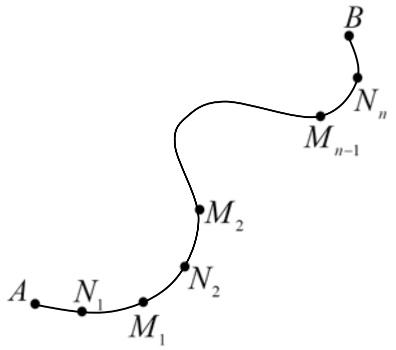
№8 дәріс
Қисық-сызықты интеграл

I. Бірінші текті қисық сызықты интеграл. Кеңістікте L қисық берілсін, $A-$бас нүктесі, ал $B-$соңғы. Осы қисықтың бойында $f(M)=f(x,y,z)-$функция анықталған болсын.



Мына операцияларды жасайық:

1. $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ нүктелермен доғаны n бөлікке бөлеміз.

2. Әр дербес доғаның бойында $N_k = N_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ нүктелерді таңдаймыз.

13-беттегі сурет

3.Қосынды құрастырамыз: $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\cdot \Delta l_k (1)$, $\Delta l_k -$ дербес доғаның ұзындығы. Осы қосынды $f(x,y,z)$ функцияның L қисық бойынша интегралдық қосынды деп аталады.

Дербес доғалардың ұзындықтарының ең үлкенін $\lambda-$деп белгілейміз.

Анықтама. Егер $\lambda\to 0\ (n\to\infty)$ интегралдық қосындының шегі бар және бөлу амалымен N_k нүктелердің таңдау амалдарына тәуелсіз, онда осы шек $f(x,y,z)$ функциясының L қисық бойынша бірінші шекті қисық сызықты интеграл деп аталады.

$$\int_L f(x,y,z)dl = \lim_{\lambda\to 0}\delta \qquad (2)$$

Теорема. Айталық

1) L қисық параметрлік түрде берілсін және барлық функциялар туындыларымен үзіліссіз.

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t)\\ y &= y(t)\\ z &= z(t)\end{aligned}\right\}\quad \alpha\le t\le\beta \qquad (3)$$

2) $f(x,y,z)$ функция L қисық бойында үзіліссіз. Онда бұл функцияның L қисық бойынша бірінші текті қисық сызықты интегралы бар және:

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\cdot\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt \qquad (4)$$

Салдар. 1. Жазықта (4)-ші формула былай жазылады:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\cdot\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt \qquad (5)$$

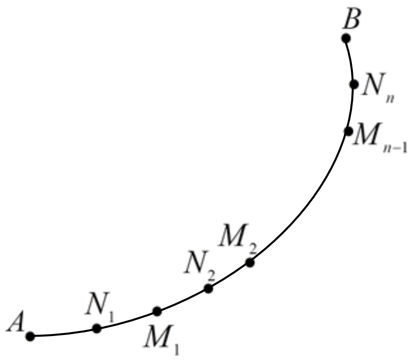
Егер қисықтың теңдеу $y=\varphi(x),\ a\le x\le b$ болса, онда

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f[x,\varphi(x)]\cdot\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx \qquad (6)$$

Мысалдар.1. $\int_L \sqrt{2y}dl$ интегралды $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),$ циклоиданың бірінші арқасы бойынша есептеңіз; $[4\pi a\sqrt{a}]$.

2. $\int_{AB} \frac{1}{x-y}dl \quad AB: y = \frac{1}{2}x - 2$ түзу, $A(4,0),\ B(0,-2);$ $[\sqrt{S}\ln 3]$

II. Екінші текті қисық сызықты интеграл. Жоғары аталған операцияларды қайталаймыз, айырмашылық – бағытты белгілейміз.



Оң бағыт A-дан B-ға.

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} P(N_k)\cdot\Delta x = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad (7)$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\delta = \int_{AB} p(x,y,z)dx \qquad (8)$$

Егер AB доғаның бойында $Q(x,y,z)$ және $R(x,y,z)$ функциялар анықталған болса, онда мына интегралда осы жолмен анықталады:
$\int_{AB} Q(x,y,z)dy,\ \int_{AB} R(x,y,z)dz$ және олардың қосындысы $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$

Есептеу формулалары:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),y(t),z(t)]\cdot x'(t) + Q[...]\cdot y'(t) + R[...]\cdot z'(t)\}dt \qquad (9)$$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),y(t)]\cdot x'(t) + Q[x(t),y(t)]\cdot y'(t)\}dt \qquad (10)$$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b \{P[x,\ \varphi(x)] + Q[x,\ \varphi(x)]\cdot\varphi'(t)\}dx \qquad (11)$$

Мысалдар:

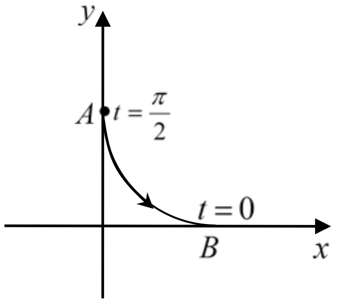
1. $\int_{AB}(2x+z)dx + 6ydy + xdz,\quad A(1,\ 0,\ -1),\ B(2,\ 1,\ 4)$ нүктелерді жалғастыратын түзу бойынша

Шешуі. $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z+1}{4+1} = t \Rightarrow x = t+1,\ \ y = t,\ z = 5t-1$

A нүктеге $t = 0$ сәйкес келеді, демек $\alpha = 0$,

B нүктеге $t=1$ сәйкес келеді, демек $\beta=1$.

Жауабы: 15.



2. $\int\limits_{AB}\frac{x^2dy-y^2dx}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}=Y$, $\left.\begin{array}{l} x=R\cos^3 t \\ y=R\sin^3 t \end{array}\right\}$ астроиданың төрттен бөлігі

Шешуі. A нүктеде $t=\frac{\pi}{2}$, B нүктеде $t=0$, демек: $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=0$.

Жауабы: $-\frac{3}{16}\pi R^{\frac{4}{3}}$.