№11 дәріс (2сағ)
Беттік интеграл. Стокс, Остроградский формулалары

Айталық, (S) (тұйық, тұйық емес) бет берілсін және әр нүктесінде $f(M)=f(x,y,z)$ функция анықталған болсын. Мына операциялар жасайық:

1. (S) бетті кез келген қисықтармен n бөлікке бөлеміз: $(S_1),(S_2),...,(S_n)$. Аудандарын $S_1, S_2, ..., S_n$ деп белгілейміз.

2. Әр (S_k) бөлікте $M_k(x_k,\ y_k, z_x)$ нүктелерді таңдаймыз.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k)S_k$ (1) қосындыны құрастырып, оны $f(x,y,z)$ функцияның (S) бет бойынша интегралдық қосындысы деп атаймыз.

4. d деп (S_k) бөліктердің ең үлкен диаметірін белгілейміз.

Анықтама. Егер $d\to 0(n\to\infty)$ (1)-ші қосындының шегі, жоғары жасалған амалдарға тәуелсіз, анықталған болса, онда ол $f(x,y,z)$ функцияның (S) бет бойынша беттік интегралы деп аталады, оны былай белгілейміз:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds \text{ немесе } \iint\limits_{(S)} f(M)ds$$

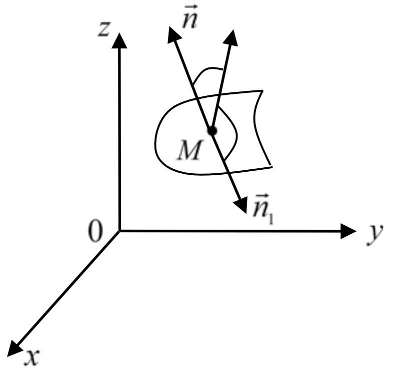
Теорема. Айталық: 1) (S) бет $z=z(x,y)$ теңдеумен берілсін, мұнда $(x,y)\in D,\ D-(S)$ беттің Oxy жазықтыққа алынған проекциясы және $z(x,y)$ функцияның x және y бойынша үзіліссіз дербес туындылар бар.

2) $f(x,y,z)$ функция (S) бетте үзіліссіз. Онда $f(x,y,z)$ функциясының беттік интегралы бар және

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds=\iint\limits_{D} f[x,y,z(x,y)]\cdot\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}\,d\sigma \qquad (2)$$

Салдар. $\vec{n}-(S)$ бетке M нүктедегі нормаль. Онда

$$\cos(\vec{n},oz)=\frac{1}{\sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}},\quad \sqrt{1+[z'_x(x,y)]^2+[z'_y(x,y)]^2}=\frac{1}{\cos(\vec{n},oz)}.$$



$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds=\iint\limits_{D} f[x,y,z(x,y)]\cdot\frac{1}{\cos(\vec{n},oz)}d\sigma \qquad (3)$$

Дербес жағдай үшін, $f(x,y,z)=F(x,y,z)\cdot\cos(\vec{n},oz)$ алатын болсақ, онда

$$\iint\limits_{D} F(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{S} F(x,y,z)\cdot\cos(\vec{n},oz)ds \qquad (4)$$

немесе $\iint\limits_{D} F[x,y,z(x,y)]d\sigma=-\iint\limits_{S} F(x,y,z)\cdot\cos(\vec{n}_1,oz)ds$ (5)

Мысал, $y=\iint\limits_{(S)}(z+2x+\frac{4}{3}y)ds$ есепте, егер (S) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ жазықтықтың бірінші октантта жатқан беті болса,

Шешуі. $z=4-2x-\frac{4}{3}y$, $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\frac{\sqrt{61}}{3}$, $y=4\sqrt{61}$.