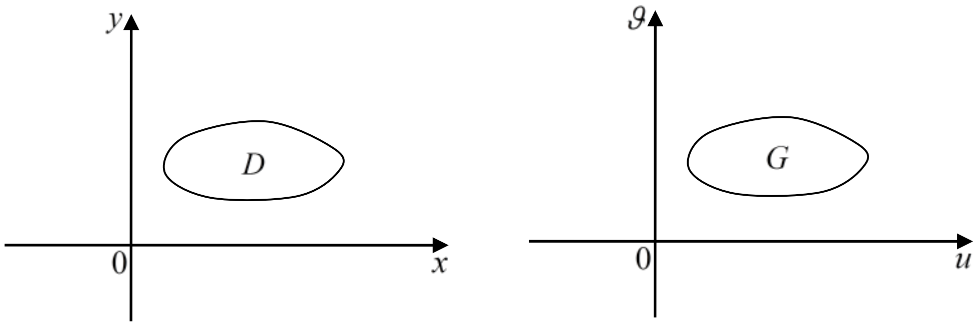
№3 дәріс
Қос интегралда айнымалыларды алмастыру, қолданылуы

Екі жазықтық қарастырамыз:



G облысында $x=\varphi(u,v)$ және $y=\psi(u,v)$ (1)

функциялар берілсін. G және D облыстардың арасында өзара бір мәнді сәйкесік бар деп ұйғарамыз, онда (1)-ден u және v табылады: $u=\overline{\varphi}(x,y)$ және $v=\overline{\psi}(x,y)$

Мына анықтауыш:

$$I(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$ Якоби анықтауышы деп аталады.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_G f\left[\varphi(u,v),\psi(u,v)\right]\cdot\left|I(u,v)\right|dudv \qquad (2)$$

Поляр координаталар системасы: $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_G f\left[r\cos\varphi,r\sin\varphi\right]\cdot drd\varphi \qquad (3)$$

Квадратураланатын D облысының ауданы:

$$S=\iint\limits_D dxdy \qquad (4)$$

Беттің ауданы:

$$\delta=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}dxdy \qquad (5)$$

Дененің көлемі:

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy \qquad (6)$$

Массаны есептеу формуласы:

$$m=\iint\limits_D\rho(x,y)dxdy, \qquad \rho - \text{дененің тығыздығы} \qquad (7)$$

Ауырлық центірінің координаталары:

$$x_0=\frac{\iint\limits_D\rho^x(x,y)dxdy}{m},\ \ y_0=\frac{\iint\limits_D\rho^y(x,y)dydy}{m} \qquad (8)$$

алымындағы шамалар статикалық моменттер деп аталады.

Инерциялық моменттер:

$$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)dxdy,\ \ I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)dxdy \qquad (9)$$

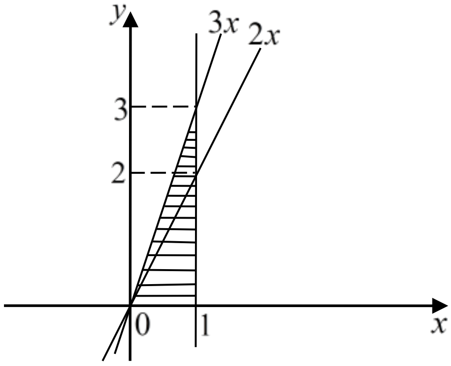
Координатаның бас нүктесіне қарай инерциялық момент:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x, y)dxdy \qquad (10)$$

Мысалдар. 1) Интегралдау айнымалыларының ретін өзгерт

$$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y)dy$$

Жауабы: $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y)dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x, y)dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x, y)dx$



Суреттен байқаймыз: облысты екі бөлікке бөлу керек.

2) $z = x^2 + y^2,\ y^2 = 4x,\ x = 1,\ z = 1$ денесінің көлемін тап

Шешуі: $z = x^2 + y^2$ параболонд, $4x = y^2$ x өсіне қарай симметриялы параболалық цилиндр. Дене Oxz жазықтығына қарай симметриялы болғандықтан көлемді AOB параболасының жартысы бойынша анықтап 2-ге көбейту жеткілікті

$$V = 2\int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{x}} \left(x^2 + y^2\right)dy = \frac{344}{105}.$$

3) Бірінші квадрантта жатқан эллипстің (пластинка) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ауырлық центрінің координаталарын анықта, беттің тығызыдығы $\rho(x, y) = kxy,\ k - const$.

Шешуі. Алдымен массаны анықтаймыз:

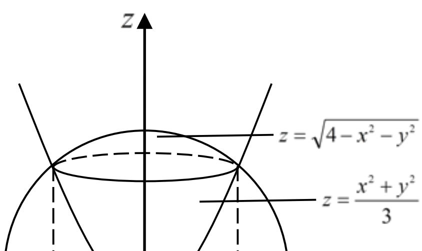
$$m = \iint\limits_D kxydxdy = k\int_0^a xdx \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{a^2 + x^2}} ydy = \frac{ka^2b^2}{8}$$

$$m_y = \iint\limits_D kx^2ydxdy = \frac{ka^3b^2}{15},\quad m_y = \iint\limits_D kxy^2dxdy = \frac{ka^2b^3}{15} \qquad x_0 = \frac{8a}{15};\quad y_0 = \frac{8b}{15}.$$

4) $y = 4 - x^2,\ y = 0$ сызықтармен шектелген фигураның Ox өсіне қарай инерциялық моментін тап.

Шешуі. $I_x = \int_{-2}^{2} dx \int_0^{4-x^2} y^2dy = 39\dfrac{1}{105}$

5) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ сферамен және $x^2 + y^2 = 3z$ параболоидпен шектелген дененің көлемін табыңыз, мұнда $z \geq 0$.



Шешуі. Берілген теңдеулерден $z^2+3z-4=0$ бұдан $z=1$, себебі $z\geq 0$ болу керек.

$$V=\iint_D\left[\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\right]d\delta=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)\rho d\rho=\frac{19}{6}\pi\ .$$