

1. Кез келген кешен функцияның аймақта аналитикалық функция үшін шекаралық мән болу шарты

Тұйық жатық L контурында контур нүктелерінің белгілі бір үзіліссіз кешен функциясы $\varphi(t)$ берілсін және $t = t(s) = t_1(s) + it_2(s)$ контурдың кешен түрдегі теңдеуі болсын, мұндағы $t(s)$ -контурдың белгілі бір нүктесінен бастап есептелетін s доға ұзындығының функциясы.

$\varphi(t)$ функциясының өрнегіне кешен координатын қойып, нақты және кешен бөліктерін ажыратып, оны

$$\varphi(t) = \varphi[t(s)] = \varphi_1(s) + i\varphi_2(s)$$

түрінде жазамыз.

Берілген кешен функция $\varphi(t)$ шекаралық мәні болатын $D^+(D^-)$ аймағында аналитикалық функция бар ма деген сұраққа, жалпы жағдайда, жоқ деп жауап беруге болады. Шынында да, $\varphi_1(s)$ нақты бөлігінің мәндері арқылы $D^+(D^-)$ аймағында шекаралық мәні $\varphi_1(s)$ болатын $u(x, y)$ гармониялық функциясын түзуге болады (Дирихле есебі).

Ал $u(x, y)$ функциясы арқылы тұрақты қосылғыш дәлдігіне дейін $v(x, y)$ түйіндес гармониялық функциясын анықтауға болады. Сонымен, нақты бөлігінің шекаралық мәні $\varphi_1(s)$ болатын $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитикалық функциясын аламыз. Енді мұның жорымал бөлігі $v(x, y)$ функциясының шекаралық мәнін есептесек, ол, жалпы алғанда, берілген $\varphi_2(s)$ функциясына тең болмайды, демек, берілген $\varphi(t)$ кешен функциясы $D^+(D^-)$ аймағында аналитикалық функцияның шекаралық мәні бола бермейді екен. Міне, бұдан шекарада аналитикалық функцияның тек бір ғана құраушысының мәнін (нақты немесе жорымал) беру керек екен, ал екіншісі тұрақты қосылғыш дәлдігіне дейін анықталады.

Сонымен, егер берілген кешен функция аналитикалық функцияның шекаралық мәні болса, онда ол белгілі бір қатынасты қанағаттандыруы керек екен. Енді осы қатынасты табу мәселесімен айналысайық.

Тығыздығы $\varphi(t) \in H^\lambda(L)$ деп

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

Коши тектес интегралын қарастырайық. Егер $z \in D^+$ және D^+ аймағында аналитикалық функцияның шекаралық мәні $\varphi(t)$ болса, онда

$$\Phi^+(z) = \varphi(z),$$

ал, егер $z \in D^-$ және D^- аймағында аналитикалық функцияның шекаралық мәні $\varphi(t)$ болса, онда шектеусіз аймақ үшін Коши формуласы бойынша

$$\Phi^-(t) = -\varphi(z) + \varphi(\infty).$$

Енді L контурындағы шектік мәнді алып және (8) Сохоцкий формуласын пайдаланып, $\varphi(z)$ функциясының D^+ аймағында аналитикалық жағдайында

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

аламыз. Дәл осылай $\varphi(z)$ функциясының D^- аймағында аналитикалық жағдайында

$$-\varphi(t) + \varphi(\infty) = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Мұнан $\varphi(t)$ функциясының D^+ аймағында аналитикалық функцияның шектік мәні болу үшін

$$-\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0 \quad (11)$$

теңдігінің орындалуы қажетті екенін аламыз. Дәл осылай $\varphi(t)$ функциясының D^- аймағында аналитикалық функцияның шектік мәні болуы үшін

$$\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \varphi(\infty) = 0 \quad (12)$$

шартының орындалуының қажетті екенін аламыз.

Енді осы шарттардың жеткілікті екенін көрсетейік. Шынында да, айталық $\varphi(t)$ (11) шартты қанағаттандырсын. Онда

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

Коши тектес интегралы үшін (8) Сохоцкий формулалары негізінде (11) шарт

$$\Phi^-(t) = 0$$

шартымен пара-пар. Сонда (9) формуладан

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \Phi^+(t).$$

Сонымен мынадай қорытындыға келдік.

Теорема. Жатық тұйық L контурында Гельдер шартын қанағаттандыратын кешен $\varphi(t)$ функциясы берілсін. Бұл функцияның D^+ аймағында аналитикалық функцияның шекаралық мәні болуы үшін (11) шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті. Ал бұл функцияның D^- аймағында аналитикалық функцияның шекаралық мәні және шексіздікте белгілі бір γ санына ($\gamma = \varphi(\infty)$) тең болуы үшін (12) шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті.

Ескерту. Бұдан да жалпы есеп қоюға болады: контурда берілген кешен функцияның әрқайсысында берілген ерекшеліктері бар белгілі нүктелерден басқа жерде аналитикалық функцияның шекаралық мәні болу шартын табу есебін қарастыруға болады. Келешекте шексіздікте реті n полюсы бар берілген бас бөлігі $\gamma(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ және осы шексіздіктен басқа D^- аймағында аналитикалық функцияның кешен $\varphi(t)$ функциясының шекаралық мәні болу шартын табу маңызды. Онда дәл жоғарыдағыдай, (12) шарттың орнына

$$\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \gamma(t) = 0 \quad (13)$$

шартын аламыз.