



ISSN 1606-146X

№ 1 (55)
2015

Қазақстан Республикасы
Ұлттық инженерлік академиясының
Х А Б А Р Ш Ы С Ы
В Е С Т Н И К

Национальной инженерной академии
Республики Казахстан



ЭКСПО 2017
• Энергия Будущего •
Астана Казахстан



Н. Т. ДАНАЕВ¹, Б. С. ДАРИБАЕВ¹, Ф. С. АМЕНОВА²

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби

²Восточно-Казахстанский государственный университет
им. С. Аманжолова

О РЕШЕНИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПЕРЕМЕННЫХ «ФУНКЦИЯ ТОКА, ВИХРЬ СКОРОСТИ»

Для численного решения операторно-разностных уравнений с однородными краевыми условиями рассмотрен итерационный алгоритм с несамосопряженными операторами типа переменных направлений. Для нахождения решений использовался модифицированный метод минимальных поправок вариационного типа. Проведены вычислительные эксперименты и анализ результатов.

Ключевые слова: операторно-разностные уравнения, итерационный алгоритм типа переменных направлений, модифицированный метод минимальных поправок вариационного типа.

Шекаралық шарттары біртекті операторлы-айырымдық теңдеулерді сандық шешу үшін еске-өзі түйіндес емес операторлары бар айнымалы бағыттар типіндегі итерациялық алгоритмдер қарастырылған. Шешімді табу үшін вариациялық типтегі минималды түзетулер әдісінің өзгертілген түрі қолданылды. Сандық есептеулер жүргізіліп, нәтижелерге талдаулар жасалған.

Кілттік сөздер: операторлы-айырымдық теңдеулер, айнымалы бағыттар типіндегі итерациялық алгоритмдер, вариациялық типтегі минималды түзетулер әдісінің өзгертілген түрі.

In this paper, for the numerical solution of operator-difference equations with homogeneous boundary conditions was considered an iterative algorithm with non-self-adjoint operators a type of alternating directions. To find the decision used a modified method of minimal corrections of variational type. Conducted computational experiments and analysis of results.

Keywords: operator-difference equations, iterative algorithm a type of alternating directions, modified minimal corrections of variational type.

Для решения сеточных уравнений существует много различных численных методов, непрерывно ведется работа по их усовершенствованию, проводится переоценка методов, разрабатываются новые методы. Основные методы решения сеточных уравнений систематизированы и подробно изложены в работе [1]. Наибольшие успехи в построении эффективных алгоритмов достигнуты при рассмотрении сеточных уравнений с самосопряженными положительными операторами. Например, для решения двумерных разностных задач с эллиптическими операторами широко известны треугольные итерационные методы, попеременно-треугольные методы, двух- и трех-слойные итерационные методы и т.д. В большинстве случаев для решения сеточных уравнений с самосопряженными положительными операторами исследованы вопросы устойчивости и сходимости, и для них разрабатываются новые численные методы. В работе [2] предложена очень простая модификация алгоритмов наискорейшего спуска и минимальных невязок, позволяющая существенно повысить скорость сходимости, при решении сеточных уравнений с самосопряженными операторами.

В литературе методы решения сеточных уравнений с несамосопряженными операторами изучены слабо по сравнению с самосопряженным случаем.

На практике для решения сеточных уравнений с несамосопряженными операторами с успехом применяются такие методы, как методы минимальных погрешностей и минимальных невязок [1,2].

В этой статье для дифференциальных уравнений тепловой конвекции в переменных «функция тока – вихрь скорости» рассматриваются разностные уравнения с несамосопряженными операторами, для численной реализации которых используется модифицированный метод минимальных поправок вариационного типа.

Постановка задачи. В сеточной области $D_h = \{(kh_1, mh_2), k \in \overline{1, N_1-1}, m \in \overline{1, N_2-1}\}$, где h_1 и h_2 – шаги сетки по направлениям x и y соответственно, рассмотрим разностную схему, аппроксимирующую дифференциальные уравнения тепловой конвекции для несжимаемой жидкости в переменных «функция тока – вихрь скорости» [3,4]:

$$L_{h,\Psi}(\Omega)\Psi = \frac{1}{\text{Re}} \Delta_h \Omega + \tilde{A}_h \Psi - \frac{Gr}{\text{Re}^2} \theta_x + f, \quad (1)$$

$$\Delta_h \Psi = \Omega, \quad (2)$$

$$L_{h,\theta}(\Psi)\theta = \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta_h \theta + g, \quad (x,y) \in D_h, \quad (3)$$

$$\Psi|_{\partial D} = \theta|_{\partial D} = \Omega|_{\partial D} = 0, \quad (4)$$

где $\tilde{A}_h$ – неотрицательный разностный оператор [3–5].

Для численного решения уравнений (1)–(4) с однородными краевыми условиями рассмотрим итерационный алгоритм типа переменных направлений:

$$\frac{\Omega^{n+1/2} - \Omega^n}{\tau} + L_{h,\Psi}(\Omega^n)\Psi^{n+1/2} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta_h \Omega^n + \tilde{A}_h \Psi^{n+1/2} - \frac{Gr}{\text{Re}^2} \theta_x^n + f_h, \quad (5)$$

$$\Delta_h \Psi^{n+1/2} = \Omega^{n+1/2}, \quad (6)$$

$$\frac{\Omega^{n+1} - \Omega^{n+1/2}}{\tau} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta_h (\Omega^{n+1} - \Omega^n), \quad (7)$$

$$\Delta_h \Psi^{n+1} = \Omega^{n+1}, \quad (8)$$

$$L_{h,\theta}(\Psi^n)\theta^{n+1} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta_h \theta^{n+1} + g_h, \quad (9)$$

$$\Psi^0(x,y) = \Psi^n(x,y) = 0, \quad \Psi^{n+1} = \Omega^{n+1} = \theta^{n+1} = 0, \quad (x,y) \in \partial D_h. \quad (10)$$

При нахождении решений уравнений (7), (8) использовался попеременно-треугольный метод с чебышевским набором параметров [1,8,9].

Для решения вспомогательных сеточных уравнений с несамосопряженными операторами (5) и (9) применялся модифицированный метод минимальных поправок вариационного типа:

$$B \frac{\xi^{s+1} - \xi^s}{\tau_{s+1}} + A_h \xi^s = f, \quad (11)$$

где

$$B = (D + \omega_0 R_1) D^{-1} (D + \omega_0 R_2),$$

$$\tau_{s+1} = \frac{(r^s, w^s)}{(A_h w^s, z^s)}, \quad s = 0, 1, \dots \quad (12)$$

$$B w^s = r^s, \quad B z^s = A_h w^s, \quad r^s = A_h \xi^s - f.$$

Здесь оператор A_h для уравнения (5) имеет следующий вид:

$$A_h = \overset{0}{A}_h - \tau L_{h,\psi}, \quad \overset{0}{A}_h = -\Delta_h + \tau \tilde{A}_h,$$

для уравнения (9):

$$A_h = \overset{0}{A}_h + \tau L_{h,\theta}, \quad \overset{0}{A}_h = -\frac{\tau \Delta_h}{\text{Pr Re}},$$

где для операторов $\overset{0}{A}_h, R_1, R_2$ справедливы следующие соотношения:

$$\overset{0}{A}_h = R_1 + R_2, \quad R_1^* = R_2, \quad \overset{0}{A}_h = \overset{0}{A}_h^* > 0.$$

Параметр ω_0 определяется по формуле

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{\delta_0 \Delta_0}},$$

$$\Delta_0 = 4 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) + \delta_0, \quad \Delta_0 = \frac{4\tau}{\text{Pr Re}},$$

где Δ_0 соответственно для уравнений (5) и (9), δ_0 — минимальное собственное значение разностного оператора Лапласа.

Особенностью предложенного алгоритма (11), (12) является то, что итерационный параметр τ_{s+1} выбирается по формуле метода минимальных поправок, а оператор B использует структуру модифицированного попеременно-треугольного метода [1].

Для рассматриваемого метода оценка для числа итераций $n_0(\varepsilon)$ не находилась. При этом известно, что решение итерационного алгоритма типа переменных направлений (5)–(10) сходится к решению разностной схемы (1)–(4) со скоростью геометрической прогрессии [5].

Численный расчет. Для проведения вычислительных экспериментов, иллюстрирующих возможности предложенного алгоритма (11),(12), для получения информации о количестве итераций, при котором достигается сходимость, и для проверки эффективности алгоритма (5)–(10) были рассмотрены следующие тестовые задачи [3–7]:

- задача о течении жидкости в квадратной области;
- задача о свободной конвекции в квадратной области при подогреве сбоку;
- задача о конвективном течении в квадратной области с движущейся крышкой.

В таблицах 1–3 приведены данные по количеству итераций при различных значениях итерационного параметра τ , h и $\varepsilon = 10^{-4}$.

Таблица 1 – Результаты расчета задачи о каверне при $Re = 400$

τ	33x33	65x65	129x129
$1 \cdot 10^{-2}$	3905	3845	3838
$9 \cdot 10^{-3}$	4339	4271	4262
$8 \cdot 10^{-3}$	4881	4805	4792

Таблица 2 – Результаты расчета задачи свободной конвекции при подогреве сбоку при $Gr = 10^5$, $Pr = 0,73$

τ	33x33	65x65	129x129
$4 \cdot 10^{-4}$	377	923	3076
$3 \cdot 10^{-4}$	490	1105	3504
$2 \cdot 10^{-4}$	727	1451	4268

Таблица 3 – Результаты расчета задачи конвективного течения с движущейся крышкой при $Re = 400$, $Gr = 10^5$, $Pr = 0,73$

τ	33x33	65x65	129x129
$1 \cdot 10^{-2}$	2648	2813	2865
$9 \cdot 10^{-3}$	2942	3125	3183
$8 \cdot 10^{-3}$	3309	3516	3581

Анализируя данные таблиц, можно заключить, что в случае использования итерационного алгоритма типа переменных направлений вида (5)–(9) фактически достигается равномерная сходимость, т.е. скорость сходимости не зависит от количества узлов расчетной сетки. При тестировании задачи с движущейся крышкой и задачи о каверне количество итераций (см. таблицы 1, 3) с увеличением размера сетки и при уменьшении шага по времени остается равномерным.

На рисунке 1 показаны картинка течения в виде линий тока задачи течения жидкости в квадратной области (в каверне).

Таким образом, по результатам вычислительных экспериментов можно заключить, что во всех вариантах расчетов стационарный режим течения был достигнут. Полученные картинки течения полностью совпадают с описаниями, приводимыми в известных работах [5–7], что подтверждает эффективность использования алгоритма (11), (12) для решения уравнений с несамосопряженным оператором.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 590 с.
- 2 Альшина Е. А., Болтнев А. А., Качер О. А. Градиентные методы с ускоренной сходимостью // ЖВМ и МФ. – 2005. – Т.45, №3. – С. 374–382.
- 3 Danaev N.T., Daribaev B.S. An iterative algorithm for numerical solution of heat convection equations // The V Congress of Turkic World Mathematicians. – Bulan-Sogottu, 2014. – 172 p.
- 4 Данаев Н.Т., Аменова Ф.С. Исследование сходимости итерационных алгоритмов численного решения задач тепловой конвекции в переменных «функция тока, вихрь скорости» // СибЖИМ. – 2014. – Т.17, №3(59). – С.48–58.
- 5 Данаев Н.Т., Смагулов Ш. Об одной методике численного решения уравнений Навье–Стокса в переменных (Ψ, Ω) // Моделирование в механике. – Новосибирск, 1991. – Т.5 (22), №4. – С.38–47.
- 6 Вабищевич П.Н. Реализация краевых условий при решении уравнений Навье–Стокса в переменных «функция тока–вихрь скорости» // Доклады АН СССР. – 1983. – Т.273, №1. – С.22–26.
- 7 Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. – Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1990. – 228 с.
- 8 Коновалов А.Н. К теории попеременно-треугольного итерационного метода // Сибирский математический журнал. – 2002. – Т.43, № 3. – С.552–572.
- 9 Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором // Математическое моделирование. – 2012. – Т.24, №1. – С.3–20.

СОДЕРЖАНИЕ

КЛЮЧЕВЫЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ НАУКИ И ИНЖЕНЕРНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

EXPO-2017 – «Энергия будущего»	4
--------------------------------------	---

В БУДУЩЕЕ – С НОВЫМИ ТЕХНОЛОГИЯМИ

Совещание по подготовке к проведению Всемирного конгресса инженеров и ученых «Энергия будущего: инновационные сценарии и методы их реализации» в рамках Всемирной выставки «ЭКСПО-2017». Алматы, 23 января 2015 года	7
--	---

Жумагулов Б. Т. Выступление на совещании по обсуждению проекта Концепции Всемирного конгресса инженеров и ученых «Энергия будущего: инновационные сценарии и методы их реализации»	7
--	---

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Самигулина Г.А., Шаяхметова А.С. Проектирование интеллектуальных информационных систем дистанционного обучения для людей с ограниченными возможностями зрения	56
---	----

Данаев Н. Т., Дарибаев Б.С., Аменова Ф. С. О решении несамосопряженных вспомогательных разностных уравнений для тепловой конвекции в переменных «функция тока, вихрь скорости»	61
--	----

Нысанов Е. А., Аширбаев Н. К., Куракбаева С. Д. Моделирование и решение двумерной задачи нестационарного течения двухфазного потока в открытых каналах с учетом фильтрации воды и осаждения твердых частиц	67
--	----

НОВОСТИ НАУКИ И ТЕХНИКИ	73
-------------------------------	----

МЕХАНИКА И МАШИНОСТРОЕНИЕ

Орынбет М. М., Оспанбеков К. Б. Математическая модель напряженно-деформированного состояния ленточного подшипника конечной и бесконечной ширины	79
---	----

Королев А. В., Тюрин А. Н., Королев А. А. Математическая модель формирования сферической поверхности торцов роликов при ультразвуковом алмазном выравнивании	88
--	----

НЕФТЕХИМИЯ

Оразбаев Б. Б., Шагаева А. Б., Казиева А. Б. Задачи принятия решений при управлении процессом плавки чугуна	94
---	----