ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2014, № 1, с. 87–94

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977.55

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ЗНАЧЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ*

© 2014 г. Ш. А. Айпанов, З. Н. Мурзабеков

Казахстан, Алма-Ата, НИИ математики и механики КазНУ

Поступила в редакцию 08.08.12 г., после доработки 10.07.13 г.

Рассматривается задача оптимального управления нестационарными линейными системами с закрепленными концами траекторий и квадратичным функционалом. Предлагается метод построения синтезирующего управления с учетом ограничений на значения управления. Задача решена с использованием множителей Лагранжа специального вида.

DOI: 10.7868/S0002338813060024

Введение. В работах в области моделирования и автоматического управления можно найти различные примеры математической постановки и методы решения задач оптимального управления (ЗОУ) [1–4]. В простейших моделях систем автоматического управления рассматриваются так называемые линейно-квадратичные задачи (ЛК-задачи) с линейным объектом управления и с квадратичным функционалом. Впервые аналитическое решение ЛК-задачи без ограничений на управление и со свободными правыми концами траекторий было получено в работах А.М. Летова и Р.Е. Калмана [5, 6].

Многие ЗОУ рассматриваются в двух постановках. Согласно одной из них оптимальное управление ищется как функция времени и начального состояния системы (программное управление). Другая постановка задачи предполагает синтез оптимального управления с обратной связью, т.е. выбор входного сигнала в виде некоторой функции от текущего состояния управляемой системы и времени. В основе решения ЗОУ в первой постановке лежит принцип максимума Понтрягина [7] (решение сводится к соответствующей двухточечной краевой задаче), а решение задачи во второй постановке основано на методе динамического программирования (задача сводится к решению уравнения Беллмана [8]). Разработка различных способов построения алгоритмов управления, обладающих необходимыми для приложений свойствами, является актуальной задачей современных информационных технологий [9].

В данной работе рассматривается ЛК-задача с ограничениями на управление и закрепленными концами траекторий, когда требуется перевести систему из заданного начального состояния в желаемое конечное состояние за фиксированный интервал времени. Предлагается конструктивный алгоритм управления, основанный на принципе обратной связи с учетом ограничений на управление. ЗОУ для систем с закрепленными концами траекторий возникает, например, при исследовании динамики робототехнических и электроэнергетических систем, химических и ядерных реакторов, космических аппаратов [10, 11].

Данная статья является дальнейшим расширением результатов, полученных в [12, 13], на случай ЛК-задачи с ограничениями на управление.

1. Постановка задачи. Рассматривается система управления, описываемая дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \le t \le T, \tag{1.1}$$

с заданными начальным состоянием

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК (грант № 0704/ГФ2).

и конечным состоянием

$$x(T) = 0, \tag{1.3}$$

с ограничениями на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u | \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t)\}, \quad t_0 \le t \le T. \tag{1.4}$$

Здесь $x(t)$ — n-вектор состояния объекта; $u(t)$ — m-вектор кусочно-непрерывных управляющих воздействий; $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times m)$ соответственно (элементы этих матриц являются непрерывными функциями); $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — m-векторы, компоненты которых представляют собой кусочно-непрерывные функции. Динамика системы рассматривается в интервале времени $[t_0, T]$, где t_0 и T — заранее заданные начальный и конечный моменты времени. Предполагается, что система (1.1) вполне управляема в момент времени t_0.

Целевой функционал имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]\,dt, \tag{1.5}$$

где $Q(t)$ — положительно-полуопределенная $(n \times n)$-матрица, $R(t)$ — положительно-определенная $(m \times m)$-матрица. Здесь и далее штрих (') означает операцию транспонирования.

Ставится задача: найти синтезирующее управление $u = u(x,t)$, которое удовлетворяет ограничению (1.4) и переводит систему (1.1) из заданного начального состояния (1.2) в конечное состояние (1.3) (в начало координат) за фиксированный интервал времени $[t_0, T]$, минимизируя при этом функционал (1.5).

Задача (1.1)–(1.4) (без требования минимизации целевого функционала (1.5)) называется задачей управляемости. Такая задача не всегда имеет решение, поскольку из-за ограниченности управления мы можем, например, не успеть перевести систему из одного состояния в другое за заданное время. В дальнейшем предполагаем, что задача управляемости (1.1)–(1.4) разрешима, т.е. множество допустимых управлений не пусто. Это является необходимым условием разрешимости рассматриваемой ЗОУ (1.1)–(1.5).

Отметим, что в более общей постановке ЛК-задачи с закрепленными концами траекторий в отличие от (1.1)–(1.5) может рассматриваться объект управления, динамика которого описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad t_0 \le t \le T$$

с конечным условием $x(T) = x_T$, не обязательно совпадающим с началом координат, и с квадратичным целевым функционалом

$$J(u) = \int_{t_0}^{T}\left[\frac{1}{2}x'(t)Q(t)x(t) + x'(t)P(t)u(t) + \frac{1}{2}u'(t)R(t)u(t) + x'(t)p(t) + u'(t)r(t) + \sigma(t)\right]dt.$$

Во избежание громоздких формул рассмотрим упрощенную постановку задачи, поскольку в указанном выше более общем случае задача может быть решена аналогичным образом.

2. Алгоритм решения задачи. Введем симметрическую $(n \times n)$-матрицу $K(t)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению Риккати

$$\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), \quad K(T) = K_T, \tag{2.1}$$

где $S(t) = B(t)R^{-1}(t)B'(t)$. Обозначим через $W(t, T)$ симметрическую $(n \times n)$-матрицу вида

$$W(t,T) = \int_{t}^{T}\Phi(t,\tau)S(\tau)\Phi'(t,\tau)\,d\tau.$$

Здесь $\Phi(t, \tau) = \Theta(t)\Theta^{-1}(\tau)$ — матрица размерности $(n \times n)$; $\Theta(t)$ — фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения вида $\dot{y}(t) = \overline{A}(t)y(t)$, где $\overline{A}(t) = A(t) - S(t)K(t)$. Пусть n-вектор-функция $q(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{q}(t) = -[A(t) - S(t)K(t)]'q(t) + W^{-1}(t,T)B(t)\varphi(x(t),t), \quad q(t_0) = q_0, \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned} &\varphi(x,t) = R^{-1}(t)[\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)], \quad \lambda_1(x,t) = R(t)\max\{0;\alpha(t) - \omega(x,t)\}, \\ &\lambda_2(x,t) = R(t)\max\{0;\omega(x,t) - \beta(t)\}, \quad \omega(x,t) = -R^{-1}(t)B'(t)[K(t)x + q(t)]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Решение рассматриваемой ЗОУ (1.1)–(1.5) с использованием вышеуказанных обозначений может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а. Пусть в интервале $t_0 \le t \le T$ матрица $R(t)$ с неотрицательными элементами является положительно-определенной, а матрица $Q(t)$ – неотрицательно-определенной. Предположим также, что $W_0 = W(t_0, T) > 0$, система (1.1) вполне управляема в момент времени t_0 и задача управляемости (1.1)–(1.4) имеет решение. Тогда:

1) оптимальная траектория движения системы $x^*(t)$, $t_0 \le t \le T$ в ЗОУ (1.1)–(1.5) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = [A(t) - S(t)K(t)]x(t) + B(t)\varphi(x(t),t) - S(t)q(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.4}$$

где матрица $K(t)$ и вектор $q(t)$ определяются из (2.1) и (2.2) соответственно;

2) оптимальное управление имеет вид

$$u^*(x(t),t) = \omega(x^*(t),t) + \varphi(x^*(t),t), \quad (t_0 \le t \le T), \tag{2.5}$$

где значения вектор-функций $\omega(x^*(t), t)$ и $\varphi(x^*(t), t)$ вычисляются по формуле (2.3).

В Приложении приведено доказательство теоремы на основе достаточных условий оптимальности динамических систем с закрепленными концами траекторий, полученных в [13] с использованием множителей Лагранжа специального вида, и показана возможность выбора вектора q_0, обеспечивающего выполнение конечного условия (1.3).

Для нахождения оптимальной траектории движения системы и оптимального управления в ЗОУ (1.1)–(1.5) можно воспользоваться следующим алгоритмом.

Ш а г 1. Проинтегрировать в интервале $[t_0, T]$ систему дифференциальных уравнений

$$\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), \quad K(T) = K_T, \tag{2.6}$$

$$\dot{W}(t,T) = [A(t) - S(t)K(t)]W(t,T) + W(t,T)[A(t) - S(t)K(t)]' - S(t), \quad W(T,T) = 0, \tag{2.7}$$

где K_T – произвольная неотрицательно определенная симметрическая матрица. В результате интегрирования системы (2.6), (2.7) определяются матрицы $K_0 = K(t_0)$, $W_0 = W(t_0, T)$ и вычисляется вектор

$$q_0 = W^{-1}(t_0, T)x_0. \tag{2.8}$$

Ш а г 2. Проинтегрировать в интервале $[t_0, T]$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{K}(t) = -A'(t)K(t) - K(t)A(t) + K(t)S(t)K(t) - Q(t), \quad K(t_0) = K_0, \\ &\dot{W}(t,T) = [A(t) - S(t)K(t)]W(t,T) + W(t,T)[A(t) - S(t)K(t)]' - S(t), \quad W(t_0,T) = W_0, \\ &\dot{x}(t) = [A(t) - S(t)K(t)]x(t) + B(t)\varphi(x(t),t) - S(t)q(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ &\dot{q}(t) = -[A(t) - S(t)K(t)]'q(t) + W^{-1}(t,T)B(t)\varphi(x(t),t), \quad q(t_0) = q_0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Полученное решение $x(t)$ соответствует искомой оптимальной траектории движения системы $x^*(t)$, $t_0 \le t \le T$. В процессе интегрирования вычисляются значения функций $\omega(x^*(t), t)$, $\lambda_1(x^*(t),t)$, $\lambda_2(x^*(t),t)$, $\varphi(x^*(t), t)$ по формуле (2.3) и, следовательно, можно найти значения оптимального управления $u^*(x(t), t)$, $t_0 \le t \le T$, по формуле (2.5).

Отметим, что при $\alpha(t) \le \omega(x^*(t),t) \le \beta(t)$ имеем $\varphi(x^*(t), t) = 0$, поэтому при выполнении этих условий нет необходимости в вычислении обратной матрицы $W^{-1}(t,T)$ в правой части системы дифференциальных уравнений в (2.9). Кроме того, матрицы $K(t)$ и $W(t, T)$ в (2.6), (2.7), (2.9) являются симметрическими, поэтому для уменьшения объема вычислений при решении этих систем дифференциальных уравнений с помощью численных методов можно рассматривать только верхние треугольные части этих матриц (вместе с диагональными элементами).

Пример. Рассмотрим задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + u^2(t)]dt \to \inf_u$$

при условиях

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = u(t), \quad t_0 \le t \le T; \quad x_1(t_0) = 2, \quad x_2(t_0) = 1;$$
$$x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0; \quad -1 \le u(t) \le 1, \quad (t_0 \le t \le T); \quad t_0 = 0, \quad T = 6.$$

Дифференциальное уравнение Риккати (2.6) для матрицы $K(t)$ при задании конечного условия

$$K(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

будет иметь решение $K(t) \equiv K(T)$, $t_0 \le t \le T$. Искомое оптимальное управление записывается в виде (2.5), где

$$\omega(x^*, t) = -x_1^* - 2x_2^* - q_2(t), \quad \varphi(x^*, t) = \max\{0; -1 - \omega(x^*, t)\} - \max\{0; \omega(x^*, t) - 1\}.$$

Для рассматриваемой задачи имеем

$$W_0 = W(t_0, T) = \begin{pmatrix} \overline{w}_{11} & \overline{w}_{12} \\ \overline{w}_{12} & \overline{w}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2482010.319 & -2929586.246 \\ -2929586.246 & 3458539.068 \end{pmatrix},$$

тогда по формуле (2.8) можно вычислить

$$q_0 = W^{-1}(t_0, T)x_0 = \begin{pmatrix} \overline{q}_1 \\ \overline{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00595 \\ 0.00504 \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.5), находим оптимальное управление $u^*(x, t)$ вида

$$u^*(x, t) = \begin{cases} -1, & t_0 \le t < t_1, \\ -x_1^*(t) - 2x_2^*(t) - q_2(t), & t_1 \le t \le T, \end{cases}$$

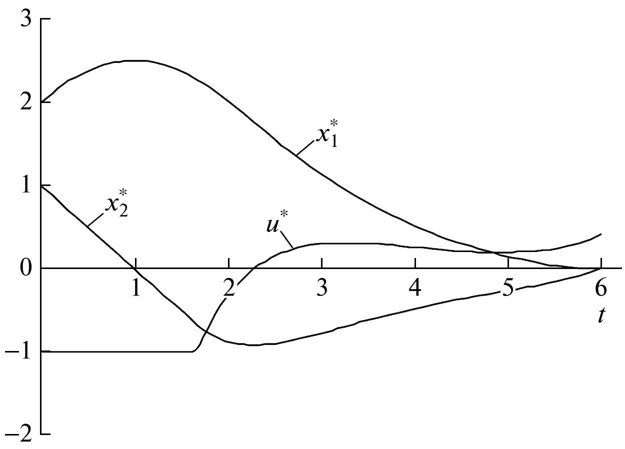
где переключение управления происходит в момент времени $t_1 = 1.663$. Оптимальные траектории $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ в интервале времени $[t_0, T]$ определяются из системы дифференциальных уравнений (2.9)

$$\dot{w}_{11}(t) = 2w_{12}(t), \quad w_{11}(t_0) = \overline{w}_{11},$$
$$\dot{w}_{12}(t) = -w_{11}(t) - 2w_{12}(t) + w_{22}(t), \quad w_{12}(t_0) = \overline{w}_{12},$$
$$\dot{w}_{22}(t) = -2w_{12}(t) - 4w_{22}(t) - 1, \quad w_{22}(t_0) = \overline{w}_{22},$$
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(t_0) = 2,$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + \varphi(x, t) - q_2(t), \quad x_2(t_0) = 1,$$
$$\dot{q}_1(t) = q_2(t) + m_{12}(t)\varphi(x, t), \quad q_1(t_0) = \overline{q}_1,$$
$$\dot{q}_2(t) = -q_1(t) + 2q_2(t) + m_{22}(t)\varphi(x, t), \quad q_2(t_0) = \overline{q}_2.$$

Здесь функции $w_{11}(t)$, $w_{12}(t)$, $w_{22}(t)$ и $m_{12}(t)$, $m_{22}(t)$ являются элементами матриц

$$W(t, T) = \begin{pmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) \\ w_{12}(t) & w_{22}(t) \end{pmatrix} \text{ и } W^{-1}(t, T) = \begin{pmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t) \\ m_{12}(t) & m_{22}(t) \end{pmatrix}$$

соответственно. Отметим, что нет необходимости вычисления $W^{-1}(t, T)$ при $t \in [t_1, T]$, поскольку в этом интервале имеем $\varphi(x, t) \equiv 0$. Графики $u^* = u^*(x, t)$, $x_1^* = x_1^*(t)$ и $x_2^* = x_2^*(t)$ представлены на рисунке. Найденное управление $u^*(x, t)$ обеспечивает достаточно точное выполнение конечного условия $x^*(T) = 0$ (в численных расчетах были получены значения $x_1^*(T) = 0.108 \times 10^{-7}$, $x_2^*(T) = -0.829 \times 10^{-8}$).



Оптимальное управление и оптимальные траектории

Были проведены расчеты также при

$$K(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае графики оптимального управления и оптимальных траекторий совпадают с представленными на рисунке, что подтверждает утверждение о том, что в условии $K(T) = K_T$ в качестве K_T можно взять произвольную неотрицательно-определенную матрицу.

Заключение. В данной работе для линейных нестационарных систем с квадратичным функционалом предложен метод построения синтезирующего управления, переводящего систему из начального состояния в желаемое конечное состояние за заданный интервал времени при наличии ограничений на значения управления.

Задача решена с использованием множителей Лагранжа, зависящих от фазовых координат и времени. За счет выбора $\lambda_0(x,t) = K(t)x + q(t)$ удается построить оптимальное управление по принципу обратной связи, а $\lambda_1(x,t) \geq 0$ и $\lambda_2(x,t) \geq 0$ выбираются таким образом, чтобы были выполнены условия дополняющей нежесткости в методе множителей Лагранжа.

Для искомого оптимального управления $u^*(x, t)$ за счет выбора условия $K(T) = K_T$ можно получить разные формы представления этого управления с различными $K(t)$ и $q(t)$, $t_0 \leq t \leq T$. Для определения оптимального управления и оптимальной траектории движения системы можно воспользоваться алгоритмом, изложенным в разд. 2.

Предлагаемый алгоритм решения нестационарной линейно-квадратичной ЗОУ с закрепленными концами траекторий и ограничениями на значения управления реализован на языке FORTRAN и апробирован для модельного примера.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Произведем доказательство утверждений теоремы на основе достаточных условий оптимальности динамических систем с закрепленными концами траекторий, полученных в [13] с использованием множителей Лагранжа специального вида. Для рассматриваемой задачи метод множителей Лагранжа (принцип освобождения от связей) состоит в следующем: исходная ЗОУ с ограничениями сводится к другой задаче без ограничений. При этом новая задача формируется таким образом, чтобы ее решение являлось решением исходной задачи [14].

Для произвольной непрерывной функции $x(\cdot)$ и произвольной кусочно-непрерывной функции $u(\cdot)$, определенных в интервале $[t_0, T]$, составим функционал Лагранжа:

$$L(x(\cdot),u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{T}\left\{\frac{1}{2}x'(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u'(t)R(t)u(t) + \lambda_0'(x(t),t)[A(t)x(t) + \right.$$
$$\left. + B(t)u(t) - \dot{x}(t)] + \lambda_1'(x(t),t)[\alpha(t) - u(t)] + \lambda_2'(x(t),t)[u(t) - \beta(t)]\right\}dt, \tag{П.1}$$

где λ_0, λ_1, λ_2 – множители Лагранжа, причем $\lambda_1(x(t),t) \geq 0$, $\lambda_2(x(t),t) \geq 0$, $t_0 \leq t \leq T$; $\lambda_0(x(t),t)$ задается в виде $\lambda_0(x(t),t) = K(t)x(t) + q(t)$, $t_0 \leq t \leq T$; матрица $K(t)$ и вектор $q(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2.1) и (2.2) соответственно.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$V(x,t) = \frac{1}{2}x'K(t)x + x'q(t) + \upsilon(t), \tag{П.2}$$

$$M(x,u,t) = \frac{1}{2}x'Q(t)x + \frac{1}{2}u'R(t)u + [K(t)x + q(t)]'[A(t)x + B(t)u] +$$
$$+ \frac{1}{2}x'\dot{K}(t)x + x'\dot{q}(t) + \dot{\upsilon}(t) + \lambda_1'(x,t)[\alpha(t) - u] + \lambda_2'(x,t)[u - \beta(t)]. \tag{П.3}$$

Функция $V(x,t)$ зависит от $(n \times n)$-матрицы $K(t)$, n-вектора $q(t)$ и скалярной функции $\upsilon(t)$, которые подлежат определению. Учитывая, что

$$\frac{dV(x(t),t)}{dt} = \left[\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right]'\dot{x}(t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \lambda_0'(x(t),t)\dot{x}(t) + \frac{1}{2}x'(t)\dot{K}(t)x(t) + x'(t)\dot{q}(t) + \dot{\upsilon}(t),$$

функционал (П.1) можно представить в виде

$$L(x(\cdot),u(\cdot)) = V(x(t_0),t_0) - V(x(T),T) + \int\limits_{t_0}^{T}M(x(t),u(t),t)\,dt. \tag{П.4}$$

Выберем управление u таким образом, чтобы функция $M(x, u, t)$ достигала минимума по u для любых фиксированных $x \in E^n$ и $t \in [t_0, T]$. Для этого необходимо и достаточно выполнения следующих соотношений:

$$\frac{\partial M(x,u,t)}{\partial u} = R(t)u + B'(t)[K(t)x + q(t)] - \lambda_1(x,t) + \lambda_2(x,t) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 M(x,u,t)}{\partial u^2} = R(t) > 0, \quad t_0 \leq t \leq T. \tag{П.5}$$

Из (П.5) находим управление

$$u(x,t) = \omega(x,t) + \varphi(x,t), \tag{П.6}$$

где $\omega(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ определяются по формуле (2.3). Поскольку $R(t)$ является положительно-определенной, то $\det R(t) \neq 0$, т.е. в формуле (2.3) обратная матрица $R^{-1}(t)$ существует для любого $t \in [t_0, T]$.

Выберем множители Лагранжа $\lambda_1(x,t)$, $\lambda_2(x,t)$ таким образом, чтобы были выполнены так называемые условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1'(x,t)[\alpha(t) - u] = 0, \quad \lambda r_2'(x,t)[u - \beta(t)] = 0, \quad \forall x \in E^n, \quad t \in [t_0, T]. \tag{П.7}$$

Для этого осуществим выбор $\lambda_1(x,t)$ и $\lambda_2(x,t)$ следующим образом:

$$\lambda_1(x,t) = R(t)\max\{0; \alpha(t) - \omega(x,t)\}, \quad \lambda_2(x,t) = R(t)\max\{0; \omega(x,t) - \beta(t)\}. \tag{П.8}$$

Отметим, что при $\alpha(t) \leq \omega(x,t) \leq \beta(t)$ имеем $\lambda_1(x,t) = 0$ и $\lambda_2(x,t) = 0$, следовательно, $\varphi(x,t) = 0$. Тогда формула (П.6) примет вид

$$u(x,t) = \omega(x,t) + \max\{0; \alpha(t) - \omega(x,t)\} - \max\{0; \omega(x,t) - \beta(t)\} =$$
$$= \begin{cases} \beta(t), & \text{при} \quad \omega(x,t) > \beta(t), \\ \omega(x,t), & \text{при} \quad \alpha(t) \le \omega(x,t) \le \beta(t), \\ \alpha(t), & \text{при} \quad \omega(x,t) < \alpha(t), \end{cases}$$

тем самым будет обеспечено выполнение ограничений (1.4) на значения управления и условий дополняющей нежесткости (П.7). Кроме того, из (П.8) и неотрицательности элементов матрицы $R(t)$ следует неотрицательность множителей Лагранжа $\lambda_1(x,t) \ge 0$, $\lambda_2(x,t) \ge 0$, $\forall\ x \in E^n$, $t \in [t_0, T]$.

По формуле (П.3) вычислим значения $M(x, u, t)$ вдоль траектории $x = x(t)$, соответствующей управлению $u = u(x(t), t)$ вида (П.6):

$$M(x(t), u(x(t), t), t) = \frac{1}{2} x'(t)[\dot{K}(t) + A'(t)K(t) + K(t)A(t) - K(t)S(t)K(t) + Q(t)]x(t) +$$
$$+ x'(t)[\dot{q}(t) + A'(t)q(t) - K(t)S(t)q(t) - W^{-1}(t,T)B(t)\varphi(x(t),t)] +$$
$$+ \left[\dot{\upsilon}(t) - \frac{1}{2} q'(t)S(t)q(t) + \frac{1}{2}\varphi'(x(t),t)R(t)\varphi(x(t),t) + x'(t)W^{-1}(t,T)B(t)\varphi(x(t),t) \right].$$

Здесь учтено выполнение условий дополняющей нежесткости (П.7) при соответствующем выборе множителей Лагранжа по формуле (П.8). Выберем матрицу $K(t)$ и вектор $q(t)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли дифференциальным уравнениям (2.1) и (2.2) соответственно, а скалярную функцию $\upsilon(t)$ будем искать как решение дифференциального уравнения

$$\dot{\upsilon}(t) = \frac{1}{2} q'(t)S(t)q(t) - \frac{1}{2}\varphi'(x(t),t)R(t)\varphi(x(t),t) - x'(t)W^{-1}(t,T)B(t)\varphi(x(t),t), \quad \upsilon(T) = 0.$$

Тогда имеем

$$M(x(t), u(x(t), t), t) = 0, \quad \forall\ t \in [t_0, T]. \tag{П.9}$$

При управлении $u(t) = u(x(t), t)$ из (П.6) задача (1.1), (1.2) запишется в виде (2.4), где $q(t)$ определяется из дифференциального уравнения (2.2). Покажем, что за счет выбора начального условия $q(t_0) = q_0$ можно обеспечить прохождение через начало координат траектории системы $x(t)$ в конечный момент времени $t = T$.

Решение дифференциального уравнения (2.4) может быть записано в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\varphi(x(\tau),\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)S(\tau)q(\tau)\,d\tau, \tag{П.10}$$

где $q(\tau)$ в свою очередь является решением дифференциального уравнения (2.2) и имеет вид

$$q(\tau) = \Psi(\tau, t_0)q_0 + \int_{t_0}^{\tau} \Psi(\tau,\xi)W^{-1}(\xi,T)B(\xi)\,\varphi(x(\xi),\xi)\,d\xi. \tag{П.11}$$

Здесь $\Psi(\tau,\xi) = \Omega(\tau)\Omega^{-1}(\xi)$ — матрица размерности $(n \times n)$; $\Omega(t)$ — фундаментальная $(n \times n)$-матрица решений дифференциального уравнения вида $\dot{z}(t) = -\overline{A}'(t)z(t)$.

Подставляя (П.11) в (П.10) и меняя порядок интегрирования в полученном двойном интеграле, можно вычислить значение $x(t)$ при $t = T$:

$$x(T) = \Phi(T, t_0)[x_0 - W(t_0, T)q_0]. \tag{П.12}$$

При выводе формулы (П.12) учтены соотношения

$$\Phi(T,\tau) = \Phi(T,\xi)\Phi(\xi,\tau), \quad \Psi(\tau,\xi) = \Psi^{-1}(\xi,\tau) = \Phi'(\xi,\tau).$$

Из (П.12) следует, что выбор q_0 по формуле (2.8) обеспечивает перевод системы в начало координат в конечный момент времени, т.е. $x(T) = 0$.

Таким образом, все условия в рассматриваемой ЗОУ (1.1)–(1.5) будут выполнены. Полученная допустимая пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ является искомым решением $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ для ЗОУ (1.1)–(1.5). Из соотношения (П.2) в силу $x(T) = 0$ и $\upsilon(T) = 0$ имеем $V(x(T), T) = 0$. Тогда из (П.4) и (П.9) следует, что значение функционала Лагранжа, вычисленное вдоль оптимальной траектории $x^*(\cdot)$ и оптимального управления $u^*(\cdot)$, будет равно $L(x^*(\cdot), u^*(\cdot)) = V(x(t_0), t_0)$. При этом функционал (1.5) принимает минимальное значение $J(u^*) = V(x_0, t_0)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. В 5-ти т. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
2. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 614 с.
3. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
4. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. Введение в теорию и приложения. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
5. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I // АиТ. 1960. Т. 21. № 4. С. 436–441.
6. *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control // Bol. Soc. Mat. Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.
7. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
8. *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука, 1968. 446 с.
9. *Куржанский А.Б.* Дифференциальные уравнения в задачах синтеза управлений. I. Обыкновенные системы // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 1. С. 12–22.
10. *Левский М.В.* Об одном случае оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 4. С. 115–130.
11. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Особый режим управления в задаче оптимального разворота произвольного твердого тела (космического аппарата) // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 2. С. 145–152.
12. *Айпанов Ш.А., Мурзабеков З.Н.* Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами и с квадратичным функционалом // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 6. С. 234–240.
13. *Мурзабеков З.Н.* Достаточные условия оптимальности динамических систем управления с закрепленными концами // Мат. журн. 2004. Т. 4. № 2 (12). С. 52–59.
14. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 446 с.