# Various types of straight equations

# Example

- Given four points $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ and $A_4(x_4, y_4, z_4)$. Write equations:

a) Plane (плоскости) $A_1\ A_2\ A_3$

b) straight line (прямой) $A_1\ A_2$

c) straight line $A_4\ M$, perpendicular to the plane $A_1\ A_2\ A_3$

d) straight line $A_4 N$, parallel line to $A_1\ A_2$

e) plane passing through a point $A_4$ perpendicular to the line $A_1\ A_2$

f) Calculate the sinus of the angle between the line $A_1\ A_4$ and a plane $A_1\ A_2\ A_3$

g) Calculate the cosine of the angle between the coordinate plane Oxy and a plane $A_1\ A_2\ A_3$

**1.1.** $A_1(3, 1, 4)$, $A_2(-1, 6, 1)$, $A_3(-1, 1, 6)$, $A_4(0, 4, -1)$.

# Solution a

- Use the following formula for task a

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

a) $A_1(3,1,4), A_2(-1,6,1), A_3(-1,1,6)$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-4 \\ -1-3 & 6-1 & 1-4 \\ -1-3 & 1-1 & 6-5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-4 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (x-3)(5)-(y-1)(-4+12)+(z-4)(+20)=5x-15-8y+8+20z-80 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x-8y+20z-87=0$

# Solution b

- Use formula $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$
- $A_1(3,1,4),\ A_2(-1,6,1)$
-
- $\frac{x-3}{6-3}=\frac{y-1}{6-1}=\frac{z-4}{1-4}\Rightarrow\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-4}{-3}$

# Solution c

- Use formula $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.
- $A_4\ M$
- $A_4(0,4,-1)$
- $\frac{x}{5}=\frac{y-4}{-8}=\frac{z+1}{20}$

# Solution d

- $A_4N$
- $A_4(0,4,-1)$
- $A_1(3,1,4),\ A_2(-1,6,1)$
- $\frac{x-x_4}{x_1-x_2}=\frac{y-y_4}{y_1-y_2}=\frac{z-z_4}{z_1-z_2}\Rightarrow\frac{x}{3+1}=\frac{y-4}{1-6}=\frac{z+1}{4-1}\Rightarrow\frac{x}{4}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+1}{3}$

# Solution e

- $A_4(0,4,-1)$
- $A_1(3,1,4),\ A_2(-1,6,1)$
- N(-4,5,-3)

- $-4x+5(y-4)-3(z+1)=0$
- $-4x+5y-3z-23=0$

# Solution f

- Use formula $|\cos(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{s}})| = \sin\varphi = \dfrac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$.
- $A_4(0,4,-1)$
- $A_1(3,1,4)$, $A_2(-1,6,1)$, $A_3(-1,1,6)$
- $A_1\ A_4\ s = (-3,3,-5)$
- $sin\varphi = \dfrac{|5(-3)+(-8)3+20(-5)|}{\sqrt{5^2+(-8)^2+20^2}\sqrt{(-3)^2+3^2+(-5)^2}} = \dfrac{|-15-24-100|}{\sqrt{25+64+400}\sqrt{9+9+25}} =$
  $\dfrac{139}{\sqrt{489}\sqrt{43}} \approx 0,96$

# Solution g

- Use formula $$\cos\varphi = \cos(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

- $cos\varphi = \frac{0*5+0*(-8)+1*20}{\sqrt{1}\sqrt{5^2+(-8)^2+20^2}} = \frac{20}{\sqrt{489}} \approx 0{,}9$

# Example

**1.** Даны вершины треугольника $ABC$: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти:

а) уравнение стороны $AB$;

б) уравнение высоты $CH$;

в) уравнение медианы $AM$;

г) точку $N$ пересечения медианы $AM$ и высоты $CH$;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину $C$ параллельно стороне $AB$;

е) расстояние от точки $C$ до прямой $AB$.

**1.1.** $A(-2, 4)$, $B(3, 1)$, $C(10, 7)$.

# Solution a

**1.1.** $A(-2,4),\ B(3,1),\ C(10,7).$

- Use formula $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

- $\frac{x+2}{3+2}=\frac{y-4}{1-4}\Rightarrow\frac{x+2}{5}=\frac{y-4}{-3}\Rightarrow-3(x+2)=5(y-4)\Rightarrow-3x-5y+14=0$

# Solution b

**1.1.** $A(-2,4)$, $B(3,1)$, $C(10,7)$.

- According to formula $y = kx + b \quad (k = \operatorname{tg}\alpha)$.
- $\begin{cases} 4 = -2k + b \\ 1 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow 3 = -5k \Rightarrow k = -3/5$

2. Если прямые заданы уравнениями вида (3.20) $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$, то угол $\varphi$ между ними (с точностью до смежного) находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{3.28}$$

Для того чтобы прямые были параллельны, необходимо, чтобы выполнялось равенство $k_1 = k_2$, а для их перпендикулярности необходимо и достаточно, чтобы $k_1k_2 = -1$.

- $k_2 = 5/3$

# Solution b

**1.1.** $A(-2,4),\ B(3,1),\ C(10,7).$

- Use formula $y - y_0 = k(x - x_0);$
- $y - 7 = \frac{5}{3} * (x - 10)\ OR\ -\frac{5}{3}x + y + \frac{29}{3} = 0$

# Solution c

**1.1.** $A(-2, 4)$, $B(3, 1)$, $C(10, 7)$.

- Use formula for mean of BC

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

$$x = \frac{3+10}{2} = 6.5 \; and \; y = \frac{1+7}{2} = 4$$

Now, using two known points A and M, we compose the equation median AM

$$\frac{x+2}{6.5+2} = \frac{y-4}{4-4} \; OR \; 8.5y - 36 = 0$$

# Solution d

**1.1.** $A(-2,4)$, $B(3,1)$, $C(10,7)$.

- $\begin{cases} -\frac{5}{3}x + y + \frac{29}{3} = 0 \\ 8.5y - 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} -5/3 & 1 \\ 0 & 8.5 \end{vmatrix} \Rightarrow -14.16$

- $\begin{vmatrix} 29/3 & 1 \\ -36 & 8.5 \end{vmatrix} \Rightarrow 82{,}16 + 36 = \frac{118{,}16}{-14.16} \Rightarrow -8{,}34$

- $\begin{vmatrix} -5/3 & 29/3 \\ 0 & -36 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{60}{-14.16} = -4{,}23$

# Solution e

**1.1.** $A(-2, 4)$, $B(3, 1)$, $C(10, 7)$.

- If it goes by C point, then it is parallel to AB which is equal to $k = -3/5$. Then use formula $y - y_0 = k(x - x_0)$;

- $y - 7 = -\frac{3}{5} * (x - 10)$ $OR$ $\frac{3}{5}x + y - 13 = 0$

# Solution f

**1.1.** $A(-2,4)$, $B(3,1)$, $C(10,7)$.

- Use formula $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

- $\Rightarrow -3x - 5y + 14 = 0$
- $d = |CH| = \dfrac{|-3*10-5*7+14|}{\sqrt{(-3)^2+(-5)^2}} = \dfrac{51}{\sqrt{34}} \approx 8{,}74$