4. Функциялардың H класына тиісті болу қасиеттері

1^0. Айталық, L=ab ашық доғасы t_0 нүктесі арқылы at_0 және $t_0 b$ екі бөлікке бөлінген болсын. Егер $\varphi(t)$функциясы L доғасында үзіліссіз әрі $\varphi(t) \in H^{\lambda}(at_0)$, $\varphi(t) \in H^{\lambda}(t_0 в)$ болса, онда $\varphi(t) \in H^{\lambda}(L)$.

Шынында да, айталық t_1 және t_2 L қисығының нүктелері болсын. Егер t_1 және t_2 екеуі де t_0 нүктесінің бір жағында жатса, онда шарт бойынша

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_1)| \leq A\sigma_{12}^{\lambda}, \tag{9}$$

мұндағы $\sigma_{12} = |s_2 - s_1|$ арқылы t_1 және t_2 арасындағы L доғасы бөлігінің ұзындығы белгіленген (егер L тұйық болса, екі бөлігінің қысқа жағын аламыз).

Енді (9) теңсіздікті дәлелдейік. Егер t_0 қисығының тұрақты нүктесі, ал t- айнымалы нүктесі болса, және t_0 мен t нүктелерін керетін хорда ұзындығы r болса, онда

$$\frac{dr}{ds} = \pm \cos\alpha , \tag{10}$$

мұнда s арқылы t нүктесінің абсциссасы, ал α арқылы хорда мен t нүктесіне жүргізілген жанама арасындағы бұрыш белгіленген. «+» таңбасы L=ab ашық доғасының$t_0 b$ бөлігі үшін, ал «-» таңбасы at_0бөлігі үшін алынады. (10) теңдікті at_0 немесе $t_0 b$ бөліктерінің біреуін алып, s_1-ден s_2-ге дейін интегралдасақ және орта мән туралы теореманы қолдансақ

$$|r_2 - r_1| = k|s_2 - s_1|, \quad 0 < k_0 \leq k \leq 1, \tag{11}$$

мұнда k_0– тұрақты, ал r_1, r_2 арқылы t_1мен t_2–ден t_0–ге дейінгі арақашықтық белгіленген.

Егер t_0 үшін t_1-ді алсақ

$$r_{12} = k\sigma_{12} \tag{12}$$

теңдігін аламыз, мұнда r_{12} арқылы t_1 және t_2 нүктелерінің арақашықтығы, ал $\sigma_{12} = |s_2 - s_1|$ арқылы L-дің t_1 мен t_2 арасындағы ұзындығы белгіленген.

Осы (12) формуладан (9) шығады, өйткені

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq A|t_2 - t_1|^{\lambda}, \tag{13}$$

ал $\varphi \in \mathrm{H}(L)$ болса, онда $\varphi \in C(L)$.

Егер φ(t) (13) шартты арақашықтығы r_{12} белгілі δ санынан аспайтын кез келген t_1 және t_2 нүктелері үшін қанағаттандырса, онда бұл функция $\mathrm{H}^{\lambda}(L)$ шартын барлық L бойында қанағаттандырады. Шынында да, егер (13) барлық $r_{12} \le \delta$ үшін орындалса, онда бүкіл L доғасында

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le A' r_{12}{}^{\lambda},$$

мұнда A' арқылы A және $2M/\delta^{\lambda}$ сандарының үлкені, ал M арқылы $|\varphi(t)|$ функциясының жоғарғы шекарасы белгіленген. Сонда осы соңғы теңсіздіктен (12) көмегімен (9) теңсіздікті аламыз.

Егер t_1 және t_2 нүктелері t_0 нүктесінің әр түрлі жағында жатса, онда $t_1 t_0$ және $t_0 t_2$ доғаларының ұзындықтарын сәйкес σ_1 және σ_2 арқылы белгілеп және (7) теңсіздігі пайдаланып

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le |\varphi(t_2) - \varphi(t_0)| + |\varphi(t_1) - \varphi(t_0)| \le A(\sigma_1^{\lambda} + \sigma_2^{\lambda}) \le 2^{1-\lambda} A|\sigma_1 + \sigma_2|^{\lambda} \le 2^{1-\lambda} A \sigma_{12}^{\lambda}$$

дәлелдеу керек теңсіздікті аламыз.

2^0. Егер $\varphi(t) \in \mathrm{H}^{\mu}(L)$, $\psi(t) \in \mathrm{H}^{\nu}(L)$ болса, онда $\varphi(t) + \psi(t) \in \mathrm{H}^{\lambda}(L), \varphi(t) \cdot \psi(t) \in \mathrm{H}^{\lambda}(L)$, мұнда λ арқылы μ, ν сандарының ең кішісі белгіленген.

Дәлелдеуін $\varphi(t) \cdot \psi(t)$ үшін жүргізейік:

$$\begin{aligned}&|\varphi(t_2)\psi(t_2) - \varphi(t_1)\psi(t_1)| \le |\varphi(t_2)\psi(t_2) - \varphi(t_2)\psi(t_1)| + |\varphi(t_2)\psi(t_1) - \varphi(t_1)\psi(t_1)| \le \\ &\le M|\psi(t_2) - \psi(t_1)| + N|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|\end{aligned}$$

мұндағы $M = \sup\limits_{L} |\varphi(t)|, N = \sup\limits_{L} |\psi(t)|$. Бұдан тұжырым дәлелдеуі шығады.

3^0. Егер $\varphi(t) \in \mathrm{H}^{\lambda}(L)$ және $\varphi(\mathrm{t}) \ne 0 \quad \forall \ t \in L$ болса, онда $1/\varphi(t) \in \mathrm{H}^{\lambda}(L)$.

Дәлелдеуі дәл алдындағыдай.

4^0. Айталық t және t_0 сәйкес L қисығының айнымалы және бекітілген нүктелері болсын. t нүктесінің функциясы

$$r^{\lambda} = |t - t_0|^{\lambda}, \quad 0 < \lambda \le 1,$$

L қисығында $\mathrm{H}^{\lambda}(L)$ шартын қанағаттандырады.

Шынында да, (8) теңсіздік бойынша

$$\left| r_1^{\lambda} - r_2^{\lambda} \right| \le |r_2 - r_1|^{\lambda}.$$

Дәл осы теңсіздік бекітілген t және айнымалы t_0 үшін де орынды. Демек, $|t - t_0|^{\lambda}$ екі айнымалы t және t_0 арқылы L қисығында H^{λ} шартын қанағаттандырады.

5^0. Егер $\varphi(t) \in \mathrm{H}^{\mu}(L)$ және $0 \le \lambda < \mu \le 1$ болса, онда t айнымалысының функциясы (t_0-бекітілген нүкте)

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{|t - t_0|} \in \mathrm{H}^{\mu-\lambda}(L).$$

Дәлелдеу үшін $r = |t - t_0|$ енгізіп, φ(t), $\psi(t)$ орындарына $\varphi(r), \psi(r)$ деп те жазатын боламыз. Сонымен бірге $\varphi(t) - \varphi(t_0) = \omega(r)$ деп белгілеп, h>0 деп алып (бұл жалпылықты шектемейді)

$$|\psi(r+h) - \psi(r)| = \left| \frac{\omega(r+h)}{(r+h)^{\lambda}} - \frac{\omega(r)}{r^{\lambda}} \right| = \left| \frac{\omega(r+h) - \omega(r)}{(r+h)^{\lambda}} \right| + \omega(r) \left\{ \frac{1}{(r+h)^{\lambda}} - \frac{1}{r^{\lambda}} \right\} \le$$
$$\le \frac{|\omega(r+h) - \omega(r)|}{(r+h)^{\lambda}} + |\omega(r)| \frac{(r+h)^{\lambda} - r^{\lambda}}{r^{\lambda}(r+h)^{\lambda}}$$

теңсіздігіне келеміз. Ал

$$|\omega(r+h) - \omega(r)| \le Ah^{\mu}, \quad |\omega(r)| = |\varphi(t) - \varphi(t_0)| \le Ar^{\mu}$$

болғандықтан

$$|\psi(r+h)| - \psi(r) \le \Delta_1 + \Delta_2,$$

мұндағы $\Delta_1 = \dfrac{Ah^{\mu}}{(r+h)^{\lambda}}, \quad \Delta_2 = Ar^{\mu-\lambda} \dfrac{(r+h)^{\lambda} - r^{\lambda}}{(r+h)^{\lambda}}.$

Мұнан $\Delta_1 = A\left[\frac{h}{r+h}\right]^{\lambda} h^{\mu-\lambda} \le Ah^{\mu-\lambda}$, яғни Δ_1 қажетті шартты қанағаттандырады екен.

Енді Δ_2-ні мүмкін $r \le h$ және $r > h$ жағдайлар үшін қарастырайық.

$r \le h$ жағдайында (4^0 жағдайды қараңыз)

$$(r+h)^{\lambda} - r^{\lambda} \le h^{\lambda}$$

бағалауын қолданып,

$$\Delta_2 \le A\frac{h^{\mu}}{(r+h)^{\lambda}} = A\left[\frac{h}{r+h}\right]^{\lambda} h^{\mu-\lambda} \le Ah^{\mu-\lambda}$$

дәлелдеуіміз керек теңсіздікті аламыз.

Ал $r > h$ жағдайында

$$(r+h)^{\lambda} - r^{\lambda} = r^{\lambda}\left[\left(1+\frac{h}{r}\right)^{\lambda} - 1\right] \le \lambda h r^{\lambda-1}$$

бағалауын пайдаланып,

$$\Delta_2 \le A\lambda h r^{\mu-\lambda-1} = A\lambda\left(\frac{h}{r}\right)^{1-\mu+\lambda} h^{\mu-\lambda} < A\lambda h^{\mu-\lambda}$$

дәлелдеуге керек теңсіздікке келеміз. Өйткені,
$0 \le \mu \le 1$ және $x \ge 0$ болғанда

$$(1+x)^{\mu} - 1 \le \mu x,$$

себебі

$$f(x) = (1+x)^{\mu} - \mu x - 1$$

десек, $f(0) = 0,\ f'(0) \le 0$

екеніне көз жеткіземіз.

Сонымен тұжырым дәлелденді.

6^0. Дәл жоғарыдағы 4^0 жағдайдағыдай

$$\psi(t_0, t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{|t - t_0|^\lambda}$$

функциясы екі айнымалының функциясы ретінде $\mathrm{H}^{\mu-\lambda}(L)$ класына жатады, егер $\varphi(t) \in \mathrm{H}^{\mu}(L)$ және егер $0 \le \lambda < \mu$.