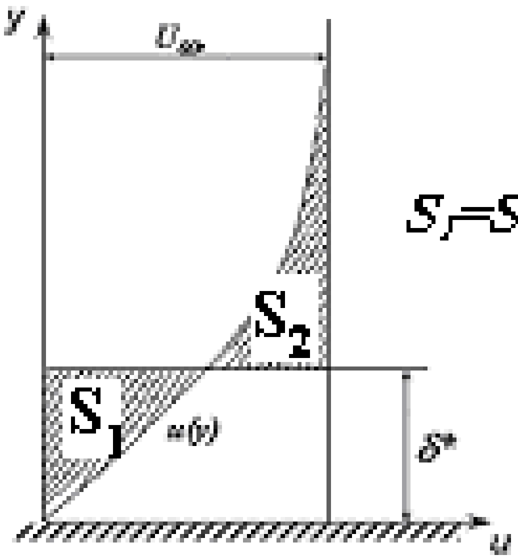
## Толщина вытеснения $\delta^*$

$\delta^*$ - это расстояние, на которое отодвигаются от поверхности пластины линии тока внешнего течения вследствие уменьшения скорости в пограничном слое.




$S_1 = S_2$

Вследствие влияния трения уменьшается скорость течения $\Rightarrow$ количество жидкости, протекающее в единицу времени (секундный расход жидкости) уменьшается на величину:

$$\int_0^\infty (\rho U_\infty - \rho u) dy$$

С другой стороны, уменьшение количества жидкости, протекающей в потенциальном потоке равно:

$$\rho U_\infty \delta^*$$

$\delta^*$ **- толщина вытеснения**

$$\rho U_\infty \delta^* = \rho \int_0^\infty (U_\infty - u)dy$$

***$U_\infty$ = const , $\rho$ = const***

$$U_\infty \int_0^\infty (1 - \frac{u}{U_\infty})dy = U_\infty \delta^* \quad \Rightarrow \quad \delta^* = \int_0^\infty (1 - \frac{u}{U_\infty})dy$$

$$\frac{u}{U_\infty} = F'(\varphi); \quad \varphi = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad \Rightarrow \quad dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}d\varphi$$

$$\delta^* = \int_0^\infty (1 - F')\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}d\varphi = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\int_0^\infty (1 - F')d\varphi = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta^* = \frac{1}{3}\delta}$$

## Толщина потери импульса $\delta^{**}$

➢поток импульса в пограничном слое = $\rho u u$

➢потоком импульса во внешнем течении = $\rho u U_\infty$

Вследствие трения поток импульса в пограничном слое уменьшается по сравнению с потоком импульса во внешнем течении на величину:

$$\int_0^\infty \left(\rho u U_\infty - \rho u^2\right) dy = \rho U_\infty^2 \int_0^\infty \left(\frac{u}{U_\infty} - \frac{u^2}{U_\infty^2}\right) dy$$

С другой стороны, это уменьшение потока импульса равно $\rho U_\infty^2 \delta^{**}$

$$\Rightarrow \quad \delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$ - толщина потери импульса

$$\delta^{**} = \int_0^\infty F'(1 - F')\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}\, d\varphi = \frac{1}{7}\delta \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \delta^* \sim \sqrt{x} \\ \delta^{**} \sim \sqrt{x} \end{array}$$

**И.Никурадзе (1942 г.)**

## Опыты по проверке изложенной теории по исследованию пограничного слоя на пластине:

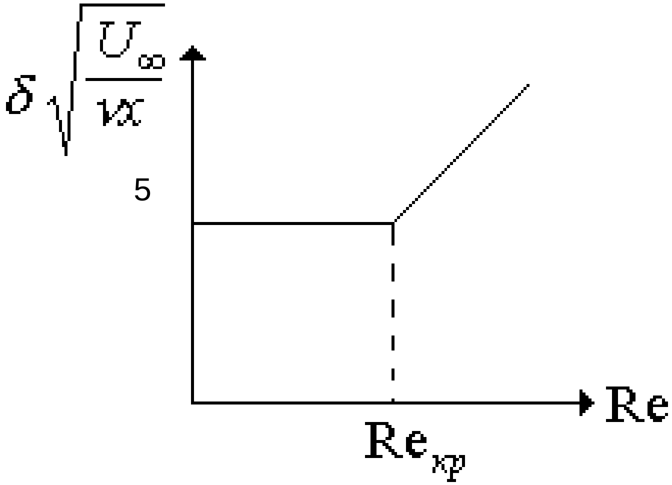
1. На течение в пограничном слое сильно влияет профиль передней кромки пластины и слабый градиент давления внешнего течения (если он имеется)

2. Измерения распределения скорости в пограничном слое подтвердили автомодельность течения, т.е. подобие профилей скорости для различных сечений течения

3. Измеренные экспериментальные точки хорошо ложатся на теоретический профиль скорости по Блазиусу

4. До определенного значения числа Re ($5.10^5 \div 10^6$) течение остается ламинарнь и результаты эксперимента совпадают с теоретическими. Толщина пограничного слоя остается постоянной и примерно совпадает со значением:

$$\delta = 5{,}0\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$




При больших числах Re течение становится турбулентным и толщина пограничного слоя резко возрастает при увеличении текущей длины пластины. Причем это увеличение происходит быстрее, чем в ламинарном пограничном слое.

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЛАЗИУСА

- ✓ метод последовательного приближения (метод итераций)
- ✓ интегральный метод (с использованием теоремы импульса и энергии)

!

Получить хоть и приближенное, но аналитическое решение важно, так как аналитическое решение обладает рядом преимуществ. Оно позволяет сделать некоторые общие выводы о закономерностях течения.

## МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Задается нулевое приближение – начальный профиль скорости, который затем уточняется с помощью уравнений пограничного слоя, т.е. из нулевого приближения получают первое приближения, из него второе и т.д.

Методом последовательных приближений находят такой профиль, который отличается от предыдущего на бесконечно малую величину $\varepsilon$ во всех точках, т.е. остается неизменным.

Запишем автомодельное уравнение:

$$F''' + \frac{1}{2} F F'' = 0$$

с граничными условиями $F'(0)=0$; $F(0)=0$; $F'(\infty)=1$

$$\frac{F'''}{F''} = -\frac{F}{2} \quad \Rightarrow \quad \ln F'' = -\frac{1}{2}\int_0^{\varphi} F d\varphi + \ln C_1$$

$$F'' = C_1 e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\varphi} F d\varphi}; \qquad \boxed{F' = C_1 e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\varphi} F d\varphi} d\varphi + C_2} \qquad \textbf{(1)}$$

Мы получили решение для $F'$, которое зависит от $F$.

Мы получили решение для *F′*, которое зависит от *F*.

Если задать приближение для $F_1'(\varphi)$, затем подставить его в (1),

то получим второе приближение для $F_2'(\varphi)$ *и т.д.*

**(1)** $\Rightarrow$ $$F_{n+1}' = C_1 \int_0^{\varphi} e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\varphi} F_n \, d\varphi} + C_2$$ **(2)**

Пусть $F_0=\varphi$ **(2)** $\Rightarrow$ $$F_1' = C_1 \int_0^{\varphi} e^{-\frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \varphi \, d\varphi} + C_2$$

Вычислим первое приближение:

$$F_1' = C_1 \int_0^{\varphi} e^{-\frac{\varphi^2}{4}} d\varphi + C_2$$ **(3)**

Обозначим $\frac{\varphi}{2} = \alpha$ $\Rightarrow$ $d\varphi = 2d\alpha$

**(3)** $\Rightarrow$ $$F_1' = 2C_1 \int_0^{\varphi} e^{-\alpha^2} d\alpha + C_2$$

## Используем граничные условия и найдем постоянные $C_1$ и $C_2$

$$F'(0)=0; \qquad 0 = C_1\int_0^0 e^{-\alpha^2}d\alpha + C_2 \;\Rightarrow\; C_2=0$$

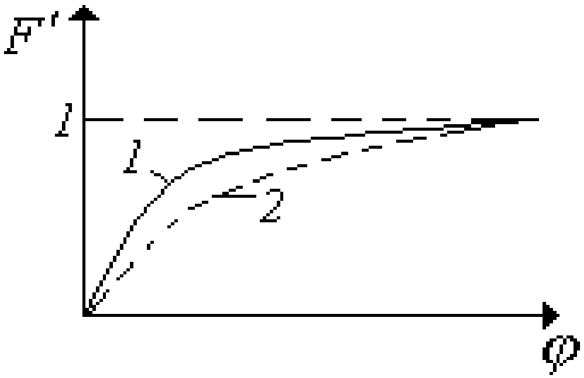
$$F'(\infty)=1; \qquad 1 = 2C_1\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{1}{2\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha}$$

$$(3) \;\Rightarrow\; F_1' = \frac{2\int_0^\varphi e^{-\alpha^2}d\alpha}{2\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha} \qquad (4)$$

Функция ошибок Гаусса: $erf(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\varphi e^{-\alpha^2}d\alpha$

Табличный интеграл: $\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$(4) \;\Rightarrow\; F_1' = erf(\alpha) \quad \text{или} \quad F_1' = erf\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (5)$$




На рисунке представлены профили скорости

**ЛИНИЯ 1** - по Блазиусу

**ЛИНИЯ 2** - по формуле (5) – первое приближение

Отличие составляет примерно 15%

**Найдем поперечную составляющую скорости $\upsilon$.**

$$\upsilon = -\frac{A}{B}x^{\alpha-\beta-1}\left[(\alpha-\beta)F + \beta\varphi F'\right] = -\frac{1}{2}\frac{A}{B}x^{-1/2}\left(F - \varphi F'\right) = -\frac{1}{2}\frac{U_\infty}{\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}\sqrt{x}}\left(\int_0^\varphi F' d\varphi - \varphi F'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{U_\infty}{\sqrt{\frac{U_\infty \nu}{x}}}\left(\varphi F' - \int_0^\varphi F' d\varphi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{Re_x}\left(\varphi F' - \int_0^\varphi F' d\varphi\right)$$

$$\boxed{\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon}{U_\infty} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{Re_x}}{U_\infty}\left(\varphi F' - \int_0^\varphi F' d\varphi\right)}$$