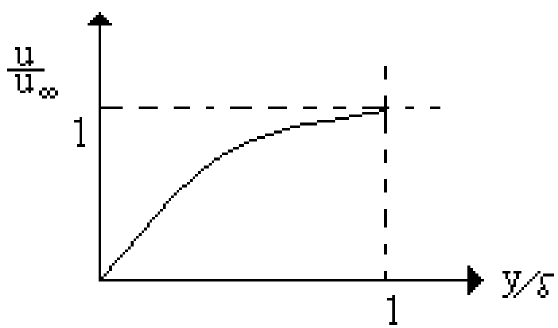
АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

- Существует класс течений, когда решение уравнений пограничного слоя можно получить в виде функции от одного аргумента φ, который является некоторым сочетанием основных аргументов задачи ***x*, *y***. Постоянным значениям этого сложного аргумента φ соответствуют множество решений по отдельным аргументам ***x*, *y***. Эти решения можно рассматривать как подобные между собой автомодельным. В этом случае задача называется автомодельной, а решение также подобным.

- Для автомодельного решения характерно, что профили скорости ***u (x,y)*** в двух различных сечениях течения (т.е. для различных ***x***) отличаются друг от друга масштабом для ***u*** и ***y***.

- Следовательно, если мы построим профили в безразмерном виде, разделив для этого ***u*** и ***y*** на соответствующие масштабы, то они совпадут между собой. Мы получим некий универсальный безразмерный профиль для всех сечений ***x***.



➢ В качестве масштаба для скорости – выбирается скорость потенциального течения, т.е. течения вне пограничного слоя U_∞. Для координаты масштабом будет толщина пограничного слоя δ. Тогда безразмерная скорость u/U_∞ в каждом сечении будет меняется от нуля на стенке ($y=0$) до 1 (на краю пограничного слоя).

Примером автомодельного течения может служить течение в пограничном слое, образующемся при обтекании плоской пластины в продольном направлении потоком жидкости.

➢ Покажем, что уравнения пограничного слоя, которые представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, могут быть сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям с меньшим числом переменных.

Запишем систему уравнений пограничного слоя для стационарного течения несжимаемой жидкости с постоянными свойствами:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0 \qquad (2)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (3)$$

а) Динамическая задача

$$u = u(x, y)$$

Введем $\varphi = \varphi(x,y),\ \varphi = yX(x) \rightarrow \dfrac{d\varphi}{dy} = X(x)$

Решение будем искать в виде: $u = f(x)F'(\varphi)$

Отсюда имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'F' + fF''\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f'F' + fF''yX' = f'F' + fF''\frac{X'}{X}\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = fF''\frac{\partial \varphi}{\partial y} = fF''X$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = fF'''X\frac{\partial \varphi}{\partial y} = fF'''X^2$$

Из уравнения неразрывности (2) имеем:

$$\upsilon = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\int_0^\varphi \left(f' F' + f F'' \frac{X'}{X} \varphi \right) \frac{d\varphi}{X} = -f' \frac{1}{X} \int_0^\varphi F' d\varphi - f \frac{X'}{X^2} \int_0^\varphi F'' \varphi d\varphi =$$

$$= \left| F'' d\varphi = dV, \varphi = U, V = F' \right| = -\frac{f'}{X} \left\{ F(\varphi) - F(0) \right\} - \frac{fX'}{X^2} \left\{ \varphi F' \Big|_0^\varphi - \int_0^\varphi F' d\varphi \right\} =$$

$$= -\frac{f'}{X} F - \frac{fX'}{X^2} \left\{ \varphi F' - F + F(0) \right\} = -\frac{f'}{X} F - \frac{fX'}{X^2} \left(\varphi F' - F \right)$$

$$\varphi = 0; \; \upsilon = 0$$

Подставим в уравнение (1) и будем иметь:

$$fF' \left(f' F' + f F'' \frac{X'}{X} \varphi \right) - \frac{f'}{X} F f F'' X - \frac{fX'}{X^2} \left(\varphi F' - F \right) f F'' X = \nu f F''' X^2$$

$$f'F'^2 + F' fF'' \frac{X'}{X}\varphi - f' FF'' - \frac{X'}{X} fF''\varphi F' + \frac{X'}{X} FfF'' = \nu F''' X^2$$

$$f'F'^2 - f'FF'' + FF'' \frac{fX'}{X} = \nu F''' X^2$$

$$f'\left(F'^2 - FF''\right) + \frac{fX'}{X} FF'' = \nu X^2 F''' \qquad \textbf{(4)}$$

Неизвестные функции: *F; F′; F″; F‴*.

Пусть $f',\ \frac{fX'}{X},\ X^2$ **- коэффициенты пропорциональности**

.

Пусть $f' \sim \frac{fX'}{X}$, **т.е.** $\frac{f'}{f} = n\frac{X'}{X}$

Здесь $X' = \frac{dX}{dx}$ **или после интегрирования** $f = constX^n$

$$\frac{fX'}{X} \sim \mathrm{X}^2 \Rightarrow \frac{X'}{X^3} = const\,\frac{1}{f} = const\,\frac{1}{X^n}$$ **или** $$\frac{X'}{X^{3-n}} = const$$

После интегрирования имеем: $$\frac{X^{n-2}}{n-2} = const x \qquad X = const\left[(n-2)x\right]^{\frac{1}{n-2}}$$

Тогда: $$f = const\left[(n-2)x\right]^{\frac{n}{n-2}}$$

Введем обозначения: $$\frac{n}{n-2} = \alpha; \quad \frac{1}{n-2} = \beta$$

Тогда: $$f = const\left[(n-2)x\right]^{\alpha}$$

$$X = const\,(n-2)x^{\beta}$$

Или можно записать: $f = Ax^{\alpha}$, $X = Bx^{\beta}$

$$\Rightarrow \qquad u = Ax^{\alpha} F'(\varphi); \; \varphi = Bx^{\beta} y$$

Поставим F; F'; X; X' **в уравнение (4)**

$$f'\left(F'^2 - FF''\right) + f\frac{X'}{X}FF'' = \nu X^2 F''' \qquad \textbf{(4)}$$

$$A\alpha x^{\alpha-1}\left(F'^2 - FF''\right) + \frac{Ax^{\alpha} B\beta x^{\beta-1}}{Bx^{\beta}}FF'' = \nu B^2 x^{2\beta} F'''$$

$$F''' = \frac{A\alpha x^{\alpha-1-2\beta}}{\nu B^2}\left(F'^2 - FF''\right) + \frac{Ax^{\alpha-2\beta-1}}{B^2\nu}\beta FF'' \qquad \textbf{(5)}$$

Если решение автомодельно, то оно не должно зависть от x**, а это возможно, если** $\alpha - 1 - 2\beta = 0$**. Отсюда** $\alpha - 2\beta = 1$ ***или*** $\beta = (\alpha - 1)/2$**;**

A, B, α, β - коэффициенты автомодельности.

Преобразуем уравнение (5)

$$F''' = \frac{A\alpha}{\nu B^2} F'^2 - \frac{A\alpha}{\nu B^2} FF'' + \frac{A\beta FF''}{\nu B^2} \qquad (6)$$

(6) $\Rightarrow$ $$F''' + \frac{A}{\nu B^2}\left\{(\alpha - \beta)FF'' - \alpha F'^2\right\} = 0$$

$$\alpha - \beta = \alpha - \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{\alpha + 1}{2}$$

$$\boxed{F''' + \frac{A}{2\nu B^2}\left\{(\alpha + 1)FF'' - 2\alpha F'^2\right\} = 0} \qquad (7)$$

(7) $\Rightarrow$ **Автомодельное уравнение движения**

$$\upsilon=-\frac{f'}{X}F-\frac{fX'}{X^2}\left(\varphi F'-F\right)=-\frac{A\alpha x^{\alpha-1}}{Bx^{\beta}}F-\frac{Ax^{\alpha}Bx^{\beta-1}\beta}{B^2x^{2\beta}}\left(\varphi F'-F\right)=$$

$$=-\frac{A\alpha}{B}x^{\alpha-1-\beta}F-\frac{A}{B}x^{\alpha-1-\beta}\beta\left(\varphi F'-F\right)=-\frac{Ax^{\alpha-1-\beta}}{B}\left[\left(\alpha-\beta\right)F+\beta\varphi F'\right]$$

$$\boxed{\upsilon=-\frac{Ax^{\alpha-1-\beta}}{B}\left[\left(\alpha-\beta\right)F+\beta\varphi F'\right]}$$