4. Ерекше интеграл қасиеттері: айнымалыны ауыстыру және бөліктеп интегралдау

Қосындының интегралы интегралдар қосындысына және тұрақты көбейткішті, интеграл сыртына шығару қасиеттері ерекше интеграл үшін де айқын. Ал енді айнымалыны ауыстыру, бөліктеп интегралдау ережелерінің орындалатынын көрсету үшін мынадай ескерту жасап алайық.

Бас мән ұғымын енгізуде біз кесіп алынатын аймақ зерттелетін нүкте арқылы симметриялы деп алғанбыз, дегенмен, қатаң симметриялықтың аса қажеті де жоқ. Шынында да, маңызды мәселе $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ шартының орындалуы емес, ал $\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \ln \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$ шартының орындалуы. Дәл солай 3 пунктте t_1 және t_2 нүктелерінің бір шеңбер бойында жатуы емес, ал

$$\lim_{\substack{t_1 \to t \\ t_2 \to t}} \left| \frac{t_2 - t}{t_1 - t} \right| = 1 \tag{12}$$

шартының орындалуы маңызды.

Сонымен, егер біз симметриялық шартын алып тастап, тек (12) шарттың орындалуын ғана сақтасақ, онда осылай кең көзқараспен анықталған ерекше интеграл да алдыңғы анықталған бас мән ұғымына сай келеді.

Айнымалыны ауыстыру ережесі. Егер еш жерде нөлге айналмайтын үзіліссіз бірінші туындысы бар $\tau = \alpha(\zeta)$ функциясы L контурын өзара бірмәнді L' контурына түрлендірсе, онда

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} d\zeta , \tag{13}$$

мұндағы t=$\alpha(\xi)$.

Дәлелдеу. Центрі ξ нүктесі болатын жеткілікті кішкене шеңбер көмегімен L' контурымен l' доғасын қиямыз. Оның ұштары ξ_1 және ξ_2 болсын әрі олар L контурының t_1, t_2 нүктелеріне сәйкес болсын.

Сонда түрлендірілген

$$\int_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} d\zeta = \lim_{\xi_1, \xi_2 \to \xi} \int_{L' - l'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} d\zeta$$

интегралдың бас мәнін анықтаймыз. Егер $\beta(\tau)$ арқылы $\alpha(\zeta)$ функциясының кері функциясын белгілеп, $\zeta = \beta(\tau)$ ауыстыруын жасасақ (теорема шарты бойынша кері функция бар және бірмәнді), онда теңдіктің оң жағы

$$\lim_{\substack{t_1\to t,\\ t_2\to t}} \int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

интегралына тең. Мұндағы t_1 және t_2 нүктелері L қисығында жатады, бірақ t арқылы симметриялы емес, тек олар (12) шартты қанағаттандырады. Шынында да, $\alpha(\zeta)$ функциясын ξ нүктесінде Тейлор қатарына жіктеуде алғашқы екі мүшесімен ғана шектелсек,

$$t_2 = \alpha(\xi_2) = t + [\alpha'(\xi) + \varepsilon_2(\xi_2, \xi)](\xi_2 - \xi),$$
$$t_1 = \alpha(\xi_1) = t + [\alpha'(\xi) + \varepsilon_1(\xi_1, \xi)](\xi_1 - \xi)$$

теңдіктеріне келеміз. Ал $\alpha'(\zeta)$ үзіліссіздігінен ξ_1, ξ_2 нүктелері ξ нүктесіне ұмтылғанда $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$. Онда

$$\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right| = \left|\frac{\alpha'(\xi)+\varepsilon_2}{\alpha'(\xi)+\varepsilon_1}\right|\left|\frac{\xi_2-\xi}{\xi_1-\xi}\right|,$$

демек,

$$\lim_{t_1,t_2\to t}\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right| = \lim_{\xi_1,\xi_2\to\xi}\left|\frac{\xi_2-\xi}{\xi_1-\xi}\right| = 1.$$

Жоғарыда келтірілген ескерту бойынша, теорема осымен дәлелденеді.

Бөліктеп интегралдау ережесі. Егер $\varphi(\tau)$ функциясы үзіліссіз дифференциялданса және t нүктесі L контурының a және b ұштарына тең болмаса, онда

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau = \pm i\pi\varphi(t) + \varphi(b)\ln(b-t) - \varphi(a)\ln(a-t) - \int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau \tag{14}$$

бөліктеп интегралдау формуласы орынды.

Ескерту. Оң жағындағы бірінші қосылғышта «+» таңбасы t нүктесімен ∞ нүктесін қосатын кесу қисығы L-ден оңға қарай жүргізілгенде $\ln(\tau-t)$ бірмәнді тарамы бөлінсе, ал кері жағдайда «-» таңбасы алынады.

Дәлелдеуін

$$\int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau$$

интегралын қарастырудан бастаймыз. Бұл интеграл меншіксіз мағынада бар. Оны анықтау үшін t нүктесінің маңайын кез келген тәсілмен кесеміз. Оны бас мәнді анықтаудағыдай жасаймыз:

$$\int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)d\tau = \lim_{\rho\to 0}\left[\int_a^{t_1}\varphi'(\tau)\ln(\tau - t)d\tau + \int_{t_2}^{b}\varphi'(\tau)\ln(\tau - t)d\tau\right].$$

Енді шаршы жақшадағы кәдімгі интегралдарда бөліктеп интегралдау ережесін қолдансақ:

$$\int_a^{t_1}\varphi'(\tau)\ln(\tau - t)d\tau + \int_{t_2}^{b}\varphi'(\tau)\ln(\tau - t)d\tau = \varphi(b)\ln(b-t) - \varphi(a)\ln(a-t) + \varphi(t_1)\ln(t_1 - t) -$$
$$-\varphi(t_2)\ln(t_2 - t) - \int_a^{t_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau - \int_{t_2}^{b}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

Бұнда ρ-ны нөлге ұмтылдырып, шекке көшсек, оң жағындағы алғашқы екі қосылғыш өзгермейді, ал соңғы екі интеграл қосындысында бас мән мағынасында түсінілетін

$$-\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

интегралын береді.

Қалған екі қосылғыштың мәндерін табу үшін

$$\varphi(t_1)\ln(t_1 - t) - \varphi(t_2)\ln(t_2 - t) = \varphi(t)[\ln(t_1 - t) - \ln(t_2 - t)] +$$
$$+[\varphi(t_1) - \varphi(t)]\ln(t_1 - t) - [\varphi(t_2) - \varphi(t)]\ln(t_2 - t)$$

түрлендіруін жасаймыз. $\varphi(t)$ үзіліссіз дифференциалданатын функция болғандықтан Липшиц шартын қанағаттандырады. Ал $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ болғандықтан, соңғы екі қосылғыштың мәндері нөлге ұмтылады. Қалған қосылғыштағы $\ln(t_1 - t) - \ln(t_2 - t)$ шегі 3-ші пунктте қарастырылған. Ол $+i\pi-$ге тең, егер кесу қисығы $L-$ден оңға қарай жүргізілген болса, ал кері жағдайда $-i\pi-$ге тең. Тұжырым дәлелденді.

Ескерту. Егер L тұйық контур ($a=b$) болса, онда (14) формула қарапайым

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = +i\pi\varphi(t) - \int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)\,d\tau \qquad (15)$$

түрге келеді. (14) формуладағы минус таңбасы бұл жағдайда болмайды, өйткені кесу қисығы тек оңға қарай жүргізіледі.