Моделирование на базе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса.

$k-\varepsilon$ модель турбулентности

Для технических приложений более приемлемым является метод, базирующийся на решении осредненных уравнений Навье-Стокса или уравнений Рейнольдса.

В подходе моделирования осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) к основным уравнениям применяется операция осреднения по ансамблю, то есть в динамику осредненного течения вносят вклад все временные и пространственные масштабы турбулентности. Отсюда и преимущество осредненных по времени уравнений: их решения вычисляются на компьютере быстро. В то же время появляются новые члены в осредненном уравнении импульса, которые нужно моделировать, как например, напряжения Рейнольдса

τ_{ij} , которые возникают от осредненных по Рейнольдсу конвективных членов:

$$\tau_{ij} = -\overline{u_i' u_j'}$$

При моделировании турбулентных течений по осредненным параметрам широко распространена гипотеза Буссинеска, которая проводит аналогию между молекулярной и турбулентной диффузией. Вязкость зависит от времени и масштабов турбулентности, которые вычисляются из решения дополнительных транспортных уравнений, например, из уравнений для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации.

Для двухфазных течений при распылении воздушным потоком один из особенных недостатков модели RANS состоит в том, что она принципиально не описывает динамические явления, которые происходят в турбулентных масштабах, которые соизмеримы с характерными масштабами распыленной фазы. Поэтому приходится моделировать взаимодействие фазы с турбулентностью. Однако, можно отметить преимущество RANS в его быстроте и эффективности для решения инженерных задач.

Осреднение в RANS выполняется таким образом, что поле потока разделяется на две части: первая называется осредненной частью, а вторая пульсационной составляющей:

$$u_i\left(x_i,t\right)=\bar{u}_i\left(x_i,t\right)+u_i'\left(x_i,t\right)$$

Средняя часть определяется как среднее по ансамблю, то есть это средняя по совокупности реализаций:

$$\bar{u}_i\left(x_i,t\right)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u_i\left(x_i,t\right)$$

где N – количество участников в ансамбле.

Применяя операцию осреднения, можно получить осредненные уравнения сохранения массы, импульса и энергии. В этом случае из основных уравнений сохранения получаем осредненные уравнения Навье – Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial x_i}=\bar{S}_{mass}$$

$$\frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial \rho \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j}=\rho g-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+\bar{S}_{mom}$$

$$\frac{\partial \rho \bar{E}}{\partial t}+\frac{\partial \rho \bar{E} \bar{u}_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial \bar{p} \bar{u}_j}{\partial x_i}+\frac{\partial \bar{u}_j \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j \tau_{ij}}{\partial x_j}+\bar{S}_{energy}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)$$

τ_{ij} это напряжения Рейнольдса, значения которых неизвестны и должны быть моделированы. Напряжения Рейнольдса определяются из приближения к гипотезе Буссинеска

$$\tau_{ij} = \mu_t\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\right) - \frac{2}{3}\rho\delta_{ik}k$$

k - это кинетическая энергия турбулентности, которая определяется как

$$\frac{1}{2}\left(\overline{u_i'^2} + \overline{v_i'^2} + \overline{w_i'^2}\right)$$

μ_t турбулентная вязкость

$k-\varepsilon$ *модель турбулентности*

Более универсальными моделями в инженерных расчетах турбулентных потоков являются модели с двумя дифференциальными уравнениями. Наиболее часто в технических течениях используется модель с двумя дифференциальными уравнениями.

$k-\varepsilon$ модель, когда решаются два уравнения для кинетической энергии турбулентности

k и скорости ее диссипации ε

$$\rho\frac{\partial k}{\partial t}+\rho\frac{\partial \bar{u}_j k}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+G-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}-\rho\varepsilon$$

$$\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\rho\frac{\partial \bar{u}_j \varepsilon}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right]=c_{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon}{k}G-\left[\left(\frac{2}{3}c_{\varepsilon_2}-c_{\varepsilon_3}\right)\rho\varepsilon\delta_{ij}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right]-c_{\varepsilon_2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$G=\mu_t\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

Турбулентная вязкость определяется следующим соотношением:

$$\mu_t = \rho \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon}$$

Здесь C_μ является константой и ее значение равно 0,09

Граничные условия для кинетической энергии турбулентности k и ее скорости диссипации ε записываются таким образом:

$$\nabla k \cdot \vec{n} = 0 \qquad \varepsilon = c_{\mu_\varepsilon} \frac{k^{3/2}}{y} \qquad c_{\mu_\varepsilon} = \left[\frac{c_\mu}{\Pr_\varepsilon \left(c_{\varepsilon_2} - c_{\varepsilon_1} \right)} \right]^{1/2}$$

При расчете различных характеристик течения применялась система уравнений турбулентного переноса, для замыкания которой использована стандартная $k-\varepsilon$ модель турбулентности, поскольку в исследованиях, связанных с изучением процессов тепломассопереноса в турбулентных течениях жидких топлив эта модель проявляет устойчивость, экономичность, и разумную точность, что делает ее наиболее применимой для решения промышленных задачах.