2. Жатық қисықтағы Н класының функциялары

Айталық, L-тұйық немесе ашық жатық доға, ал $\varphi(t)$ – осы қисық нүктелерінің функциясы болсын.

Егер осы қисықтың кез келген t_1 және t_2 екі нүктесі үшін

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \le A|t_2-t_1|^{\lambda} \tag{6}$$

теңсіздігі орындалса, онда $\varphi(t)$ функциясы L қисығында Гельдер шартын немесе $H^{\lambda}(L)$ шартын қанағаттандырады деп атаймыз, мұндағы А және λ - оң сандар. А тұрақтысын **Гельдер еселеуіші** деп, ал λ санын **Гельдер көрсеткіші** деп атаймыз. Әдетте А тұрақтысының мәніне көңіл бөлмейміз, ал егер λ көрсеткішінің мәнін айқын көрсету қажет болса, онда φ(t) функциясы $H^{\lambda}(L)$ шартын қанағаттандырады деп айтып, φ(t)$\in$ $H^{\lambda}(L)$ арқылы белгілейміз. Егер λ >1 болса, онда (6) шарттан φ'(t) туындысының нөлге тең екендігі шығар еді де, φ(t) функциясы тұрақтыға тепе-тең болар еді. Сондықтан біз 0<$\lambda \le$1 деп есептейміз. Егер λ=1 болса, онда Гельдер шарты белгілі Липшиц шартына көшер еді.

Егер φ(t) функциясы $H^{\lambda}(L)$ шартын қанағаттандырса, онда оның барлық $\nu \le \lambda$ үшін де H^{ν}(L) шартын қанағаттандыратынын байқаймыз. Ал керісінше $\nu > \lambda$ үшін жалпы мұндай тұжырым орындалмайды. Сонымен, кіші λ мәндерін кеңірек функциялар класы сәйкес келеді екен. Ең тар класс, әрине Липшиц шартын қанағаттандыратын функциялар класы. Мұнан, егер φ_1(t), φ_2(t) – екі функциялары көрсеткіштері сәйкес λ_1, λ_2 Гельдер шарттарын қанағаттандырса, онда олардың қосындысы да, көбейтіндісі де, сонымен бірге бөлімі нөлге айналмайтын жағдайда, қатынасы да көрсеткіші λ=min(λ_1, λ_2) Гельдер шартын қанағаттандырады.

Ақырлы өсімше туралы теоремадан дифференциалданатын және ақырлы туындысы бар φ(t) функциясының Липшиц шартын қанағаттандыратынын көреміз. Керісінше, жалпы айтқанда, дұрыс емес екенін мына мысалдан көруге болады: нақты өсте берілген φ(x)=|x| функциясы Липшиц шартын қанағаттандырады, бірақ координат бас нүктесінде оның туындысы жоқ, өйткені ол нүктеде оң және сол жақ туындылары сәйкес +1 және -1.

Күрделі функция үшін функциялық тәуелділік тізбегіндегі функциялар көрсеткіштерінің ең кішісі Гельдер көрсеткіші болады.

Мысал 1. φ(x)=$\sqrt{x} \in H^{1/2}$(a,b) (мұндағы (a,b) нақты өстің кез келген интервалы) екенін, ал егер (a,b) интервалы нөл нүктесін ұстамаса, онда $\sqrt{x}$ $\in H'$(a,b) екенін көрсетіңдер.

2. $\varphi(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ және $\varphi(0)=0$. Осы функцияның $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ кесіндісінде Гельдер шартын қанағаттандырмайтынын, ал $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ жарты интервалында Гельдер шартын қанағаттандыратынын көрсетіңдер.

Н класы функциясының ұғымы көп айнымалылар функциясы үшін де жалпыланады. L жатық қисығының $t_1,t_2,...,t_n$ нүктелерінің $\varphi(t_1,t_2,...,t_n)$ функциясы $\mathrm{H}^{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n}$(L) класына жатады деп айтамыз, егер $t_1,t_2,...,t_n$ және $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n$ кез келген қосақ мәндері үшін

$$|\varphi(t_1,t_2,...,t_n)-\varphi(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)|\le A_1|t_1-\tau_1|^{\lambda_1}+A_2|t_2-\tau_2|^{\lambda_2}+...+A_n|t_n-\tau_n|^{\lambda_n}$$

теңсіздігі орындалса, мұндағы $A_1,A_2,...,A_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$- оң тұрақтылар және $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\le 1$.

Егер $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ көрсеткіштерінің мәндерін көрсетудің қажеті жоқ болса, онда біз жай ғана $\varphi(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathrm{H}(L)$ деп айтамыз. Ал $\lambda_1=\lambda_2=...\lambda_n=\lambda$ жағдайында $\mathrm{H}^{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n}$(L) орнына $\mathrm{H}^{\lambda}(L)$ деп жазамыз.

Егер λ саны $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ сандарының ең кішісі болса, онда

$$|\varphi(t_1,t_2,...,t_n)-\varphi(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)|<C\left[|t_1-\tau_1|^{\lambda}+|t_2-\tau_2|^{\lambda}+...+|t_n-\tau_n|^{\lambda}\right]$$

теңсіздігі орындалатындай C тұрақтысын табуға болады.