$

5. Лопиталдың ережесін және (1.1) формуласын қолдану арқылы келесіні анықтау қиын емес

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{i^n \operatorname{erfc}(-x)}{x^n} = \frac{2}{n!} \quad (1.11)$$

### 1.3. Хартри функцияларын жалпылау

Хартри функцияларын теңдеулер (1.5) үшін тиімді қолдану келесі сұрақты тудырады: басқа теңдеулерді шешу үшін ұқсас функцияларды табуға және пайдалануға болады ма? Бұл сұраққа жауап беру үшін теңдеуді қарастырайық

$$x \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left( \frac{\nu+1}{2} - x \right) \frac{d\phi}{dx} + \frac{\beta}{2} \phi = 0$$

$$\nu = 0$$

$$-\infty < \beta < \infty$$

Бұл теңдеуде екі сызықты тәуелсіз шешім бар екені белгілі

$$\phi_1(x) = \Phi\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{\nu+1}{2}; x\right),$$

$$\phi_2(x) = x^{\frac{1-\nu}{2}} \Phi\left(\frac{1-\beta-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; x\right) \quad (1.12)$$

мұндағы  $\Phi(a, b; x)$  бұл өзгешеленген гипергеометриялық функция.  $x = -z^2$  болатын  $T(z) = \phi(x)$  белгіленсе,  $T(z)$  теңдеуді қанағаттандыратын анықтауға болады

$$\frac{d^2 T}{dz^2} + \left( \frac{\nu}{z} + 2z \right) \frac{dT}{dz} - 2\beta T(z) = 0$$

Бұл теңдеудің көмегімен функция

$$\theta(z, t) = (2a\sqrt{t})^\beta T\left(\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right)$$

Теңдеуді қанағаттандыратынын тексеруге болады

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\nu}{z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad (1.13)$$

Осыдан функциялар

$$S_{\beta, \nu}^{(1)}(z, t) = (2a\sqrt{t})^\beta \Phi\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{\nu+1}{2}; -\frac{z^2}{4a^2 t}\right) \quad (1.14)$$

$$S_{\beta, \nu}^{(2)}(z, t) = (2a\sqrt{t})^\beta \left(\frac{z^2}{4a^2 t}\right)^{\frac{1-\nu}{2}} \Phi\left(\frac{1-\nu-\beta}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{z^2}{4a^2 t}\right)$$

(1.13) теңдеуін қанағаттандырады. Олардың сызықтық комбинациясы  $\Psi(a,b;x)$  екінші түрдегі өзгешеленген гипергеометриялық функция көмегімен жазылуы мүмкін:

$$\Gamma_{\beta,\nu}(z,t) = \frac{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})}{\Gamma(\frac{1-\nu-\beta}{2})} S_{\beta,\nu}^{(1)}(z,t) + \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2})}{\Gamma(-\frac{\beta}{2})} S_{\beta,\nu}^{(2)}(z,t) = (2a\sqrt{t})^\beta \Psi(-\frac{\beta}{2}, \frac{\nu+1}{2}; -\frac{z^2}{4a^2t})$$

$\Gamma_{\beta,\nu}(z,t)$  функциясын шексіз аймақтарға қолданғанда, шектеулі аймақтарға байланысты мәселелерді шешу үшін  $S_{\beta,\nu}(z,t)$  функцияны қолдану тиімді.

Өзгешеленген гипергеометриялық функцияның интегралдық көрінісін қолдана отырып,

$$\Phi(-\frac{\beta}{2}, \mu; -z^2) = \frac{2\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{\beta}{2})} \exp(-z^2) z^{-\mu+1} \int_0^\infty \exp(-x^2) x^{\mu+\beta} I_{\mu-1}(2zx) dx \quad (1.15)$$

Келесіні анықтауға болады

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^\beta} \Phi(-\frac{\beta}{2}, \mu; -z^2) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{\beta}{2})} \quad (1.16)$$

Бұл формула - (1.11) формуласының жалпылама түрі. Ерекше жағдайларды қарастырайық.

1<sup>0</sup>. **Ұшақ жағдайы** ( $\nu = 0$ ).

(1.15), (1.2) формулаларын қолдана отырып және оң жақ интегралды бағалай отырып, біз келесіні анықтаймыз

$$\Phi(-\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}; -x^2) = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})} [i^\beta \operatorname{erfc}(-x) + i^\beta \operatorname{erfc}x] \quad (1.17)$$

$$\Phi(\frac{1-\beta}{2}, \frac{3}{2}; -x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\frac{\beta}{2}+1)} \cdot \frac{1}{x} [i^\beta \operatorname{erfc}(-x) - i^\beta \operatorname{erfc}x] \quad (1.18)$$

Мысалы гипергеометриялық функция сын бұл жағдайда ұшақ Хартри функциялары ( 1.1 ) арқылы берілуі мүмкін, бірақ функциялар

$$S_{\beta,0}^{(1)}(z,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})} (2a\sqrt{t})^\beta [i^\beta \operatorname{erfc} \frac{-z}{2a\sqrt{t}} + i^\beta \operatorname{erfc} \frac{z}{2a\sqrt{t}}] \quad (1.19)$$

$$S_{\beta,0}^{(2)}(z,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\frac{\beta}{2}+1)} (2a\sqrt{t})^\beta [i^\beta \operatorname{erfc} \frac{-z}{2a\sqrt{t}} - i^\beta \operatorname{erfc} \frac{z}{2a\sqrt{t}}] \quad (1.20)$$

(1.5) теңдеуді қанағаттандырады .

2<sup>0</sup>. Цилиндрлік жағдай ( $\nu = 1$ )

Бұл жағдайда екі функция (1.14) тең сәйкес келеді:

$$S_{\beta,1}^{(1)}(z,t) = S_{\beta,1}^{(2)}(z,t) = (2a\sqrt{t})^\beta \Phi(-\frac{\beta}{2}, 1; -\frac{z^2}{4a^2t})$$

Қатардағы гипергеометриялық функцияны жіктей отырып,

$$\Phi(-\frac{\beta}{2}, 1; -x^2) = \Gamma(\frac{\beta}{2} + 1) \sum \frac{x^{2k}}{(k!) \Gamma(\frac{\beta}{2} + 1 - k)}$$

$\beta = 2n$  бүтін сан болса біз қорытындылай аламыз, онда бұл қатарлар Лагерра көпмүшелілігіне айналады

$$\Phi(-n, 1; -x^2) = \frac{n!}{(2n)!} L_n(-x^2) \quad (1.21)$$

Мұндағы

$$L_n(z) = \frac{1}{n} e^z \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^n)$$

- Laguerre көпмүшелігі.

Осылайша цилиндрлік жылу теңдеулерінің біркелкі индексін ішінара шешу үшін қолданылады

$$S_{2n,1}^{(k)}(z,t) = \frac{n!}{(2n)!} (4a^2t)^n L_n(-\frac{z}{4a^2t}) \quad (1.22)$$

3<sup>0</sup>. Сфералық жағдай ( $\nu = 2$ )

Бұл жағдай ұшақ жағдайынан оң жақ бөлік (1.19) және (1.20) формулалардағы  $\frac{1}{z}$  факторымен ғана ерекшеленеді. Бұл жағдай ұшақ



жағдайынан ( $\nu=0$ ) оң жақ бөлік (1.19) және (1.20) формулалардағы бір фактормен ғана ерекшеленеді .

Осылайша, функциялар (\*) - кез келген  $\nu > 0$  үшін Хартридің интегралдық қате функцияларын жалпылайды.

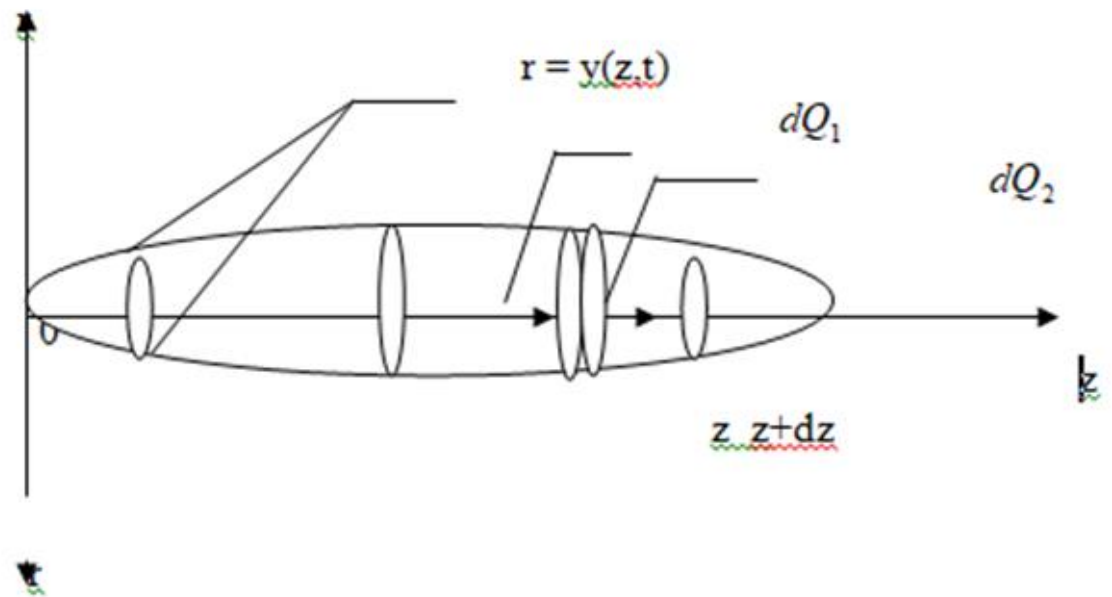
(1.1) – (1.4) ұқсас формулалар гипергеометриялық функцияның қасиеттерінен пайда болады:

$$\frac{\partial \Phi(\alpha, \gamma; z)}{\partial z} = \frac{\alpha}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma; z) \quad (1.23)$$

$$\Phi(\alpha + 1, \gamma + 1; z) = \frac{\gamma}{z} [\Phi(\alpha + 1, \gamma; z) - \Phi(\alpha, \gamma; z)] \quad (1.24)$$

#### 1.4 Айнымалы көлденең қимасы бар жылу теңдеуі

( 1.14 ) Функциялары  $\nu=1,2,3$  үшін, бірақ сонымен қатар кез-келген нақты  $\nu > 0$  үшін де, ( 1.13 ) теңдеуін қанағаттандыратынын айта кету керек. ( 1.13 ) Теңдеудің  $\nu > 0$  байланысты физикалық мағынасын түсіндіру үшін (1.13) қисық  $r = y(z, t)$   $z$ - axes байланысты революциясымен осьтердің айналуы арқылы пайда болатын бетті қарастырайық. Айта кету керек, температура градиентінің радиалды компоненті қатты бетімен шектелген, осьтік компонентпен салыстырғанда аз болады , мысалы қатты денені жылу ағынының тек осьтік компоненті болатын айнымалы көлденең қимасы бар диапазон ретінде қарастыруға болады ( 1 сурет )



Сурет 1 - Айнымалы көлденең қимасы бар қатты дене

Сурет 1 – де қатты денені жылу ағынының тек осьтік компоненті болатын айнымалы көлденең қимасы қарастырылған. Осьтік компонентпен салыстырғанда аз болатыны айқын көрсетілген.

Дәнекер элементіне  $z$  және  $z + dz$  көлденең қималар мен  $y$  және  $y + dy$  тиісті радиустармен және  $dt$  уақыт аралығында кіретін  $dQ_1$  күштің мөлшері анықталған

$$dQ_1 = -\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_z \pi y^2 dt$$

мұндағы  $\theta(z, t)$  - температура және  $\lambda$  жылу өткізгіштігі,  $dQ_2$  мәні  $z + dz$  көлденең қима бұл элементінен алшақтайды

$$dQ_2 = -\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z+dz} \pi (y + dy)^2 dt$$

Тейлор жіктеуін қолдана отырып

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z+dz} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_z + \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right|_z dz + O(dz^2)$$

және  $(y + dy)^2 = y^2 + 2dy + O(dy^2)$  мәнді ала отырып есептейміз

$$dQ_2 - dQ_1 = -\pi\lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_z 2y dy dt - \pi\lambda \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right|_z y^2 dz dt + O(dz^2, dy^2)$$

Элементтің қыздыруына (немесе салқындатуына) арналған күш  $dt$  Уақыт аралығында  $\theta$  температурадан  $\theta + d\theta$  температураға дейін төменде көрсетіледі

$$dQ_3 = c\gamma \frac{\pi}{3} [(y + dy)^2 + y^2 + y(y + dy)] dz d\theta = \pi c\gamma y^2 dz \frac{\partial \theta}{\partial t} dt + O(dy)$$

Егер қызудың кез-келген мәні  $q(z, t)$  қарқындылығымен (бірлік көлеміне келетін күш) ішкі элемент болса, онда бұл қосымша күш –

$$dQ_4 = q(z, t) \pi y^2 dz dt$$

Күш балансынан

$$dQ_2 - dQ_1 + dQ_3 = dQ_4$$

Келесіні аламыз

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{2y'_z}{y} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{c\gamma} q(z, t) \quad (1.25)$$

немесе балама түрі пайда болады

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{a^2}{y^2(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ y^2(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{1}{c\gamma} q(z, t) \quad (1.26)$$

(1.13) теңдеуі (1.25) үшін  $y(z, t) = z^{v/2}$  және  $q(z, t) = 0$  болатын ерекше жағдай.

Осы теңдеулерді қарастыру арқылы біз қойылған сұраққа жауапты таптық деп айтуға болады. Хартри функцияларын теңдеулер (1.5) үшін тиімді қолдануға болады және басқа теңдеулерді шешу үшін ұқсас функцияларды табуға және пайдалануға болады. Бұл сұраққа жауапты берілген теңдеулерді қарастыру арқылы тауып, көз жеткіздік. (1.13) теңдеуі (1.25) теңдеуінің ерекше жағдайы болды.

Соңғы нәтижеміз:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{2y'_z}{y} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{c\gamma} q(z, t)$$

## II ЖЫЛУ ӨТКІЗУ ТЕҢДЕУЛЕРІ

### 2.1 Жылулық теңдеу. Жарты шексіз жолақ

Мәселенің шешімі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

$$0 < x < \infty$$

$$t > 0$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = f(t) \quad (2.3)$$

$$u(\infty, t) = 0 \quad (2.4)$$

$$\phi(0) = f(0), \quad \phi(\infty) = 0 \quad (2.5)$$

мұндағы  $\phi(x)$  және  $f(t)$  аналитикалық функциялар, келесі түрде көрсетіледі

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2a\sqrt{t})^n \left[ A_n i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2a\sqrt{t}} + B_n i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a\sqrt{t}} \right] \quad (2.6)$$

Бұл функция жоғарыда аталған кез-келген  $A_n$  and  $B_n$  тұрақтылар үшін жылу теңдеуін (2.1) қанағаттандырады. Бастапқы және (2.2), (2.3) шекаралық шарттарды қанағаттандыру үшін, біз Маклорен қатарында  $\phi(x)$  and  $f(t)$  функцияларын жіктейміз:

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \quad (2.7)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot t^n \quad (2.8)$$

(1.11) Формула бойынша алынуы мүмкін

$$\lim_{t \rightarrow 0} (2a\sqrt{t})^n i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a\sqrt{t}} = \frac{2}{n!} x^n \quad (2.9)$$

мұндағы

$$\lim_{t \rightarrow 0} (2a\sqrt{t})^n i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2a\sqrt{t}} = 0 \quad (2.10)$$

(2.2) Бастапқы шарт келесі нәтиже береді

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} B_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

содан

$$B_n = \frac{1}{2} \phi^{(n)}(0), \quad n=1, 2, \dots \quad (2.11)$$

(2.3) шекаралық шарттарды қолдана отырып, біз келесі нәтиже аламыз

$$u(0,t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (A_n + B_n) \cdot i^n \operatorname{erfc} 0 \cdot (2a\sqrt{t})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \quad (2.12)$$

Осыны ескере отырып

$$i^n \operatorname{erfc} 0 = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{n! \sqrt{\pi}}$$

$$i^{2m} \operatorname{erfc} 0 = \frac{1}{2^{2m} m!} \tag{2.13}$$

$$i^{2m+1} \operatorname{erfc} 0 = \frac{m!}{(2m+1)! \sqrt{\pi}}$$

және (2.12) көрсетілген коэффициенттерді салыстыра отырып, келесі нәтиже көреміз

$$A_{2m+1} + B_{2m+1} = 0$$

$$A_{2m} + B_{2m} = 2^{2m-1} f^{(m)}(0) \tag{2.14}$$

содан

$$A_{2m+1} = -\frac{1}{2} \phi^{(2m+1)}(0)$$

$$A_{2m} = 2^{2m-1} f^{(m)}(0) - \frac{1}{2} \phi^{(2m)}(0) \tag{2.15}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

(2.6), (2.11), (2.15) мәндері (2.1) - (2.5) мәселелері үшін шешім береді.

Айта кету керек, қатардың жинақталу радиусы (2.6) қатары (2.7) және (2.8) конвергенциясының ең төменгі деңгейіне тең.

## 2.2 Жылуға байланысты мәселе

Идеалды байланыстары бар екі жартысы шексіз жолақтар арасындағы жылу беру келесі теңдеулермен сипатталады:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

$$-\infty < x < 0$$

(2.16)

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

$$0 < x < \infty$$

Бастапқы шарттарды қосқанда:

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x) \quad (2.17)$$

$$u_2(x, 0) = \varphi_2(x) \quad (2.18)$$

температуралық және жылу ағындарының конъюгация шарттары

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) \quad (2.19)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} \quad (2.20)$$

және шексіз шарттар

$$u_1(-\infty, t) = u_2(\infty, t) = 0 \quad (2.21)$$

Бастапқы функцияларды Маклорен қатарында жіктей отырып,



$$\varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_1^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \varphi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_2^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (2.22)$$

біз шешім ұсынамыз

$$u_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2a_1\sqrt{t})^n [A_n i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2a_1\sqrt{t}} + B_n i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_1\sqrt{t}}] \quad (2.23)$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2a_2\sqrt{t})^n [C_n i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2a_2\sqrt{t}} + D_n i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_2\sqrt{t}}] \quad (2.24)$$

$A_n$  және  $D_n$  коэффициенттерін алдыңғы жағдай сияқты анықтауға болады ((2.22) жіктемесі көмегімен (2.17), (2.18) бастапқы жағдайлардан (2.11) формуласын қараңыз):

$$A_n = \frac{1}{2} \varphi_1^{(n)}(0) \quad D_n = \frac{1}{2} \varphi_2^{(n)}(0) \quad (2.25)$$

ал шарттар (2.19), (2.20) теңдеулердің қалған бөлігін анықтаса

$$a_1^n (A_n + B_n) = a_2^n (C_n + D_n) \quad (2.26)$$

$$\lambda_1 a_1^{n-1} (A_n - B_n) = \lambda_2 a_2^{n-1} (C_n - D_n) \quad (2.27)$$

$B_n$  және  $C_n$  үшін мәндерді береді

$$C_n = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} A_n + D_n \quad (2.28)$$

$$B_n = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n (C_n + D_n) - A_n$$

### 2.3 Қозғалыс шекарасы бар облыс

Жылулық теңдеуі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.29)$$

қозғалыстағы шекарасы бар интервалда беріледі  $D: \{0 < x < t, t > 0\}$ ,

төмендегі шекаралық шарттар

$$u(0, t) = e^t \quad (2.30)$$

$$u(t, t) = 1 \quad (2.31)$$

және фитингтік жағдай

$$u(0, 0) = 1 \quad (2.32)$$

Бұл тест мәселесінің нақты шешімі

$$u(x, t) = e^{t-x} \quad (2.33)$$

Хартри функцияларын қолдана отырып,  $u_a(x, t)$  мәселесінің шешімін шамалы анықтайық:

$$u_a(x,t) = \sum_{k=0}^n t^{k/2} \left( A_k i^k \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}} - B_k i^k \operatorname{erfc} \frac{-x}{2\sqrt{t}} \right) \quad (2.34)$$

Бұл функция жылу теңдеуін (3.1) қанағаттандырады. (3.2) және (3.3) Шекаралық шарттарды қанағаттандыра, біз келесі нәтиже аламыз

$$e^t = \sum_{k=1}^n t^{k/2} (A_k + B_k) i^k \operatorname{erfc} 0 \quad (2.35)$$

$$1 = \sum_{k=1}^n t^{k/2} \left( A_k i^k \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{t}}{2} + B_k i^k \operatorname{erfc} \frac{-\sqrt{t}}{2} \right) \quad (2.36)$$

Ауыстырудан кейін

$$A_k + B_k = C_k \quad (2.37)$$

Біз төмендегі теңдеулер жүйесін аламыз

$$\sum_{k=0}^n C_k i^k \operatorname{erfc} 0 \cdot t^{k/2} = e^t \quad (2.38)$$

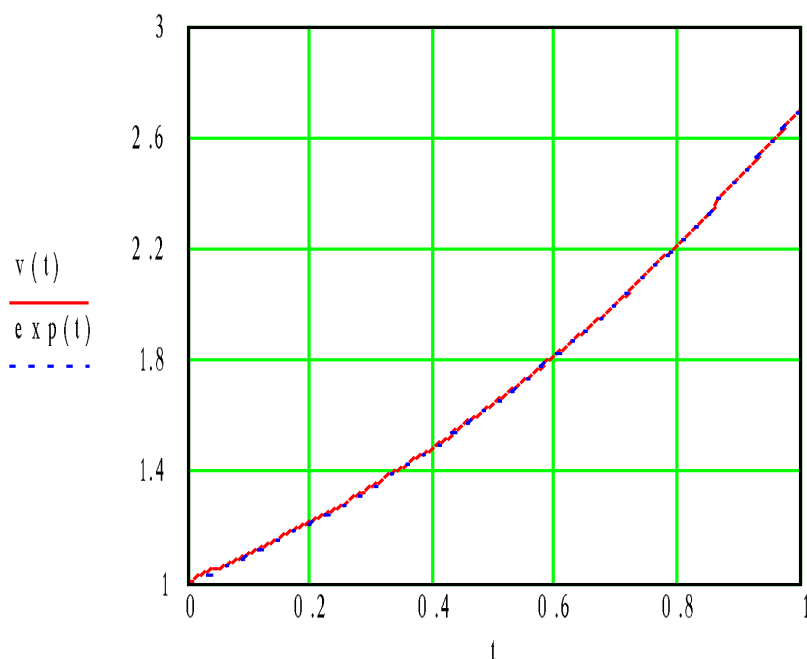
$$\sum_{k=0}^n B_k \left( i^k \operatorname{erfc} \frac{-\sqrt{t}}{2} - i^k \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{t}}{2} \right) t^{k/2} = 1 - \sum_{k=0}^n C_k i^k \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{t}}{2} t^{k/2} \quad (2.39)$$

Егер  $n = 5$  болса және  $t = t_i = \frac{2i}{10}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  нүктелерінде (2.38) және (2.39) теңдеулерін қанағаттандыратын болса, біз  $B_k$  және  $C_k$  үшін келесі мәндерді аламыз:

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 0.276, \quad C_2 = -0.232, \quad C_3 = 28.952, \quad C_4 = -87.416, \quad C_5 = 173.348$$

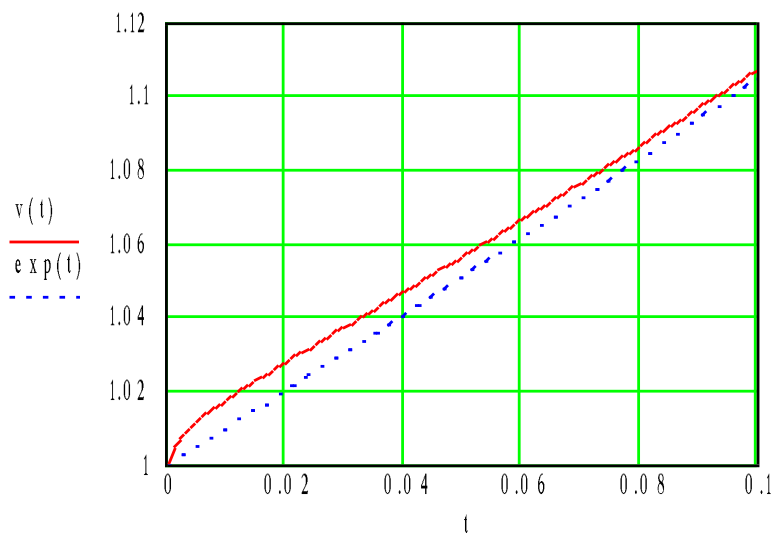
$$B_0 = 0.401, \quad B_1 = -0.279, \quad B_2 = -1.333, \quad B_3 = 6.033, \quad B_4 = -11.389, \quad B_5 = 8.884$$

1 сурет  $v(t) = \sum_{k=0}^5 C_k i^k \operatorname{erfc} 0 \cdot t^{k/2}$  жуықтау функциясының графиктерін және  $x=1$  мәніндегі  $e^t = \exp(t)$  бастапқы функциясын бейнелейді, олар әрқашан бір-біріне тең.



Сурет 2 – жуықтау функциясының графигі

Жуықтаудың ең үлкен кәтелігі нөлге жақын орналасқан. Бұл аймақтың графигі 2-суретте көрсетілген.



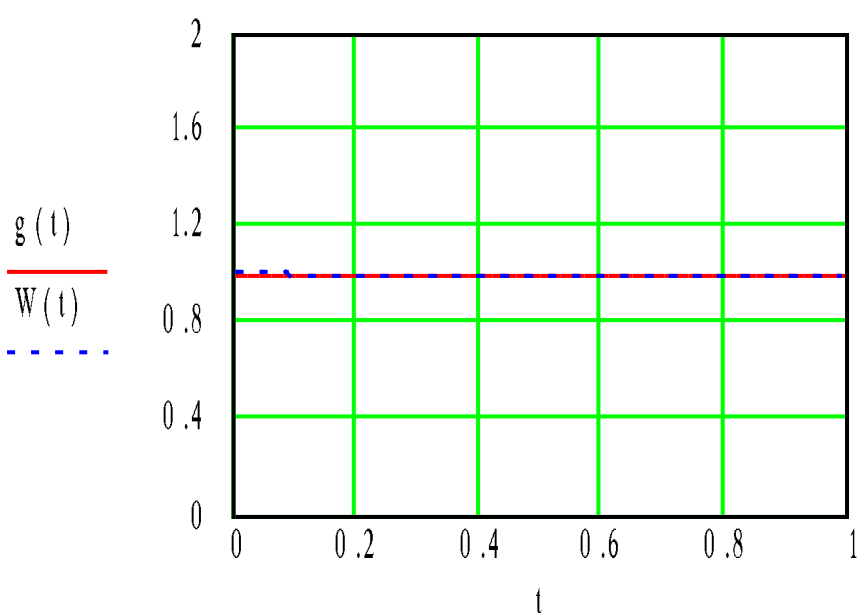
### Сурет 3 – ең үлкен қателік

Сәйкестік қателігі 1% -дан аз екенін көруге болады.

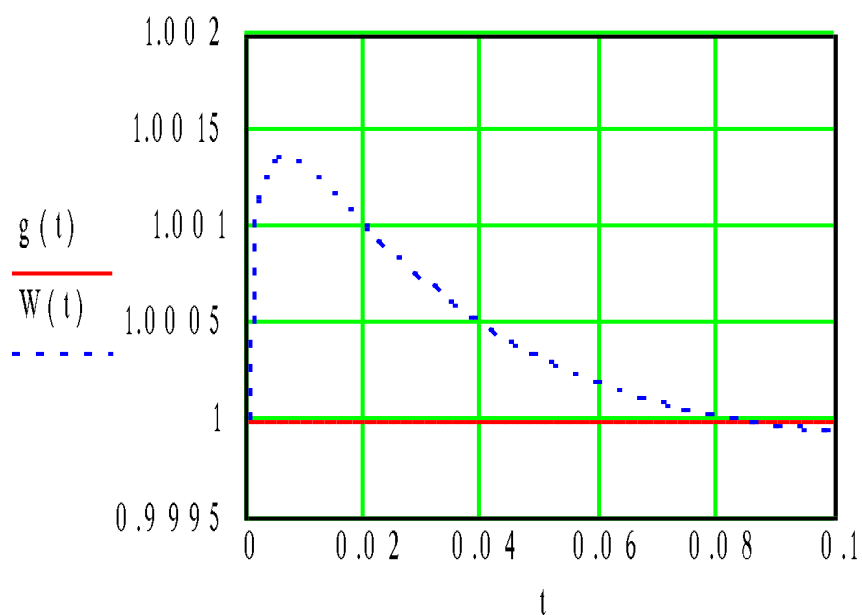
Осындай жағдайды  $x = t$  екінші шекарада байқауға болады.

$$g(t) = 1 \quad \text{және} \quad W(t) = \sum_{k=1}^5 t^{k/2} \left( A_k i^k \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{t}}{2} + B_k i^k \operatorname{erfc} \frac{-\sqrt{t}}{2} \right) \text{ функциялар}$$

графикі 4 және 5 суреттерде бейнеленген



Сурет 4 -  $g(t) = 1$  функциясының графигі



Сурет 5 -  $W(t) = \sum_{k=1}^5 t^{k/2} \left( A_k i^k \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{t}}{2} + B_k i^k \operatorname{erfc} \frac{-\sqrt{t}}{2} \right)$  функциясының графигі

Тағы да жуықтаудың ең үлкен қателігі 0,15% -дан аз.

Осылайша, егер бастапқы  $e^t$  және функцияларды жуықталған функциялармен ауыстырсақ, онда жылу теңдеуі үшін Максимум қағидасына сәйкес жылу өткізгіштіктің толық облысындағы жуықтау қателігі шекаралардағы қателіктен үлкен болмайды.

$D: 0 < t < 1, 0 < x < \alpha(t)$  Жылжымалы облыста берілген жылу теңдеуі үшін негізгі мәселе - функцияның сызықтық комбинациясы арқылы кез келген  $f(t)$  функцияны жуықтату мүмкіндігін зерттеу

$$1, \operatorname{erfc} \frac{\alpha(t)}{2a\sqrt{t}}, t^{1/2} i \operatorname{erfc} \frac{\pm\alpha(t)}{2a\sqrt{t}}, t \cdot i^2 \operatorname{erfc} \frac{\pm\alpha(t)}{2a\sqrt{t}}, \dots, t^{n/2} i^n \operatorname{erfc} \frac{\pm\alpha(t)}{2a\sqrt{t}}$$

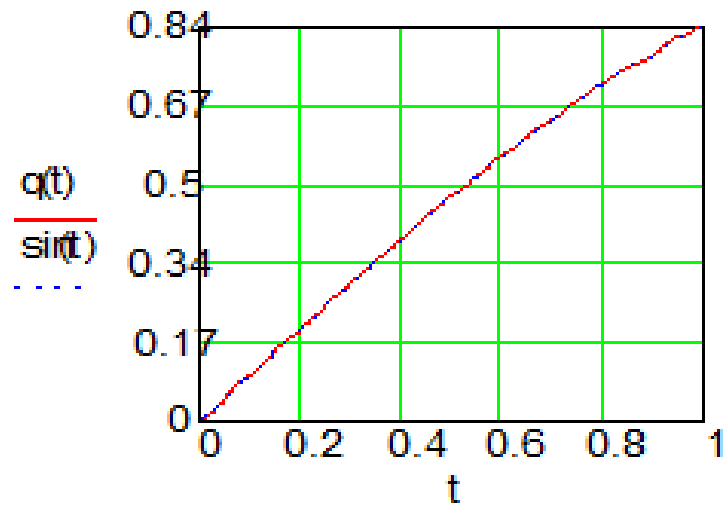
және жуықтаудың қателігін бағалау.

Мұндай жуықтату дұрыс деп есептеледі. Мысалы,  $f(t) = \sin t$

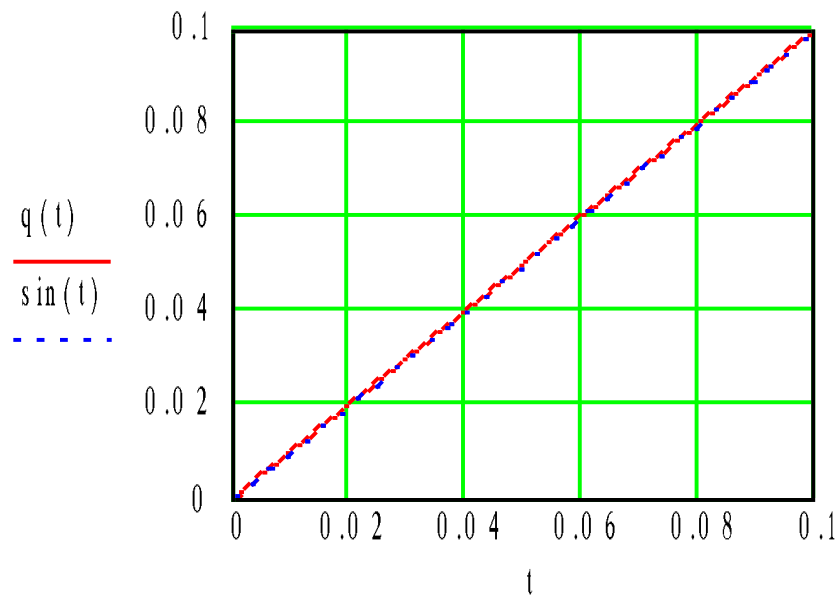
жуықтатылуы  $q(t) = \sum_{k=0}^5 C_k i^k \operatorname{erfc} 0 \cdot t^{k/2}$  функция арқылы

$$C_0 = 0, C_1 = 5.995 \cdot 10^{-3}, C_2 = 3.994, C_3 = -0.89, C_4 = 9.168, C_5 = -38.615$$

6 және 7 суреттерде бейнеленген.



Сурет 6 -  $f(t) = \sin t$  функциясының графигі



Сурет 7 -  $q(t) = \sum_{k=0}^5 C_k i^k \operatorname{erfc} 0 \cdot t^{k/2}$  функциясының графигі

Толық дерлік ұқсастық көрінеді. Жуықтау қателігі өте аз шама болып келеді.

Осы есептеулердің арқасында шешімнің дұрыстығына көз жеткізіп, қателіктің аздығын анықтадық.

Енді біз Стефан есебі мен Веригин есептерін қарастырмыз.

### III Шекаралық ағынмен екі жақты Стефан мәселесі.

#### 3.1 Математикалық модель

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

$$0 < x < \alpha(t)$$

(3.1)

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

$$\alpha(t) < x < \infty$$

шекаралық және бастапқы шарттармен:

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = f(t) \quad (3.2)$$

$$u_2(x,0) = \varphi(x), \quad (3.3)$$

еркін шекарадағы температуралық және жылу ағындарының конъюгация шарттары

$$u_1(\alpha(t),t) = u_2(\alpha(t),t) = U_m$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1(\alpha(t),t)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2(\alpha(t),t)}{\partial x} + \rho L \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\alpha(0) = 0$$

Және шексіздіктегі нөлдік шарттар



$$u_2(\infty, t) = 0$$

### 3.2 Шешім әдісі

Бастапқы және шекаралық функцияларды Маклорен қатарында жіктей отырып

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \tag{3.4}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

біз төмендегі шешім түрінде ұсынамыз

$$u_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (2a_1 \sqrt{t})^{2n+1} \left[ i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_1 \sqrt{t}} - i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{x}{2a_1 \sqrt{t}} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (2a_1 \sqrt{t})^n \left[ i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_1 \sqrt{t}} + i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2a_1 \sqrt{t}} \right] \tag{3.5}$$

$$u_2(x, t) = U_m + \sum_{n=1}^{\infty} D_n (2a_2 \sqrt{t})^n \left[ i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_2 \sqrt{t}} + (-1)^n i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2a_2 \sqrt{t}} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} B_n (2a_2 \sqrt{t})^n i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2a_2 \sqrt{t}} \tag{3.6}$$

$C_n$  және  $D_n$  коэффициенттері бұрынғы жағдайда да ұқсас анықталуы мүмкін ((3.4) жіктелуімен қоса бастапқы (3.2), (3.3) және шекаралық жағдайлардан болатын (2.9) - (2.11)) формулаларды қараңыз):

$$C_n = -\frac{1}{2\lambda_1 a_1^n} f^{(n)}(0)$$

$$D_n = \frac{1}{2} \varphi^{(n)}(0) \quad (3.7)$$

$$\varphi(0) = U_m$$

Осылайша, шарттар (3.2) - (3.3) қанағаттандырылады.

Қазір біз төменде формада көрсетілген  $\alpha(t)$  бос шекарадағы қалған шарттарды қанағаттандыру үшін  $A_n$  және  $B_n$  анықтауымыз керек.

$$\alpha(t) = t^\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} t^{n/2} \quad (3.8)$$

Егер (3.8)-ді еркін шекарадағы температуралық және жылу ағындарының конъюгация шарттарына ауыстыратын болсақ және күштерді салыстыратын болсақ, біз  $\gamma = 1$  екенін анықтай аламыз.

Осылайша  $\alpha(t)$  келесі түрде жазылады

$$\alpha(t) = 2a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} \tau^{n+1}$$

мұндағы

$$\tau = \sqrt{t}.$$

Қазір еркін шекарадағы температуралық және жылу ағындарының конъюгация шарттарын  $\tau$  мәнінде қайта жазамыз және дифференциациялау және  $\tau = 0$  қою арқылы сол және оң жақ бөліктерінде тең дәрежеде теңдеулерді салыстыруға болады

Біз келесіні аламыз

$$u_1(\alpha(\tau), \tau)|_{\tau=0} = u_2(\alpha(\tau), \tau)|_{\tau=0} = U_m$$

$$\frac{\partial^m u_1(\alpha(\tau), \tau)}{\partial \tau^m} \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial^m u_2(\alpha(\tau), \tau)}{\partial \tau^m} \Big|_{\tau=0} = 0$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial^m u_{1x}(\alpha(\tau), \tau)}{\partial \tau^m} \Big|_{\tau=0} = -\lambda_2 \frac{\partial^m u_{2x}(\alpha(\tau), \tau)}{\partial \tau^m} \Big|_{\tau=0} = a_1 \rho L \left( \frac{m}{2} + 1 \right) m! \alpha_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Мұндағы  $m = 0$

$$A_0 = U_m$$

$$B_0 = 0$$

(3.9)

$$\alpha_1 = -\frac{a_1 f(0)}{\lambda_1}$$

### 3.3 Фаа-ди-Бруно формуласы

Негізгі мәселе - қалған белгісіз коэффициенттерді табу болып табылады.

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial^m [(2\tau)^{2n} [i^{2n} \operatorname{erfc}(-\xi(\tau)) + i^{2n} \operatorname{erfc}(\xi(\tau))]]}{\partial \tau^m} \right|_{\tau=0} = \\
& = \sum_{l=0}^m 2^{2n} \binom{m}{l} \frac{(2n)!}{(2n-m+l)!} \tau^{2n-m+l} \left. \frac{\partial^m [i^{2n} \operatorname{erfc}(-\xi(\tau)) + i^{2n} \operatorname{erfc}(\xi(\tau))]}{\partial \tau^m} \right|_{\tau=0} = \\
& = 2^{2n} \frac{m!}{(m-2n)!} \left. \frac{\partial^{m-2n} [i^{2n} \operatorname{erfc}(-\xi(\tau)) + i^{2n} \operatorname{erfc}(\xi(\tau))]}{\partial \tau^m} \right|_{\tau=0}
\end{aligned}$$

$$\xi(\tau) = \frac{\omega}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{p+1} \tau^{p+1} \quad (3.10)$$

$$\omega = a_1 / a_2$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Бұл мақсатта біз құрама функцияның туындысы үшін Фаа-ди-Бруно формуласын (Арбогаст формуласын) қолданамыз. Егер  $g = g(x)$  және  $x = f(t)$  болса, онда

$$\frac{d^m}{dt^m} g[f(t)] = \sum_{b_i} \frac{m!}{b_1! b_2! \dots b_m!} g^{(k)}[f(t)] \cdot \left( \frac{f'(t)}{1!} \right)^{b_1} \left( \frac{f''(t)}{2!} \right)^{b_2} \dots \left( \frac{f^{(m)}(t)}{m!} \right)^{b_m} \quad (3.11)$$

Мұндағы  $\sum_{\beta_i} \beta_i = 0, 1, 2, \dots$  мәнінің сомасын білдіреді, содан

$$b_1 + b_2 + \dots + b_m = k$$

$$b_1 + 2b_2 + \dots + mb_m = m$$

Егер

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n + \dots$$

содан

$$\left. \frac{d^m}{dt^m} g(f(t)) \right|_{t=0} = \sum_{b_i} g^{(k)}(\alpha_0) \frac{m! \alpha_1^{b_1} \alpha_2^{b_2} \dots \alpha_m^{b_m}}{b_1! b_2! \dots b_m!}$$

Мысалы.

$$g(x) = i^n \operatorname{erfc} x, \quad x = \alpha(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 \tau + \alpha_1 \tau^2 + \alpha_1 \tau^3 + \dots + \alpha_1 \tau^n + \dots$$

$$\left. \frac{d^m}{d\tau^m} i^n \operatorname{erfc} \alpha(\tau) \right|_{\tau=0} = m! \sum_{b_i} (-1)^k i^{n-k} \operatorname{erfc}(\alpha_0) \frac{\alpha_1^{b_1}}{b_1!} \cdot \frac{\alpha_1^{b_2}}{b_2!} \dots \frac{\alpha_m^{b_m}}{b_m!}$$

Коэффициенттер кестесі ( $m = 6$ )

$$\frac{d^6}{dt^6} [g(x)]$$

$$x = f(t)$$

$$\frac{d^6}{dt^6} g[f(t)] = \sum_{b_i} \frac{6!}{b_1! b_2! \dots b_6!} g^{(k)}[f(t)] \left[ \frac{f^{(1)}(t)}{1!} \right]^{b_1} \left[ \frac{f^{(2)}(t)}{2!} \right]^{b_2} \dots \left[ \frac{f^{(6)}(t)}{6!} \right]^{b_6}$$

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5 + 6b_6 = 6$$

$$k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$$

$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$k$	Мәні
0	0	0	0	0	1	1	$\frac{6!}{1!} g^{(1)} \frac{f^{(6)}}{6!} = g^{(1)} f^{(6)}$
1	0	0	0	1	0	2	$\frac{6!}{1!} g^{(2)} \frac{f^{(1)}}{1!} \frac{f^{(5)}}{5!} = 6g^{(2)} f^{(1)} f^{(5)}$
0	1	0	1	0	0	2	$\frac{6!}{1!} g^{(2)} \frac{f^{(2)}}{2!} \frac{f^{(4)}}{4!} = 15g^{(2)} f^{(2)} f^{(4)}$
2	0	0	1	0	0	3	$\frac{6!}{2!} g^{(3)} \left[ \frac{f^{(1)}}{1!} \right]^2 \frac{f^{(4)}}{4!} = 15g^{(3)} f^{(1)} f^{(4)}$
0	0	2	0	0	0	2	$\frac{6!}{2!} g^{(2)} \left[ \frac{f^{(3)}}{3!} \right]^2 = 10g^{(2)} [f^{(3)}]^2$
1	1	1	0	0	0	3	$\frac{6!}{1!} g^{(3)} \frac{f^{(1)}}{1!} \frac{f^{(2)}}{2!} \frac{f^{(3)}}{3!} = 60g^{(2)} f^{(2)} f^{(4)}$
3	0	1	0	0	0	4	$\frac{6!}{1!} g^{(4)} \frac{f^{(3)}}{3!} = 120g^{(4)} f^{(3)}$
0	3	0	0	0	0	3	$\frac{6!}{3!} g^{(3)} \left[ \frac{f^{(2)}}{2!} \right]^3 = 15g^{(3)} [f^{(2)}]^3$
2	2	0	0	0	0	4	$\frac{6!}{2!2!} g^{(4)} \left[ \frac{f^{(1)}}{1!} \right]^2 \left[ \frac{f^{(2)}}{2!} \right]^2 = 45g^{(4)} [f^{(1)}]^2 [f^{(2)}]^2$
4	1	0	0	0	0	5	$\frac{6!}{4!1!} g^{(5)} \left[ \frac{f^{(1)}}{1!} \right]^4 \frac{f^{(2)}}{2!} = 15g^{(5)} [f^{(1)}]^4 f^{(2)}$
6	0	0	0	0	0	6	$\frac{6!}{6!} g^{(6)} \left[ \frac{f^{(1)}}{1!} \right]^6 = g^{(6)} \left[ \frac{f^{(1)}}{1!} \right]^6$

Кесте 1 - Коэффициенттер кестесі

### 3.4 Шексіз шекарадағы қатарлар

Фaa-ди-Бруно формуласын қолдана отырып, біз келесіні табамыз

$$\frac{\partial^m [i^{2n} \operatorname{erfc}(-\xi(\tau)) + i^{2n} \operatorname{erfc}(\xi(\tau))] }{\partial \tau^m} \Big|_{\tau=0} = \sum_{p=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{\omega^{2p}}{2^{2n} (n-p)!} \sum_{\beta_i} \frac{m!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_m!} \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} \dots \alpha_m^{\beta_m}$$

Төмендегі жағдайда

$$\sum_{k=1}^m \beta_k = 2p$$

$$\sum_{k=1}^m k \beta_k = m$$

Бұл формуланы (3.11)-ге ауыстырсақ, біз төмендегіні анықтаймыз

$$\frac{\partial^m [(2\tau)^{2n} [i^{2n} \operatorname{erfc}(-\xi(\tau)) + i^{2n} \operatorname{erfc}(\xi(\tau))] }{\partial \tau^m} \Big|_{\tau=0} = m! A_{2n}^m(\omega)$$

мұндағы

$$A_{2n}^m(\omega) = \sum_{p=0}^{\lfloor m/2-n \rfloor} \frac{\omega^{2p}}{(n-p)!} \sum_{\beta_i} \frac{m!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_m!} \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} \dots \alpha_m^{\beta_m} \quad (3.12)$$

Төмендегі жағдайда

$$\sum_{k=1}^m \beta_k = 2p$$

$$\sum_{k=1}^m k \beta_k = m - 2n$$

Сол сияқты біз төмендегіні таба аламыз

$$\left. \frac{\partial^m [(2\tau)^{2n} [i^{2n+1} \operatorname{erfc}(-\xi(\tau)) + i^{2n+1} \operatorname{erfc}(\xi(\tau))]]}{\partial \tau^m} \right|_{\tau=0} = m! A_{2n+1}^m(\omega)$$

мұндағы

$$A_{2n+1}^m(\omega) = \sum_{p=0}^{[m/2-n-1]} \frac{\omega^{2p+1}}{(n-p)!} \sum_{\gamma_i} \frac{m!}{\gamma_1! \gamma_2! \dots \gamma_m!} \alpha_1^{\gamma_1} \alpha_2^{\gamma_2} \dots \alpha_m^{\gamma_m} \quad (3.13)$$

Төмендегі жағдайда

$$\sum_{k=1}^m \beta_k = 2p + 1$$

$$\sum_{k=1}^m k \beta_k = m - 2n - 1$$

Сонымен қатар

$$\left. \frac{\partial^m [(2\tau)^{2n} i^n \operatorname{erfc}(\xi(\tau))]}{\partial \tau^m} \right|_{\tau=0} = m! B_n^m(\omega)$$

мұндағы



$$B_{2n}^m(\omega) = \frac{2^n}{(m-n)!} \left. \frac{\partial^{m-n} [i^n \operatorname{erfc}(\xi(\tau))]}{\partial \tau^m} \right|_{\tau=0} =$$

$$= \begin{cases} \sum_{r=0}^{m-n} \frac{(-\omega)^p}{\Gamma((n-r)/2-1)} \sum_{\beta_i} \frac{m!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_m!} \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} \dots \alpha_m^{\beta_m} & \text{if } m \leq 2n \\ \sum_{r=0}^{m-n} \frac{(-\omega)^p}{\Gamma((n-r)/2-1)} \sum_{\beta_i} \frac{m!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_m!} \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} \dots \alpha_m^{\beta_m} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{m-2n} \frac{(-1)^p (-\omega)^{n+p+1} (2p)!}{2^{2p} p!} \sum_{\beta_i} \frac{m!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_m!} \alpha_1^{\beta_1} \alpha_2^{\beta_2} \dots \alpha_m^{\beta_m} & \text{if } m > 2n \end{cases}$$

Сондықтан тендеулер еркін шекарадағы температуралық және жылу ағындарының конъюгация шарттары төмендегі формада жазылуы мүмкін

$$\left\{ \begin{aligned} & - \sum_{n=0}^{[m/2]} a_1 f^{(n)}(0) A_{2n+1}^m(1) + \sum_{n=2}^m A_n A_n^m(1) + \sum_{n=0}^{[m/2]} A_{2n+1} B_{2n+1}^m(1) = 0 \\ & \sum_{n=1}^m a_2^{n/2} \varphi^{(n)}(0) A_n^m(\omega) + \sum_{n=1}^m B_n B_n^m(\omega) = 0, \quad A_1 = B_1 = 0 \\ & - \sum_{n=0}^{[m/2]} a_1 f^{(n)}(0) A_{2n}^m(1) + \sum_{n=2}^m A_n A_{n-1}^m(1) - \sum_{n=1}^{[m/2]} A_{2n+1} B_{2n}^m(1) - \\ & - \frac{\omega \lambda_2}{\lambda_1} \left[ \sum_{n=2}^m a_2^{n/2} \varphi^{(n)}(0) A_{n-1}^m(\omega) - \sum_{n=2}^m B_n B_{n-1}^m(\omega) \right] = \frac{\rho L a_1^2}{\lambda_1} (m/2 + 1) \alpha_{m+1} \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

және  $A_n, B_n, \alpha_n$  коэффициенттері алгебралық тендеулердің қайталама жүйесінен табылуы мүмкін (3.14).

### 3.5 Қатары бар конвергенттер

Егер біз мәндерді (2.35)-ке ауыстыратын болсақ

$$A_{2m}^{2m}(\omega) = 2^{2m} i^{2n} \operatorname{erfc} 0 = 1 / m!$$

$$A_{2m+1}^{2m+1}(\omega) = 0$$

$$B_m^m(\omega) = 1 / \Gamma(m / 2 + 1)$$

$$A_{m+1}^m(\omega) = B_{m+1}^m(\omega) = 0$$

Біз келесі нәтиже көреміз

$$A_{2m} = m! \sum_{n=0}^{m-1} a_1 f^{(n)}(0) A_{2n-1}^{2m}(1) + \sum_{n=2}^{2m-1} A_n A_n^{2m}(1) + \sum_{n=1}^{m-1} A_{2n-1} B_{2n-1}^{2m}(1)$$

$$A_{2m+1} = \Gamma(m + 1 / 2) \sum_{n=0}^{m-1} a_1 f^{(n)}(0) A_{2n+1}^{2m+1}(1) + \sum_{n=2}^{2m} A_n A_n^{2m+1}(1) + \sum_{n=1}^{m-1} A_{2n+1} B_{2n+1}^{2m+1}(1)$$

$$B_m = -\Gamma(m + 1 / 2) \sum_{n=0}^{m-1} a_2 \varphi^{(n)}(0) A_{2n}^m(\omega) + \sum_{n=2}^{m-1} B_n B_n^m(\omega)$$

Бұл рекурентті формулалар бізге кез келген  $n$  үшін барлық  $A_n, B_n$  коэффициенттерді есептеуге мүмкіндік береді.

$\alpha_n$  коэффициенттері (2.35) теңдеу арқылы анықталуы мүмкін.

$t = t_0 L$  уақытына  $\alpha(t_0) = \alpha_0$ . Содан кейін қатарлар

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (2a_1 \sqrt{t_0})^n \left[ i^n \operatorname{erfc} \left( -\frac{\alpha_0}{2a_1 \sqrt{t_0}} \right) + i^n \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha_0}{2a_1 \sqrt{t_0}} \right) \right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n (2a_2 \sqrt{t_0})^n i^n \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha_0}{2a_2 \sqrt{t_0}} \right)$$

Жуықталуы керек өйткені интерфейс бойынша  $u_1 = u_2 = U_m$  болып табылады.. Сондықтан кейбір төменде көрсетілген  $C_1, C_2$ , тұрақтылар  $n$  тәуелсіз мәнінен пайда болады.

$$|A_n| < C_1 / (2a_1 \sqrt{t_0})^n \left[ i^n \operatorname{erfc}(-\xi_0) + i^n \operatorname{erfc}\xi_0 \right],$$

$$|B_n| < C_2 / (2a_1 \sqrt{t_0})^n i^n \operatorname{erfc}(\xi_0), \quad \xi_0 = \frac{\alpha_0}{2a_1 \sqrt{t_0}}$$

$i^n \operatorname{erfc}\xi$  бірқалыпты азайғанда,  $i^n \operatorname{erfc}(-\xi) + i^n \operatorname{erfc}\xi$  функциясы бірқалыпты жоғарылайтын оң функция болып табылады, сондықтан

$$i^n \operatorname{erfc}(-\xi) + i^n \operatorname{erfc}\xi < i^n \operatorname{erfc}(-\xi_0) + i^n \operatorname{erfc}\xi_0, \quad 0 < \xi < \xi_0,$$

$$i^n \operatorname{erfc}\xi < i^n \operatorname{erfc}\xi_0, \quad \xi_0 < \xi < \infty$$

Осылайша

$$\left| A_n (2a_1 \sqrt{t_0})^n \left[ i^n \operatorname{erfc}(-\xi) + i^n \operatorname{erfc}\xi \right] \right| < C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{n/2} \frac{i^n \operatorname{erfc}(-\xi) + i^n \operatorname{erfc}\xi}{i^n \operatorname{erfc}(-\xi_0) + i^n \operatorname{erfc}\xi_0} < C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{n/2}$$

$$\left| B_n (2a_2 \sqrt{t_0})^n i^n \operatorname{erfc}\xi \right| < C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{n/2}$$

$u_2(x, t)$  үшін барлық қатарлар  $x > \alpha_0$  және  $t < t_0$  жуықталғанда, жоғарыда көрсетілген және  $u_1(x, t)$  үшін геометриялық қатарлар  $x < \alpha_0$  барлық мәніне жуықталады,.

$\alpha(t)$  үшін барлық қатарлар бірдей болып табылады. (3.14) үшінші теңдеуден біз келесіні таба аламыз

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (2a_1 \sqrt{t})^{n-1} [i^n \operatorname{erfc}(-\xi) - i^n \operatorname{erfc}\xi], \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n (2a_2 \sqrt{t})^{n-1} i^n \operatorname{erfc}\xi$$

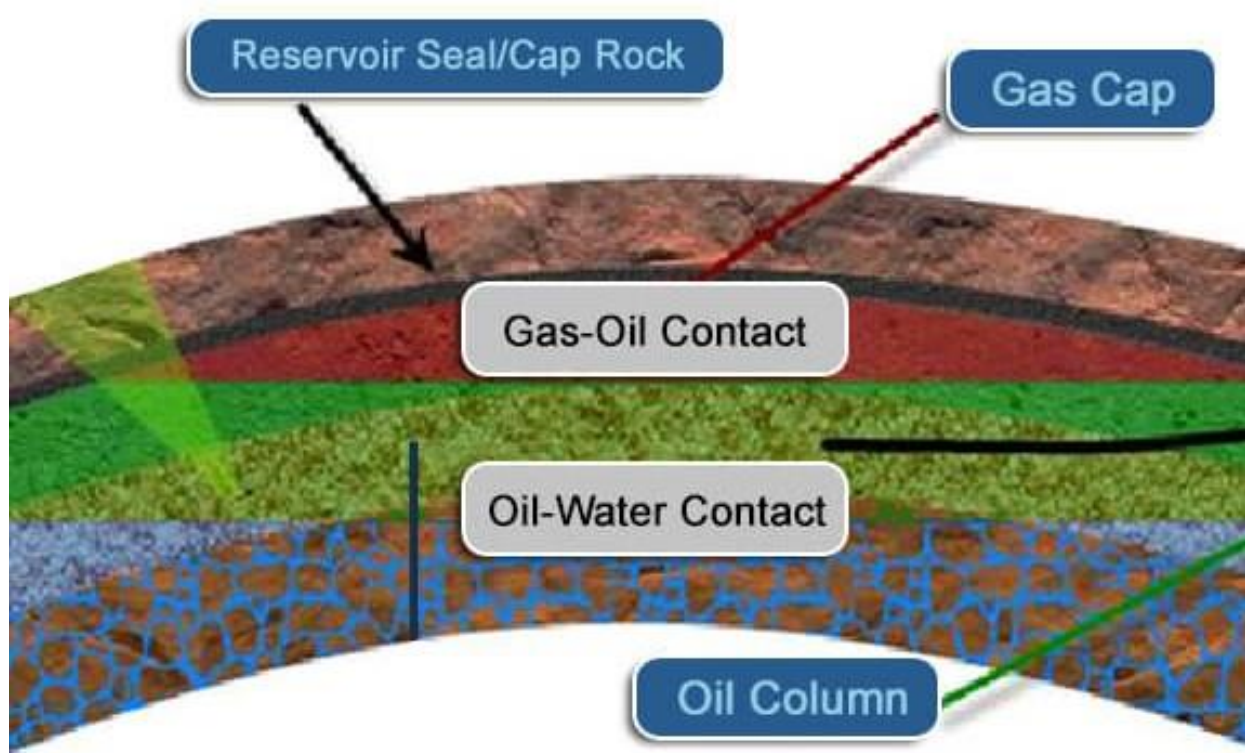
Берілген облыстарда жуықтатамыз.  $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_2}{\partial x}$  шектеулі екенін білдіреді, осылайша  $\alpha(t)$  үшін  $t < t_0$  барлық мәндеріне жуықтатылады.

## IV ВЕРИГИН ЕСЕБІ

### 4.1 Жалпы мәлімет

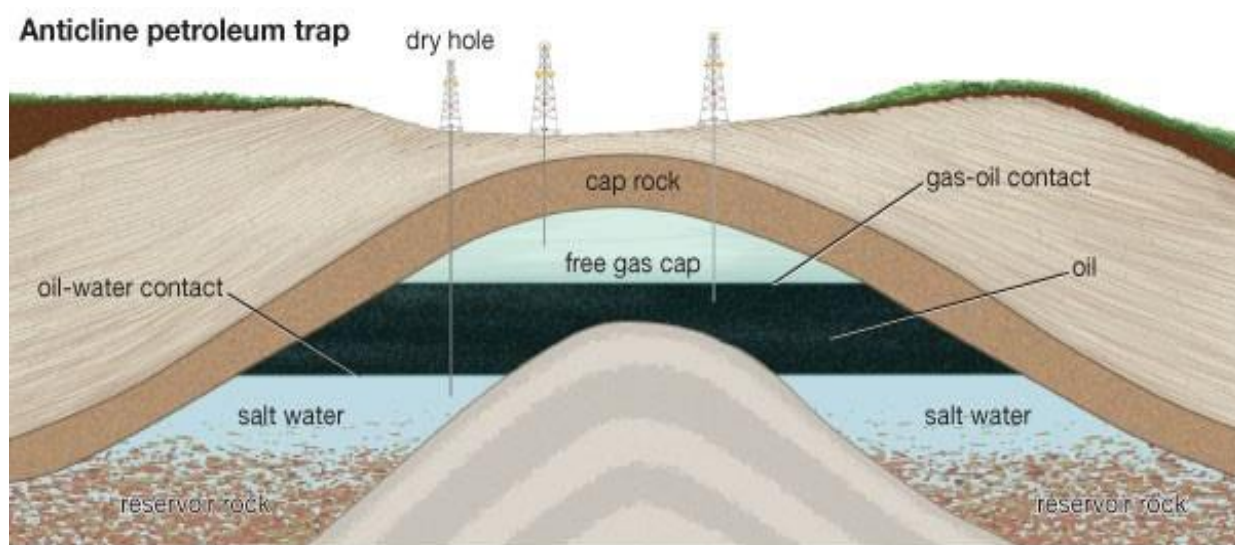
Мұнай-су контактісінің жағдайын айдағыш галереясының төменгі жағындағы қысымға байланысты реттеу мәселесі мұнай кен орындарының жұмысында өте маңызды. Бұл мәселені пьезоөткізгіштік теңдеулер жүйесі үшін кері Веригин есебімен модельдеуге болады. Веригиннің тура есебі су мен мұнай құрылымдарындағы қысым мен айдағыш галереясының төменгі жағында сыртқы қысым берілген кезіндегі олардың арасындағы байланыстың динамикасын анықтау болып табылады. Кері есепте, сыртқы шекараның қозғалыс заңын қанағаттандыратын сыртқы қысымның динамикасын табу қажет. Бұл мәселе математикалық тұрғыдан әлдеқайда күрделі, өйткені ол математикалық физиканың қисынсыз мәселелер класына жатады, бірақ оны шешу тәжірибе үшін өте маңызды.

Бұл мұнай өндірудің негізгі мәселелерінің бірі. Су-мұнай контактісі - мұнай кен орындарындағы мұнайды және суды бөлетін шартты бет. Сондай-ақ олар газ-мұнай және газ-су контактілері болады. Су-мұнай контактісінің беті көлденең, көлбеу, дөңес болуы мүмкін. Әдетте, өтпелі аймақтың шағын қалыңдығы үшін ол көлденең бет ретінде қабылданады. Өтпелі аймақтың құрылымы және онда су мен мұнайдың таралуы негізінен гравитациялық және капиллярлық күштермен анықталады. Соңғылар тау жыныстарының қасиеттері мен құрамына және резервуар сұйықтықтарының физика-химиялық қасиеттеріне күрделі тәуелділікте. Тау жынысы қасиеттерінің алуан түрлілігі бір резервуардағы өтпелі аймақтың қалыңдығын айтарлықтай өзгертуге әкеледі.



Сурет 8 – Су-мұнай контакті мен газ-мұнай контактінің көрінісі

Мұнай мен табиғи газды ұсақ тесікшелерде ұстайтын резервуар жынысы тасты немесе мөрмен бекітіледі. Ең жеңіл болып табылатын газ, еркін газ қақпағын қалыптастыру үшін тұзқтың жоғарғы жағына өтеді. Мұнай қоймаға қонады. Төменде тұзды су бар. Мұнай-газ және мұнай-сулар байланыстары - бұл шекаралар.



Сурет 9 – Антиклинальді мұнайлы тұзқтаға су-мұнай контакті

Кері есеп - модельдік параметрлердің мәндері бақыланатын деректерден алынуы керек болғанда, ғылымның көптеген бөлімдерінде кездесетін міндеттердің түрі.

Кері есептердің мысалдарын келесі бағыттарда табуға болады: геофизика, астрономия, медициналық бейнелеу, компьютерлік томография, Жерді қашықтықтан зондтау, спектральды талдау және бұзылыстыруға арналған тапсырмалар.

Кері есептер дұрыс қойылмаған есептер классына жатады. Дұрыс қойылған проблеманың үш шартының (шешімнің болуы, шешімнің бірегейлігі және оның тұрақтылығы) кері есептерде көбінесе соңғысы бұзылады. Функциональды анализ кезінде кері міндет метрикалық кеңістіктер арасындағы салыстыру ретінде ұсынылады. Кері есептер әдетте шексіз өлшемді кеңістікте қалыптасады, бірақ өлшеудің ақырғыдығына шектеу және белгісіз параметрлердің соңғы санының есептеудің орындылығы дискретті түрдегі мәселенің өзгеруіне әкеледі. Бұл жағдайда қайта даярлауды болдырмау үшін регуляризация әдісі қолданылады.

## 4.2 Математикалық модель

Кеуектілігі  $m$  майы бар қаныққан топырақтағы мұнай сүзудің математикалық моделі икемді гидротехникалық ерітіндіні айдау кезінде қарастырылады. Сумен және маймен толған аудандардағы қысымның таралуы мен олардың байланыс бетінің динамикасы арасындағы қатынастарды анықтау қажет. Фильтрация жылдамдығы Дарси заңына бағынады, ал әрбір аймақтағы қысым  $p_i$  пьезоэлектрлік өткізгіштік теңдеуіне сәйкес келеді. Суды айдау процесі галерея арқылы жүргендіктен фильтрация процесін бір өлшемді және айдағыш галереясының төменгі жағында қысым  $P_1(t)$  беріледі деп есептеледі. X-осі галереясында осіне перпендикуляр болсын және  $x = \alpha(t)$  - орнатылған су жүзеге асырылады және ығыстырылған мұнай аймақтардың бөліну шекарасының теңдеуі. Онда су қаныққан аймақта  $0 < x < \alpha(t)$  және мұнайлы аймақта  $\alpha(t) < x < \infty$  қысымның таралуы келесі теңдеулермен сипатталады

$$a_1^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$0 < x < \alpha(t)$$

$$a_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\alpha(t) < x < \infty$$

$$p_1(0, t) = P_1(t) \quad (4.3)$$

Әр сұйықтық үшін Дарси заңы орындалады

$$u_i = -k_i \frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2$$

Мұндағы  $u_1, u_2$  - сәйкесінше су және мұнай фильтрациясының жылдамдығы,  $k_1, k_2$  - фильтрация коэффициенттері.  $x = \alpha(t)$  шекарасында қысым және ағындардың үзіліссіздік шарты орындалады:

$$x = \alpha(t): \quad p_1 = p_2, \quad k_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \quad (4.4)$$

Мұнайдың орнын су басу кезінде алдық мұнай қанықтылығы нөлге тең болса, бұл шекарада материал баланс шарты орындалу керек

$$x = \alpha(t): \quad m \frac{d\alpha}{dt} = -k_i \frac{\partial p_i}{\partial x} \quad (4.5)$$

Бастапқы уақыт мезетінде

$$p_2(x, 0) = P_0(x) \quad (4.6)$$

$$\alpha(0) = 0$$



### 4.3 Шешу тәсілі

Веригиннің кері есебін шешу үшін рекурренттік қатынастармен анықталатын Хартри арнайы функциялар аппаратын қолданамыз

$$i^n \operatorname{erfc}x = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc}v dv$$

$$i^0 \operatorname{erfc}x \equiv \operatorname{erfc}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-v^2) dv$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Ізделінді қысым Хартри функциясының сызықтық комбинация түрінде ізделінеді

$$p_i(x, t) = \sum_{n=0}^k [A_{ni} u_n(x, t) + B_{ni} u_n(-x, t)] \quad (4.7)$$

мұндағы

$$u_n(\pm x, t) = t^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc} \frac{\pm x}{2a\sqrt{t}} \quad (4.8)$$

(7) функциясы (1)-(2) теңдеулерін  $A_{ni}$ ,  $B_{ni}$  тұрақтыларының кез келген мәнінде қанағаттандырады

$\alpha(t)$  шекарасы мынадай түрде берілген автотомельді жағдайды қарастырайық:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sqrt{t}$$

Алдымен (6) шартты қанағаттандырамыз.

$P_0(x)$  функциясын Маклорен полиномымен аппроксимациялаймыз

$$P_0(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k \quad (4.10)$$

Мұндағы

$$b_n = \frac{P_0^{(n)}(0)}{n!}$$

$$n=0,1,\dots,k,$$

бізде болуы керек:

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_2(x,t) = P_0(x)$$

Хартри функциясының қасиетін қолданамыз /2/

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{i^n \operatorname{erfc} z}{z^n} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{i^n \operatorname{erfc}(-z)}{z^n} = \frac{2}{n!}$$

Бізде шығады:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc} \frac{x}{2a_2 \sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_2 \sqrt{t}}}{\left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}}\right)^n} \cdot \frac{x^n}{(2a_2)^n} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_2 \sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i^n \operatorname{erfc} \frac{-x}{2a_2 \sqrt{t}}}{\left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}}\right)^n} \cdot \left(\frac{x}{2a_2}\right)^n = \frac{2}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2a_2}\right)^n$$

демек,

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_2(x, t) = \sum_{n=0}^k B_{n2} \cdot \frac{2}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2a_2}\right)^n = \sum_{n=0}^k \frac{P_0^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

және

$$B_{n2} = \frac{1}{2} \cdot (2a_2)^n \cdot P_0^{(n)}(0) \quad (4.11)$$

(4) шарты  $A_{ni}, B_{ni}$  үшін келесі теңдеулер жүйесін береді:

$$\begin{cases} A_{n1} i^n \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} + B_{n1} i^n \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} = A_{n2} i^n \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_2} + B_{n2} i^n \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_2} \\ k_1 \left[ -\frac{A_{n1}}{2a_1} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} + \frac{B_{n1}}{2a_1} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} \right] = k_2 \left[ -\frac{A_{n2}}{2a_2} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_2} + \frac{B_{n2}}{2a_2} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_2} \right] \end{cases} \quad (4.12)$$

мұндағы

$$n = 0, 1, 2, \dots, k$$

$$i^{-1} \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Бұл жүйеден  $A_{n2}$  жойып, келесі қатынасты аламыз

$$B_{n1} = \frac{A_{n1} f_1(n) + B_{n2} f_2(n)}{f_3(n)} \quad (4.13)$$

Мұндағы

$$f_1(n) = -\frac{i^n \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_1}}{i^n \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_2}} + \frac{k_1 a_2}{k_2 a_1} \frac{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_1}}{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_2}}$$

$$f_2(n) = \frac{i^n \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_2}}{i^n \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_2}} + \frac{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_2}}{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_2}}$$

$$f_3(n) = \frac{i^n \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1}}{i^n \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_2}} + \frac{k_1 a_2}{k_2 a_1} \frac{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1}}{i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_2}}$$

(4.13) өрнегін (4.7) формуласына қойып, (4.5) шартын қолданамыз

$$\frac{m\alpha_0}{2\sqrt{t}} = -k_1 \sum_{n=0}^k \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{2a_1} \left\{ A_{n1} \left[ -i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha_0}{2a_1} + \frac{f_1(n)}{f_2(n)} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} \right] + B_{n2} \frac{f_2(n)}{f_3(n)} i^{n-1} \operatorname{erfc} \frac{-\alpha_0}{2a_1} \right\}$$

Коэффициенттерді бірдей дәрежелерде  $t^{\frac{n}{2}}$  теңестірсек, келесі өрнекті аламыз

$$A_{01} = \frac{f_3(0)}{f_3(0) - f_2(0)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha_0 a_1 e^{\frac{\alpha_0^2}{4a_1^2}} - \frac{f_2(0)}{f_3(0) - f_2(0)} B_{02} \quad (4.14)$$

$$A_{n1} = \frac{f_2(n)i^{n-1}erfc \frac{-\alpha_0}{2a_1} \cdot B_{n2}}{f_3(n)i^{n-1}erfc \frac{\alpha_0}{2a_1} + f_1(n)i^{n-1}erfc \frac{-\alpha_0}{2a_1}} \quad (4.15)$$

$B_{n1}$  коэффициенттері (13) формуласымен анықталады, ал  $A_{n2}$  коэффициенттері (12) өрнегінен шығады:

$$A_{n2} = \frac{1}{i^n erfc \frac{\alpha_0}{2a_2}} (A_{n1}i^n erfc \frac{\alpha_0}{2a_1} + B_{n1}i^n erfc \frac{-\alpha_0}{2a_1} - B_{n2}i^n erfc \frac{-\alpha_0}{2a_2}) \quad (4.16)$$

Осылайша,  $p_1(x,t)$  және  $p_2(x,t)$  қысым таралуы (4.7), (4.8) формулаларымен және (4.11)-(4.16) коэффициенттерімен анықталады.

Ізделінді қысым  $P_1(t)$  (4.3) шартымен анықталады:

$$P_1(t) = \sum_{n=0}^k t^{\frac{n}{2}} (A_{n1} + B_{n1}) i^n erfc 0 = \sum_{n=0}^k t^{\frac{n}{2}} (A_{n1} + B_{n1}) \frac{1}{2^n \Gamma(1 + n/2)} \quad (17)$$

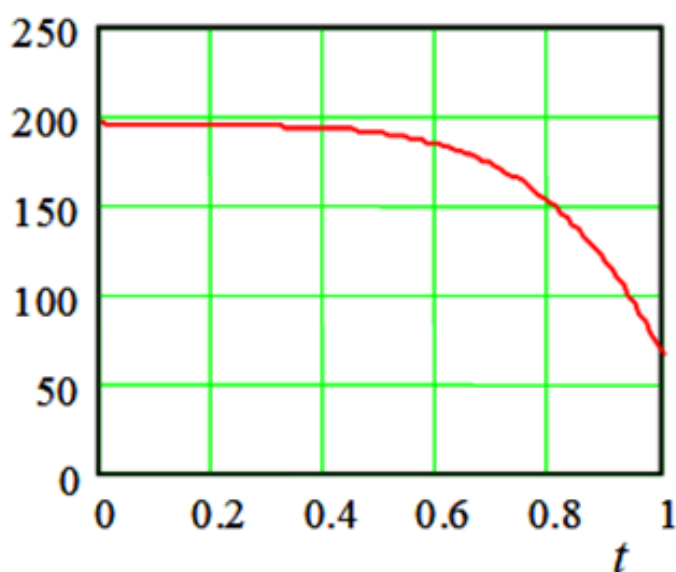
Сондай-ақ, Хартри функциялары кез-келген  $\alpha(t)$  функция үшін жалпы есебті шешу үшін де пайдаланылуы мүмкін. Бұл жағдайда қажетті коэффициенттер шекаралық шарттардан коллокациялық әдіспен [3] анықталуы керек. Осы әдіске сәйкес, уақыт интервалы  $[0, T]$  шекаралық шарттары дискретті түрде қанағаттандырылатын  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_5 < \dots < t_{k+1} = T$  нүктелерімен  $k + 1$  аралыққа бөлінеді.

#### 4.4 Есептелу мысалы

Сурет 1-де келесі кіріс деректер үшін Math CAD бағдарламасының көмегімен есептелген қысымның таралуының мысалы:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad m = 1, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad \alpha_0 = 1, \quad P_0(x) = e^{-x}$$

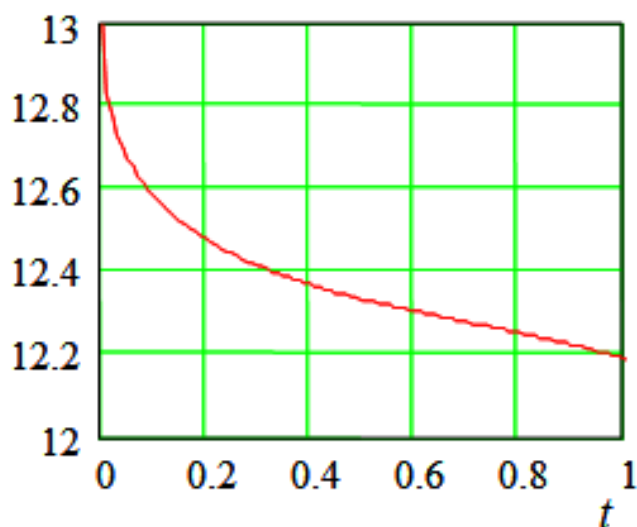
$$P_1(0, t)$$



Сурет 10 - Сыртқы қысым динамикасы

Сурет 11 –де мұнай мен су арасындағы контактті шекарасындағы қысымның динамикасы көрсетіледі.

$$P_1(\alpha(t), t)$$



Сурет 11 -  $x = \alpha(t)$  шекарасындағы контактті қысым динамикасы

Бұл нәтижелер қарастырылған параметрлердің мәндері үшін контактті шекарадағы қысым аз өзгертінін, ал берілген қозғалыс заңын қамтамасыз ету үшін сыртқы қысымның өзгерісін периодтың екінші жартысында беру қажеттілігін көрсетеді.

#### 4.5 Ауыспалы көлденең қимасы бар денелер мәселелері

Жоғарыда алынған нәтижелер айнымалы қимасы бар галерия жағдайында да қолданыла алады. Ол үшін гидротехникалық қоспаны айдау кезіндегі қысымдар өрісін сипаттайтын пьезоөткізгіштік теңдеулер жүйесі мынадай түрде болу керек:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = a_1^2 \left( \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + \frac{v}{z} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial z} \right) \quad 0 < z < \alpha(t) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = a_2^2 \left( \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} + \frac{v}{z} \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) \quad \alpha(t) < z < \infty \quad (4.19)$$

(3) – (6) шекаралық шарттар бұл жағдайда бірдей.

Онда, Хартри функциясының орнына өзгешеленген гипергеометриялық функциялар қолданылады

$$S_{\beta, \nu}^{(1)}(z, t) = (2a\sqrt{t})^\beta \Phi\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{\nu+1}{2}; -\frac{z^2}{4a^2t}\right)$$

$$S_{\beta, \nu}^{(2)}(z, t) = (2a\sqrt{t})^\beta \left(\frac{z^2}{4a^2t}\right)^{\frac{1-\nu}{2}} \Phi\left(\frac{1-\nu-\beta}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{z^2}{4a^2t}\right),$$

Олар (4.18), (4.19) қанағаттандырады.  $\nu = 0$  кезде олар Хартри функциясымен сипатталады, ал  $\nu = 1$ ,  $\beta = 2n$  болғанда Лагерр полиномы арқылы сипатталады.

(4.18)-(4.19), (4.3)-(4.6) есебінің шешімі автотомельді түрде көрсетіледі:

$$p_1(z, t) = P_1 + B_1 \left(\frac{z}{2a_1\sqrt{t}}\right)^{1-\nu} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{z^2}{4a_1^2t}\right) \quad (4.20)$$

$$p_2(z, t) = P_0 + B_2 \left[ \Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}\right) - \left(\frac{z}{2a_2\sqrt{t}}\right)^{1-\nu} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{z^2}{4a_2^2t}\right) \right] \quad (4.21)$$

$$\alpha(t) = \alpha\sqrt{t}, \quad \alpha = const \quad (4.22)$$

Бұл функциялар тек (4.18), (4.19) теңдеулерін ғана емес, тұрақты  $P_0$  мен  $P_1$  кезінде (4.3), (4.5) шарттарын да қанағаттандыратыны айқын. (4.4) шартты қанағаттандырып, тұрақты  $B_1$  мен  $B_2$  табамыз:

$$B_1 = -(P_1 - P_0) \frac{\lambda}{\Delta(\alpha)} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{a_2^2}\right)$$



$$B_1 = \frac{P_1 - P_0}{\Delta(\alpha)} \frac{\lambda}{\Delta(\alpha)} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{a_1^2}\right),$$

мұндағы

$$\lambda = \frac{k_2 a_1^{1+\nu}}{k_1 a_2^{1+\nu}}$$

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) &= \lambda \exp\left(-\frac{\alpha^2}{a_2^2}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^{1-\nu} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{\alpha^2}{a_1^2}\right) + \\ &+ \exp\left(-\frac{\alpha^2}{a_1^2}\right) \Gamma\left(\frac{3-\nu}{2}\right) - \left(\frac{\alpha}{a_2}\right)^{1-\nu} \Phi\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{\alpha^2}{a_2^2}\right) \end{aligned}$$

(21) өрнекті (5) теңдеуге қойып  $\alpha$  анықтау үшін трансцендентті теңдеуді аламыз:

$$\alpha^{1+\nu} = \frac{k_2(1-\nu)}{2a_2^{1-\nu}} (P_1 - P_0) \exp\left[-\left(\frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\alpha^2}{a_2^2}\right)\right] \Delta(\alpha) \equiv f(\alpha) \quad (4.23)$$

Тексеру үшін

$$f(0) = \frac{k_2(1-\nu)}{2a_2^{1-\nu}} \frac{P_1 - P_0}{\Gamma((3-\nu)/2)} > 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) < 0.$$

Бұл шарттар

Бұл шарттар (4.23) теңдеудің шешімінің бар екендігін және жалғыздығын қамтамасыз етеді және түпнұсқа мәселені шешеді.

$\nu = 0$  болғанда (4.20), (4.21) және (4.23) теңдеуі бізге таныс түрге айналады.

Алынған нәтижелер қарастырылған параметрлердің мәндері үшін контакті шекарадағы қысым аз өзгертінін, ал берілген қозғалыс заңын қамтамасыз ету үшін сыртқы қысымның өзгерісін периодтың екінші жартысында беру қажеттілігін көрсетеді.

## ҚОРЫТЫНДЫ

Мұнай-су контактісінің жағдайын айдағыш галереясының төменгі жағындағы қысымға байланысты реттеу мәселесі мәселесі пьезоөткізгіштік теңдеулер жүйесі үшін кері Веригин есебімен модельденеді. Веригиннің тура есебі су мен мұнай құрылымдарындағы қысым мен айдағыш галереясының төменгі жағында сыртқы қысым берілген кезіндегі олардың арасындағы байланыстың динамикасын анықтаудан тұрады. Кері есепте, сыртқы шекараның қозғалыс заңын қанағаттандыратын сыртқы қысымның динамикасын табу қажет. Алынған нәтижелер қарастырылған параметрлердің мәндері үшін контактті шекарадағы қысым аз өзгертінін, ал берілген қозғалыс заңын қамтамасыз ету үшін сыртқы қысымның өзгерісін периодтың екінші жартысында беру қажеттілігін көрсетеді.

Зерттеу нәтижелері бойынша қысқаша қорытындылар

1. Хартри функциялар әдісі қарастырылып, Веригин есебі талданды.
2. Веригин кері есебі шығарылып, нәтижелер алынды.
3. Алынған нәтижелер талданды.
4. Контактті шекарадағы қысым мен берілген қозғалыс заңының сыртқы қысыммен байланысы айқындалды

Қойылған міндеттерді шешу толықтығын бағалау

Есептеулер қойылған мақсаттар мен міндеттерді толық қамтиды.

Нәтижелерін нақты қолдану бойынша ұсынымдар мен бағдарларын дамыту

Берілген жұмыс өзге зерттеулер кезінде салыстырулар үшін қолдана алады.

Іске асырудың техникалық және экономикалық тиімділігін бағалау

Берілген жұмыстағы есептеулерді мұнай өндіру процесін жобалау кезінде кезінде қолдануға болады.

## ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Л.И. Рубинштейн, Проблема Стефана, Издательство «Звайгзне», Рига, 1967, 457с.
- 2 С.Н. Харин, «Решение задач типа Стефана и Веригина для тел с переменным сечением и их приложения», Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей, Издательство «Наукова Думка», 1983, с. 113-116
- 3 Л.И. Коздоба, «Приближенные и численные методы решения задач теплопроводности», Изд. «Наукова Думка», Киев, 1990, 582с
- 4 Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости/ пер с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152с
- 5 Флетчер К. Вычислительные методы динамики жидкости. Москва:Мир,- 1991., Т.1. -504 с., ил.
- 6 Флетчер К. Вычислительные методы динамики жидкости. Москва:Мир,- 1991., Т.2. -552 с., ил.
- 7 R. Malucci, Multi-spot Model of Contacts Based on Surface Features, Proc. 15th ICEC, Montreal, pp. 625-634, 1990
- 8 Б.Т. Жумагулов, У.С. Абдибеков, А.А. Исахов Основы математического и компьютерного моделирования есетественно-физических процессов. – Қазак университеті, 2014. – 208 с.
- 9 J.B. Greenwood, Constriction Resistance and Real Area of Contact, British Journal of Applied Physics, 17, pp.1621-1630, 1966
- 10 S.N. Kharin, H. Nouri, T. Davies ,“ The Mathematical Models of Welding Dynamics in Closed and Switching Electrical Contacts”, Proc. 49th IEEE Holm Conf. on Electrical Contacts, Washington, USA, 2003, pp. 107- 123
- 11 J.A. Greenwood and J.B.P. Williamson, Contact of Nominally Flat Surfaces, Proc. Royal Soc., London, A295, pp. 300-319, 1966
- 12 M.D. Bryant, Time-wise Increase in Contact Resistance due to Surface Roughness and Corrosion, , Proc. 15th ICEC, Montreal, pp. 635-645, 1990
- 13 R.A. Burton and R.G. Burton, Cooperative Interaction of Asperities in the Thermo-tribology of Sliding Contacts , Proc. 15th ICEC, Montreal, pp. 256-258, 1990
- 14 E.Ya. Blui, Yu.A. Mikhailov, R.Ya. Ozols, Heat- and Mass Transfer in Magnetic Field, Zinatne Ed., Riga, 1980, p. 355
- 15 . I.V. Kochergin, Welding by pressure, Mashinostroyenie Ed., Leningrad, 1972