

ЗАМБАРНАЯ ТАТЬЯНА СЕРГЕЕВНАНЫҢ

6D060100 – «Математика» мамандығы бойынша
философия докторы (PhD) дәрежесін алуға

КІШІ ТӘУЕЛДІ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ САНАЛЫМДЫ МОДЕЛЬДЕРІ

тақырыбындағы диссертациясына

АҢДАТПА

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Қазіргі уақытта модельдер теориясының негізгі міндеттеріне спектр мәселесін шешуді, яғни қуаттылығы λ болып табылатын T теориясының изоморфты емес модельдерінің санын сипаттайтын $I(T, \lambda)$ функцияның әр түрлі класстары үшін сипаттауды жатқызуға болады. T саналымды теориясы үшін саналымды изоморфты емес модельдердің $I(T, \omega)$ санын сипаттау жеткілікті дәрежеде зерттелмеген мәселердің бірі болып табылады.

Бұл мәселемен Воот гипотезасы байланысты, оған сәйкес саналымды модельдердің саны натурал сандардың қуаттылығынан жоғары және нақты сандардың қуаттылығынан кем болатын, яғни T теориясы $\omega < I(T, \omega) < 2^\omega$ болатын теория жоқ.

М. Морли егер саналымды модельдердің саны шексіз болса, онда ол не ω , 2^ω -ға, не болмаса ω мен үздіксіздік (2^ω) арасындағы қуаттылыққа тең екенін, яғни $I(T, \omega) \in \omega \cup \{\omega, \omega_1, 2^\omega\}$ болатынын дәлелдеді. Р. Воот саналымды теорияның саналымды модельдерінің саны екіге тең бола алмайтынын дәлелдеді.

Егер теорияның бос жиындарының үстіндегі n -типтердің барлық саналымды саны кез келген ақырғы n арналған саналымнан аспайтын болса, онда бұл теория кіші теория деп аталады. Теория кіші болмаған жағдайда оның саналымды модельдерінің саны максималды, яғни 2^ω -ға тең болады.

Дж. Балдвин мен А. Лахлан сансыз категориялық теориялардың классына арналған Воот гипотезасын растады. Омега-тұрақты теориялар классы үшін бұл гипотезаны МакКай, Харрингтон және Шелах дәлелдеді. Л. Майер Д. Маркердің реттелген минималды теориялардың 1-типтерінің ортогональдық теориясын қолдана отырып, реттелген минималды теориялардың классына арналған Воот гипотезасын дәлелдеді. О-минималды дерлік теориялардың классы үшін Воот гипотезасын С.В. Судоплатов пен Б.Ш. Кулпешов дәлелдеді.

Воот гипотезасы толық теориялардың жеке класстары үшін расталғанына қарамастан, жалпы жағдайда саналымды изоморфты емес модельдердің санын есептеу мәселесі әлі де шешілмеген. Бұл гипотеза әлі де дәлелденбеген класстардың бірі тәуелді теориялар классы болып табылады. Дәл осы класс берілген диссертацияда қарастырылып отыр.

Толық саналымды теория максимал, яғни 2^ω болатын класстарды сипаттау берілген теориялардың саналымды спектрін зерттеуде маңызды мәселе болып табылады. Мысалы, бастапқыда Л. Майер о-минималды теориялардың саналымды модельдерінің саны максимал болуы үшін жеткілікті шарттарды анықтады, тек кейін ғана о-минималды теориялар үшін Воот гипотезасын дәлелдеуді бастады.

Келесі мысал ретінде, С. Судоплатов пен Б. Кулпешовтың алдымен саналымды спектр үшін максималдық шарттарын анықтап, кейін о-минималды дерлік теориялар үшін Воот гипотезасын дәлелдеуге арналған жұмысын “Vaught’s conjecture for quite o-minimal theories” келтіруге болады.

Осыған байланысты жұмыстың басым бөлігі саналымды изоморфты емес модельдерінің саны максималды болатын теория шарттарын анықтауға арналған.

Саналымды модельдердің саны туралы сұрақ көптеген ғалымдардың жұмысында қарастырылған. Көптеген авторлар С. Шелах, А. Пиллай және М. Бенданың жұмыстарына сілтемелер жасайды. Бұл бағыттағы жұмыстардың бірі – бұл С.В. Судоплатов пен Р.А. Попковтың континуум типтері (демек, саналымды модельдердің максималды саны) бар теорияларды әр түрлі белгілерге байланысты жіктеуге арналған “Distributions of countable models of theories with continuum many types” атты мақаласы. Е. Казанова “The number of countable models” атты жұмысында жартылай-оқшауланғандық, Рудин-Кейслер реттілігі, тегіс және тұйықталу класстары, алдын-өлшемділік, өлшемділік және тұрақтылық сынды әртүрлі тұрғыда саналымды модельдердің санын қарастырады. Б.С. Байжанов пен Б. Омаров модельдің ақырғы диаграммасы тұрғысынан саналымды изоморфты емес модельдердің санын қарастырған. Қазіргі таңда Воот гипотезасына шешім жоқ, алайда модельдер теориясының мамандары, олардың ішінде С.В. Судоплатов Б.С. Байжанов және В.В. Вербовскиймен бірлесіп, жұмыстарын жалғастыруда.

\emptyset -анықталатын сызықтық рет қатынасы бар саналымды модельдердің саны Л. Майер, М. Рубин, С. Шелах, Б.С. Байжанов, С.В. Судоплатов, Б.Ш. Кулпешов және басқа мамандардың жұмыстарында қарастырылған. Сызықтық және ішінара реті бар теориялардың саналымды модельдерінің саны туралы мәселе осы жұмыста үлкен орын алады, себебі ол тәуелді тұрақты емес теориялардың классын зерттеуде маңызды.

Жұмыстың мақсаттары.

Жұмыс саналымды типтері бар теориялардың саналымды спектрін зерттеуге арналады. Жұмыстың мақсаттары келесілерден тұрады:

1. Саналымды модельдер санының максималдылық шарттарын табу.
2. Воот гипотезасы шешілетін тәуелді теориялардың классын табу.

Қорғауға шығарылатын жағдайлар:

1. Егер сызықтық реттің (байыту) теориясында бұл теорияның қандай да бір моделінің шекті ішкі жиыны болса және осы ішкі жиыннан аса тривиалды 1-тип бар болса, онда бұл теорияда 2^ω саналымды изоморфты емес модельдер бар.

2. Егер кез келген натурал сан үшін ұзындығы осы натурал санға тең дискретті қатар бар болатындай етіп, кортеждерде ішінара тәртіпті анықтайтын формула бар болса, онда берілген саналымды толық теорияда саналымды изоморфты емес модельдердің максималды саны бар.

3. Егер саналымды толық сызықтық реттің (байыту) теориясында қайсыбір басты емес 1-типте квази-тергеуші формула бар болса, онда берілген теорияда 2^{ω} саналымды изоморфты емес модельдер бар.

4. Дөңестік рангі 1 болатын әлсіз о-минималды теориялардың классы Воот гипотезасын қанағаттандырады.

Зерттеу объектісі – кіші тәуелді теориялар.

Зерттеу субъектісі – кіші тәуелді теориялардың саналымды модельдері және олардың изоморфизмге дейінгі дәлдіктегі саны.

Зерттеу әдістеріне типтердің қасиеттерін зерттеу арқылы теорияларды талдау кіреді. Типтің жүзеге асуындағы аймақтар, яғни берілген типтің жүзеге асуының ішінде формулалардың қалай жұмыс істейтіндігі, сонымен қатар бірнеше типтердің арасындағы ортогональдік қатынасы қарастырылады; типтердің арасындағы әлсіз ортогональдік және дерлік ортогональдік модельдерде берілген типтердің жүзеге асуы қандай жолмен байланысатынын түсінуге жол ашады. Мысалы, модельде бір типтің жүзеге асуы бір немесе бірнеше басқа типтердің дәл осы модельде жүзеге асуына әкелуі мүмкін, немесе бірнеше типтердің жүзеге асуы бұл типтердің барлық мүмкін болатын жүзеге асу-түсіру құрамдастыруларына жағдай жасай отырып, бір-біріне тәуелді болмауы мүмкін. Сонымен қатар, модельдерді құрастыруда Тарский-Воот белгісіне негізделген әдіс қолданылады. Тарский-Воот белгісі модельдің таңдалған ішкі жиынының қарастырылып отырған теорияның моделі болатынына (осы модельдің элементар ішкі моделі болатынына) кепілдік етеді.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Қазіргі уақытта кіші тәуелді теориялардың саналымды спектрін сипаттайтын проблемасы ашық. Зерттеуге бағамдаған теориялардың топтары модельдер санына зерттелген жоқ.

Зерттеудің теоретикалық және тәжірибелік маңыздылығы: Осы саладағы жүргізілген зерттеулер, Воот Гипотезасының шешіміне қадамдар болып табылады. Кіші тәуелді теориялардың саналымды модельдерінің табиғаты туралы нәтижелер топтар, сақиналар мен жазық теорияларында қолданылуы мүмкін.

Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы. Аталған диссертациялық жұмыс Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің жаратылыстану ғылымдары саласындағы іргелі зерттеулерді гранттық қаржыландыру бағдарламасының “Тәуелді теориялардағы типтердің қасиеттері” (2015-2017 жж., 5125/GF4) және “Консервативті кеңейтулер, есептегі ретке келтірілген модельдер мен тұйықталу операторлары” (2018-2020 жж., AP05134992) ғылыми жобалары аясында орындалды.

Жұмыстың апробациясы. Жұмыс нәтижелері келесі конференциялар мен семинарларда ұсынылды және талқыланды:

Logic Colloquium 2015, Хельсинки Университеті, Финляндия, 2015;

“Функциялар теориясы, информатика, дифференциалдық теңдеулер және олардың қосымшалары”, Алматы, 2015;

“Алгебра, анализ, дифференциалдық теңдеулер және олардың қосымшалары”, Алматы, 2016;

Logic Colloquium 2016, Лидс, Ұлыбритания, 2016;

Ғылым күніне арналған жыл сайынғы ғылыми сәуір конференциясы, Алматы, 2017;

Халықаралық жазғы мектеп-конференция “Модельдер теориясы мен әмбебап алгебра шекаралық мәселелері”, Эрлагол-2017, Новосибирск, Ресей, 2017;

“Таза және қолданбалы математиканың өзекті мәселелері”, Алматы, 2017;

Математика және математикалық модельдеу институтының алгебра және математикалық логика бөлімінің ғылыми семинарлары;

Сонымен қатар, диссертацияның нәтижелері Чикагода Иллинойс университетінде ғылыми тағылымдамадан өту барысында модельдер теориясы бойынша мамандармен талқыланды және 2017 жылдың қараша айында Louise Hay Logic Seminar семинарында ұсынылды.

Диссертацияның ғылыми ережелерінің, тұжырымдары мен нәтижелерінің шынайылығы мен негізділігі нөлдік емес импакт-факторы бар журналдарда алынған нәтижелердің жарияланымдарымен расталады.

Зерттеу мақсаттарының толық орындалуын бағалау. Барлық алынған нәтижелер жаңа болып табылады және дербес шешім әдістеріне негізделеді. Саналымды модельдерінің максималды санының шарттары алынды, сондай-ақ Воот гипотезасын қанағаттандыратын тәуелді теориялардың ішкі сыныбы анықталды. Осылайша, қойылған мақсаттарға қол жеткізілді.

Алынған нәтижелерді қолдану бойынша ұсыныстар. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері кіші теориялардың саналымды модельдерін зерттеуде және Воот гипотезасының шешімін іздеуде қолданылуы мүмкін. Мысалы, саналымды модельдер санының максималдылығының алынған шарттары саналымды модельдердің ω_1 бар теориясы осы шарттарды қанағаттандырмауы тиіс. Саналымды модельдер туралы нәтижелер алгебралық құрылымдар теорияларына қолданылуы мүмкін.

Зерттеу бағытындағы жетістіктермен салыстырғанда жұмыстың ғылыми деңгейін бағалау. Алынған нәтижелер шетелдік әріптестердің жетістіктерімен салыстырғанда ұтылмайды және кіші теориялардың саналымды спектрін зерттеуге үлес қосады.

Жарияланымдар. Диссертация нәтижелері негізінде 15 жұмыс жарияланды: 5 Журнал мақаласы (оның ішінде 2 – индекстелетін бар журналдарда, 3 – Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің Білім және ғылым саласындағы бақылау комитеті ұсынған журналдарда) және 10-Халықаралық ғылыми конференция жинақтарында.

Диссертацияның көлемі мен құрылымы. Жұмыс титулдық парақты, мазмұнын, нормативтік сілтемелерді, анықтамаларды, белгілеулер мен

қысқартуларды, 8 тарауды, тұжырымдар мен сілтемелерді қамтиды. Диссертацияның жалпы көлемі 79 беттен, жұмыс 1 суретті және 79 әдебиеттен тұрады.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Кіріспе зерттеу тақырыбының өзектілігін негіздеу, жұмыстың мақсаты, диссертацияны қорғауға шығарылатын негізгі ережелер, зерттеу объектісі мен субъектісі, зерттеу әдістері, диссертациялық жұмыстың жаңалығы мен практикалық маңыздылығы, жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы, жұмыстың апробациясы, автордың жарияланымдары мен көлемі, диссертацияның құрылымы мен мазмұны кіреді.

Бірінші бөлім модельдер теориясының зерттелетін аймағының ағымдағы жағдайын түсіндіреді.

Екінші бөлім алдын ала ақпарат береді және Тарский Воот белгісі, типтерді түсіру және жинақылық сияқты диссертация барысында пайдаланылатын негізгі құралдарды түсіндіреді.

Үшінші бөлім мұраларды қарастырады (басқа сөзбен айтқанда, ақырлы диаграммалар), яғни осы модельде іске асырылатын барлық түрлердің жиындары, және, осы болжаммен, Воот гипотезасының контр-мысалы жағдайын қарастырады, атап айтқанда, егер ω_1 санақ саналымды модельдері бар теориясы бар болса, онда есептеу саналымды модельдері ω_1 бар ақырлы диаграмма бар.

Төртінші бөлімде типтер арасындағы әлсіз және дерлік ортогональ ұғымдары енгізіледі, типтердің кейбір пайдалы қасиеттері дәлелденеді, сондай-ақ, типтердің ортогоналығын саналымды модельдер санымен байланыстыратын бірнеше теоремалар дәлелденеді.

Бесінші бөлім сызықтық реттің кіші теориясы саналымды модельдердің ең көп санына ие болатын шарттарды іздеуге бағытталған. Типтердің тривиальдылығының әр түрлі ұғымдары енгізіледі, атап айтқанда, өте тривиальді түрдегі ұғымдар, өте тривиальді типті және өте тривиальді түрдегі ұғым. Бөлімде типтердің тривиальдығы мен тип-сақтаушы формулалар арасындағы байланыс дәлелденеді. Сондай-ақ, сызықтық реттің теориясы (байыту), ол өте тривиальді типке ие, саналымды модельдердің ең көп саны бар екенін дәлелдейді.

Алтыншы бөлімде элементтердің кортежінде жартылай тәртіпті анықтайтын есептеу теориялары зерттеледі. Сондай-ақ, осындай теориялар үшін саналымды модельдер санының максималдылығының жеткілікті шарты туралы теорема дәлелденеді. Бұл шарт ұзындығы үлкен немесе тең, кез келген табиғи санның φ -тізбегі бар болуы.

Жетінші бөлімде сызықтық ретті анықтайтын теориялар қарастырылады және квази-тергеушінің формуласы деп аталатын ұғым енгізіледі. Бұл формула тип ішінде анықталатын шеңберлерді құруға мүмкіндік береді. Алдыңғы бөлімде енгізілген тәсілдің көмегімен сызықтық реттің (байыту) теориясы, басты емес типінде квази-тергеушінің формуласына ие, саналымды модельдердің ең көп саны бар екені дәлелденеді.

8-бөлімде тәуелді теориялардың ішкі сыныбы қарастырылады, атап айтқанда, дөңес 1 рангінің әлсіз о-минималдық теорияларының класы. Мұндай теориялардың бинарлығы дәлелденеді және осының көмегімен мұндай теориялар Воот гипотезасын қанағаттандырады. Атап айтқанда, әлсіз о-минималдық дөңес 1 рангінің дәрежесінің ең аз теориясы немесе саналымды категорикалық, немесе эренфойхталық болып табылады, яғни, дәл k саналымды изоморфты емес модельдері бар, мұнда $3 \leq k < \omega$; ω саналымды модельдері бар, немесе 2^ω , саналымды модельдердің ең көп саны бар.

Негізгі нәтижені түсіндіру үшін, сондай-ақ дөңес 1 рангінің әлсіз о-минималды теорияларының әртүрлі мысалдары келтіріледі және осы теориялар үшін саналымды модельдердің есебі жүргізіледі.

Жұмыстың қорытынды бөлімінде диссертацияны орындау кезеңінде негізгі нәтижелер келтіріледі және қорытылады.