§4. Коши тектес интегралдың үзіліссіздік сипаты

Біз 3 параграфта Коши тектес интегралдың шектік мәндері $\Phi^{+}(t)$, $\Phi^{-}(t)$ функцияларының L контурында үзіліссіз екенін көрсеттік. Бірақ та бұл функциялардың үзіліссіздікке қарағанда тереңірек, олардың өздерінің Гельдер шартын қанағаттандыратын қасиеті бар екен.

Племель-Привалов теоремасы. Егер тұйық жатық L контурында $\varphi(t)$ функциясы $\mathrm{H}^{\lambda}(L)$ Гельдер шартын қанағаттандырса, онда Коши тектес интегралының шектік $\Phi^{+}(t)$ және $\Phi^{-}(t)$ мәндері де $\lambda<1$ жағдайында $\mathrm{H}^{\lambda}(L)$ Гельдер шартын қанағаттандырады, ал егер $\lambda=1$ болса, онда $\mathrm{H}^{\lambda-\varepsilon}(L)$ шартын қанағаттандырады, мұндағы ε - жеткілікті аз оң тұрақты.

Дәлелдеу. Сохоцкий формулаларын былай

$$\Phi^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

өрнектеп, мұның оң жағындағы бірінші және соңғы қосылғыштардың Гельдер шартын қанағаттандыратынын байқаймыз. Сондықтан теореманы

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau$$

функциясы үшін дәлелдеу жеткілікті. Ол үшін біріне бірі жеткілікті жақын кез келген t_1 және t_2 нүктелері үшін

$$\left|\psi(t_2)-\psi(t_1)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau\right| \qquad (1)$$

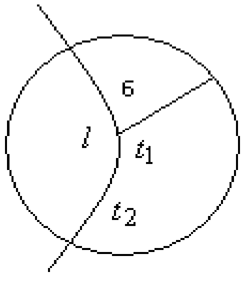
айырымын бағалаймыз**.**

Алдымен, центрі t_1, радиусы δ және L қисығын a және b нүктелерінде қиятын шеңбер көмегімен L контурынан l бөлігін аламыз.Айталық, t_2 кез келген t_1 нүктесінен ерекше l қисығының a және b нүктелеріне тең емес нүкте. Сонда $\delta=k|t_2-t_1|$ десек, онда $k>1$ екені айқын. Егер $s=s(t,\tau)$ арқылы ұштары t және τ болатын L контурының екі доғасының ең кішісінің ұзындығын белгілесек, онда L контурында жатықтығының (3) (§3) формуласынан шығатын L контурының кез келген t_1, t_2 нүктелері үшін

$$|s(t_1,t_2)|\le m|t_2-t_1| \qquad (2)$$

теңсіздігін жазуға болады, мұндағы m -оң тұрақты.

Сөйтіп (1) айырымды былай өрнектейміз:



$$\psi(t_2)-\psi(t_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(t_1)-\varphi(t_2)}{\tau-t_1}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{[\varphi(\tau)-\varphi(t_2)](t_2-t_1)}{(\tau-t_1)(\tau-t_2)}d\tau=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_4$$

Енді тура 3 параграфтың негізгі леммасын дәлелдеудегідей

$$|\mathrm{I}_2|\le\frac{1}{2\pi}\int_l\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right||d\tau|<\frac{Am}{2\pi}\int_l r^{\lambda-1}|dr|\le\frac{Am}{\pi}\int_0^\delta r^{\lambda-1}dr=A_1|t_2-t_1|^\lambda$$

бағалауын аламыз. Дәл осылай

$$|\mathrm{I}_1|\le A_2|t_2-t_1|^\lambda.$$

Ал I_3 интегралын бағалау үшін әуелі

$$|\mathrm{I}_3|\le\frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{2\pi}\left|\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-t_1}\right|\le\frac{A|t_2-t_1|^\lambda}{2\pi}\left|\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-t_1}\right|$$

теңсіздігін жазып, сонан соң соңғы интегралды тікелей есептесек

$$\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-t_1}=\ln\frac{a-t_1}{b-t_1}.$$

Бұл t_1-дің L контурындағы кез келген мәндерінде шектеулі. Сондықтан

$$|\mathrm{I}_3|\le A_3|t_2-t_1|^\lambda$$

бағалауын табамыз.

Ең күрделі I_4 интегралын бағалауға көшейік. Оған Гельдер шартымен 3 параграфтағы (3) формуланы пайдаланып,

$$|\mathrm{I}_4|\le A\frac{|t_2-t_1|}{2\pi}\int_{L-l}\frac{|d\tau|}{|\tau-t_1||\tau-t_2|^{1-\lambda}}\le A'|t_2-t_1|\int_{L-l}|\tau-t_1|^{\lambda-2}\left|\frac{\tau-t_1}{\tau-t_2}\right|^{1-\lambda}|d\tau|$$

теңсіздігін аламыз. Ал

$$|\tau - t_1| - |t_1 - t_2| \le |\tau - t_2| \quad \text{және} \quad |\tau - t_2| \ge \delta = k|t_2 - t_1|$$

болғандықтан,

$$|\tau - t_1| \le \frac{k+1}{k}|\tau - t_2|,$$

демек,

$$|\mathrm{I}_4| \le A''\left(\frac{k+1}{k}\right)^{1-\lambda}|t_2 - t_1|\int_R^{\delta} r^{\lambda-2}dr \qquad (3)$$

Мұндағы

$$R = \max_{\tau \in L-l}|\tau - t_1|.$$

Егер $\lambda < 1$ болса, онда соңғы (3) интегралды есептеп,

$$|\mathrm{I}_4| \le A_4|t_2 - t_1|^{\lambda} \qquad (4)$$

бағалауын аламыз.

Егер $\lambda = 1$болса, онда (3) интегралды есептеуден,

$$|\mathrm{I}_4| \le A_4'|t_2 - t_1|\left|\ln|t_2 - t_1|\right| \qquad (5)$$

теңсіздігін аламыз да, ал $\ln(x)$ функциясының x нөлге ұмтылғанда $|x|$ функциясының кез келген теріс дәрежесінен, яғни $|x|^{-\varepsilon}\,(\varepsilon > 0)$ функциясынан жай өсетін болғандықтан (яғни $|x|^{\varepsilon}\ln|x| \to 0, \quad |x| \to 0, \quad \forall\varepsilon > 0$) (5) теңсіздіктен

$$|\mathrm{I}_4| \le A_4'|t_2 - t_1|^{1-\varepsilon}$$

теңсіздігін аламыз.

Сонымен, $\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_4$ бағалауларын салыстырып және $\lambda = 1$ жағдайда $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ бағалауларында λ көрсеткішін $1-\varepsilon$ мен ауыстыруға болатынын байқап, теорема дәлелдеуін аламыз.

Ескерту. Теореманы тұйық емес контур үшін де оны толықтыру арқылы осы жағдайға келтіріп дәлелдеуге болады.