Классификация дифференциальных уравнений

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) и дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП).

Одномерное ур-е погр. слоя:

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} + \xi \frac{\rho u^2}{2d}, \quad u(x),\ p(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Двумерное ур-е погр. слоя:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \upsilon \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(x,y),\ p(x,y) \qquad \textbf{(2)}$$

Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2}, \quad \upsilon(x,t) \qquad \textbf{(3)}$$

Классификация ДУ

2. Порядок ДУ

ДУ II порядка в общем случае:

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D\frac{\partial f}{\partial x} + E\frac{\partial f}{\partial y} + Ff = G \qquad \textbf{(4)}$$

A, B, C, D, E, F, G – константы или известные функции x, y

3. Тип ДУ II порядка:

$$B^2\text{-}4AC \begin{cases} <0 \text{ – ДУ (4) } \textbf{\textit{эллиптического}} \text{ типа;} \\ =0 \text{ – ДУ (4) } \textbf{\textit{параболического}} \text{ типа;} \\ >0 \text{ – ДУ (4) } \textbf{\textit{гиперболического}} \text{ типа.} \end{cases}$$

Классификация ДУ

Примеры ДУ II порядка:

Уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -q(x, y)$$

$A=1, B=0, C=1,$

$B^2-4AC = -4<0$ **(5)**

Уравнение Трикоми:

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin x$$

$A=x, B=0, C=1,$

$B^2-4AC = -4x$ **(6)**

(3) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = 0$$

$A=1, B=0, C= -1/c^2,$ **(7)**

$B^2-4AC = 4/c^2>0$

(2)=?

Тип ДУ II порядка определяется только коэффициентами при вторых производных

Классификация ДУ

4. Линейность:

зависимая переменная и все ее производные входят в ДУ линейным образом:

- **не умножаются друг на друга**
- **не возводятся в степень**
- **не являются аргументами трансцендентных функций (sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, lg, ln, exp)**

Линейные уравнения: (3),(4),(5),(6)

Нелинейные уравнения: (1),(2)

Большинство ДУ, описывающих физические процессы, нелинейные

Классификация ДУ

5. Однородность : **дифференциальное уравнение называется *однородным*, если оно не имеет членов, содержащих неизвестную**

Уравнение (4) однородное при *G=0* и неоднородное при *G≠0*

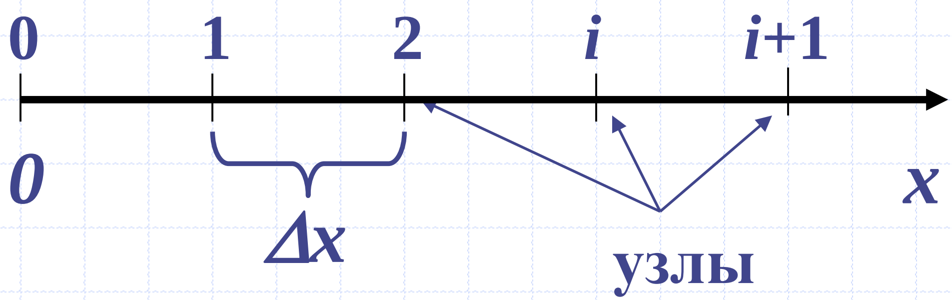
Однородные уравнения: (3)

Неоднородные уравнения: (1),(2),(5),(6)

В неоднородных уравнениях выражение, не содержащее неизвестную, как правило, имеет смысл источникового члена.

Основные понятия и обозначения теории разностных схем

f(x) – точное решение ДУ, *f* – функция непрерывного аргумента



Расстояния между узлами – шаги: Δx

совокупность узлов составляет сетку

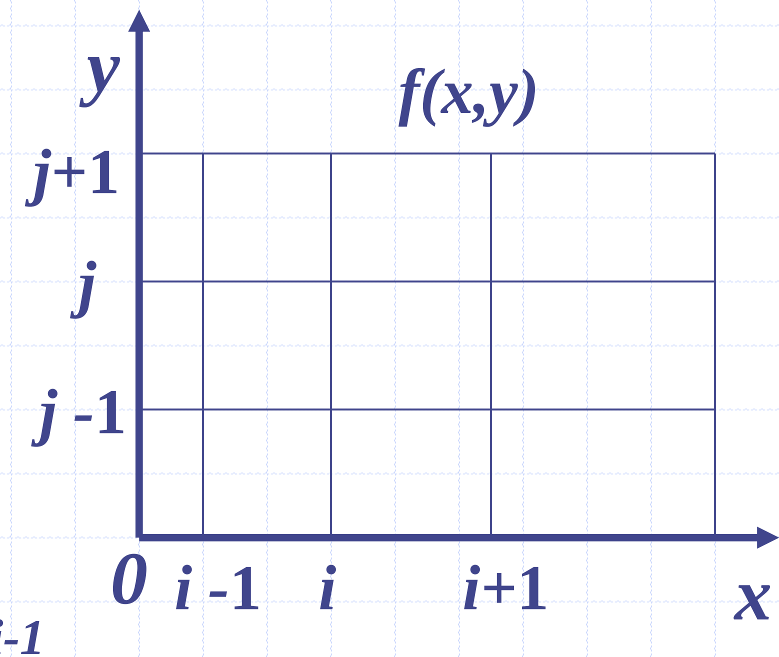
Δx =const

равномерная

Δx ≠const

неравномерная

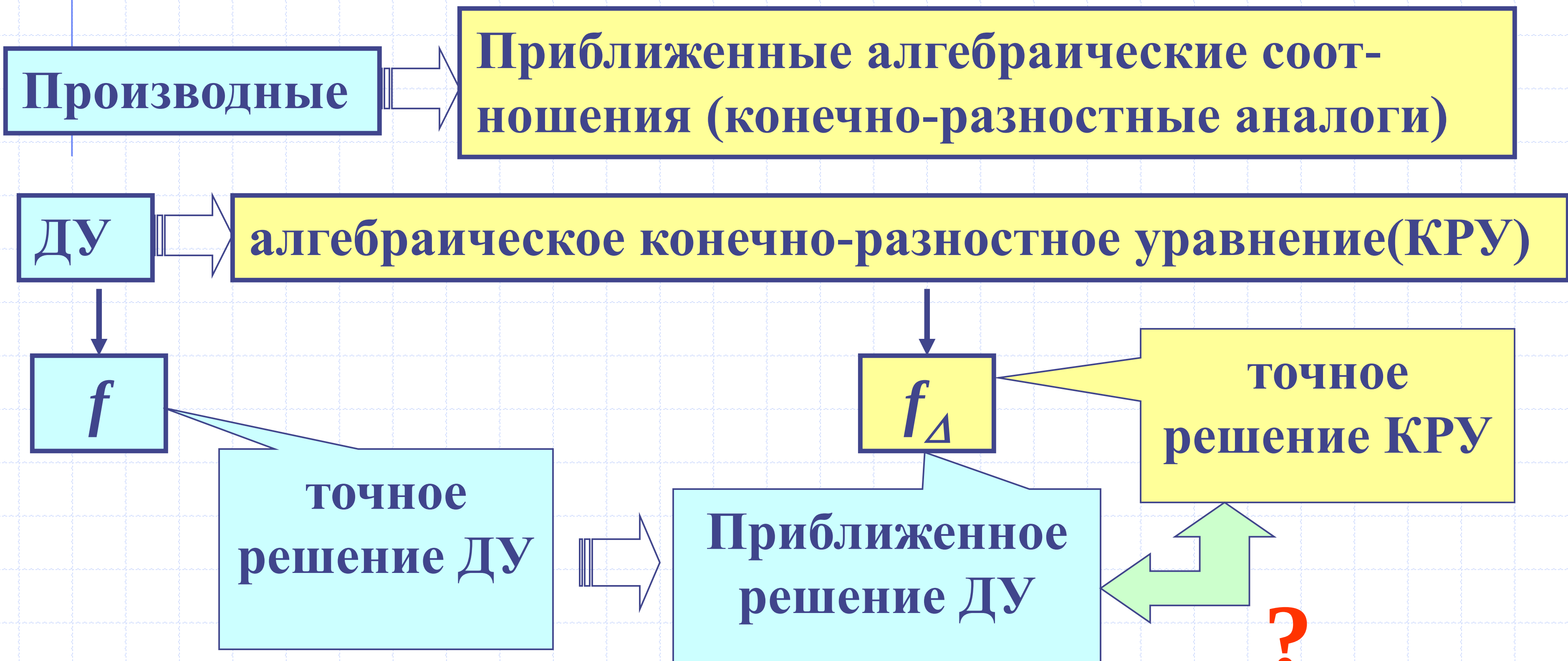
$\Delta y = y_{j+1} - y_j = y_j - y_{j-1}$, $\Delta x = x_{i+1} - x_i \neq x_i - x_{i-1}$



Основные понятия и обозначения теории разностных схем

Функция, определенная на множестве узлов конечно-разностной сетки, называется *сеточной функцией* f_Δ

В одномерном случае $f_\Delta = f(x_i)$, в двумерном случае $f_\Delta = f(x_i, y_j)$



Основные понятия и обозначения теории разностных схем

Конечно разностная схема (КРС) – это система дискретных алгебраических уравнений, аппроксимирующих дифференциальное уравнение с соответствующими граничными условиями.

Совокупность узлов сетки, используемых при построении КРС, называется **шаблоном**.

Уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

f(t, x)

Вопросы:

1. Какое ДУ является линейным?
2. Какое ДУ является однородным?
3. Как определяется порядок ДУ?
4. Какие типы ДУ II порядка Вы знаете?
5. Чем отличается равномерная сетка от неравномерной?
6. Что такое «сеточная функция»?
7. Что такое «конечно-разностная схема»?
8. Что такое «шаблон»?

Провести классификацию следующих уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-kt}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}=4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

Самостоятельно:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \upsilon}{\partial y} = 0$$

- уравнение неразрывности

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \upsilon \frac{\partial u}{\partial y} = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- уравнение движения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- невязкое уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

- уравнение Кортевега де Вриза

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 u = 0$$

- уравнение Гельмгольца