Стокс формуласы

Айталық, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ функциялар үш өлшемді (V) облысында анықталған, бірінші ретті дербес туындыларымен үзіліссіз болсын, ал (S) (l) қисықпен шектелген осы облыста жататын тұйық емес бет, $\vec{n}-$ нормаль (S) бетке. Онда

$$\oint\limits_{l} Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{(S)}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(\vec{n},ox)+\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(\vec{n},oy)+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\cos(\vec{n},oz)\right]ds,$$
(6)

$$\begin{vmatrix}\cos(\vec{n},ox) & \cos(\vec{n},oy) & \cos(\vec{n},oz)\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

Символдың анықтауышты ашқанда (6)-ші формуланың оң жақтағы интегралдың астындағы өрнек шығады.

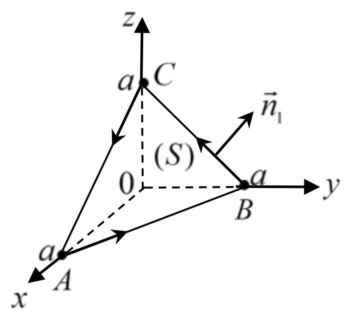
Егер $R=0$ деп алсақ, онда Стокс формуласынан Грин формуласы шығады.

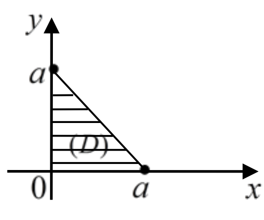
Мысал. $Y=\oint\limits_{(l)}(z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$, мұнда $A(a,0,0),\ B(0,a,0), C(0,0,a)-$ төбелері болатын үшбұрыш контуры, интеграл үшін Стокс формуласын жазып тексеріңіз.

Шешуі. $P=z-y,\ Q=x-z,\ R=y-x$

$$\oint\limits_{(l)}(z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz=2\iint\limits_{(S)}[\cos(\vec{n},ox)+\cos(\vec{n},oy)+\cos(\vec{n},oz)]ds.$$

(S) бетті A,B,C нүктелерден өтетін үшбұрыштың бетін алдыға болады. Сонда: $\oint\limits_{(l)}=\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}+\int\limits_{CA}=a^2+a^2+a^2=3a^2$.





$$2\iint\limits_{(S)}[\cos(\vec{n},ox)+\cos(\vec{n},oy)+\cos(\vec{n},oz)]ds=2\iint\limits_{(D)}(-z'_x+1-z'_y)d\sigma=3a^2.$$

Себебі, $z=a-x-y,\ z'_x=-1,\ z'_y=-1$.

Остроградский-Гаусс формуласы

$$\iiint\limits_{(v)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iint\limits_{(S)}[P\cos(\vec{n},ox)+Q\cos(\vec{n},oy)+R\cos(\vec{n},oz)]ds \qquad (7)$$

мұнда P, Q, R тұйық (v) облысында бірінші ретті дербес туындыларымен үзіліссіз функциялар, (S) – облыстың беті ал $\vec{n}-$ сыртқы нормаль.

Мысал. $Y = \iint\limits_{(S)} [x\cos(\vec{n}, ox) + y\cos(\vec{n}, oy) + z\cos(\vec{n}, oz)]ds$ интегралды есепте, мұнда (S) – радиусы R сфера, ал $\vec{n}-$ сыртқы нормаль.

Шешуі. $P = x,\ Q = y, R = z$

$$Y = \iiint\limits_{(v)} (1+1+1)dv = 3v = 3\frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi R^3 .$$