6. Коши тектес интеграл анықтамасы және мысалдар

Айталық, L- кешен айнымалы z жазықтығының белгілі бір тұйық жатық контуры болсын. L контурының ішінде жатқан аймақты ішкі аймақ деп атап, $Д^+$ арқылы белгілейміз, ал $Д^+ + L$-ге қосымша аймақты сыртқы аймақ деп атап, $Д^-$ арқылы белгілейміз.

Егер $f(z)$ функциясы $Д^+$ аймағында аналитикалық және $Д^+ + L$-де үзіліссіз болса, онда кешен айнымалының функциялары теориясындағы белгілі Коши формуласы бойынша

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), z \in Д^+, \\ 0, z \in Д^-, \end{cases} \tag{27}$$

ал егер $f(z)$ функциясы $Д^-$ аймағында аналитикалық және $Д^- + L$-де үзіліссіз болса, онда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), z \in Д^+, \\ -f(z) + f(\infty), z \in Д^-. \end{cases} \tag{28}$$

Мұнда L контурын жүрудің оң бағытын, кәдімгідей, $Д^+$ аймағының сол жақта қалатындай етіп таңдаймыз.

Коши формуласы аналитикалық функциялар үшін шекаралық есепті шешеді, өйткені шекарада оның мәні белгілі болса, онда Коши формуласы ол функцияның мәнін аймақтың әрбір нүктесінде есептеуге мүмкіндік береді. (27), (28) формулалардың сол жағындағы интеграл **Коши интегралы** деп аталады.

Айталық, L-толығымен жазықтықтың ақырлы бөлігіне орналасқан жатық тұйық немесе тұйық емес контур, τ-оның нүктелерінің кешен координаты және $\varphi(\tau)$-контур нүктелерінің үзіліссіз функциясы болсын. Онда Коши интегралы сияқты құрылған

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \tag{29}$$

интегралы Коши тектес интеграл деп, $\varphi(\tau)$ функциясы оның тығыздығы, ал $\frac{1}{\tau - z}$ - өзегі деп аталады.

Тығыздығы $\varphi(\tau)$ үзіліссіз болатын Коши тектес интегралда интеграл астындағы функцияның z арқылы аналитикалық болмайтын нүктелері L интегралдау қисығының нүктелері болып табылады. Сонымен, L қисығы (29) $\Phi(z)$ функциясы үшін ерекше сызық.

Егер L тұйық емес болса, онда $\Phi(z)$ тек L сызығынан басқа бүкіл жазықтықта аналитикалық функция болады. Енді L тұйық контур болсын.

Онда $\Phi(z)$ екі жеке функцияға жіктеледі: $Д^{+}$ аймағында анықталған $\Phi^{+}(z)$ және $Д^{-}$ аймағында анықталған $\Phi^{-}(z)$ функцияларына. Бұл функциялар бір-бірінің, жалпы алғанда аналитикалық жалғасы болмайды.

Бірін бірі толық жазықтыққа дейін толықтыратын $Д^{+}, Д^{-}$ аймақтарында жеке екі $\Phi^{+}(z), \Phi^{-}(z)$ өрнектерімен анықталған аналитикалық $\Phi(z)$ функциясын келешекте жиі **құрама-аналитикалық функция** деп атаймыз.

Коши тектес интегралдың мынадай маңызды қасиетін атап өтейік: (29) Коши тектес интеграл арқылы өрнектелген $\Phi(z)$ функциясы шексіз қашықтықтағы нүктеде нөлге айналады.

Шынында да, $\Phi(z)$ функциясын шексіз қашықтықтағы нүкте маңайында $\frac{1}{z}$ дәрежелері арқылы қатарға жіктейік. Ол үшін

$$\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}\frac{1}{\tau - z} = \left(-\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2} - \ldots - \frac{\tau^{n-1}}{z^n} - \ldots\right)\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}$$

өрнегін мүшелеп интегралдап

$$\Phi^{-}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}$$

аламыз, мұндағы

$$C_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \tau^{k-1}\varphi(\tau)d\tau .$$

Ал бұл жіктеуде дәрежесі нөл мүше жоқ, сондықтан да бұдан $\Phi^{-}(\infty) = 0$ екені шығады.

Мысалы, тығыздығы $\varphi(\tau) = \frac{2}{\tau(\tau - 2)}$ болатын $|z| = 1$ шеңбері бойынша алынған Коши тектес интегралын есептейік, яғни

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{\tau - 2}\frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

$\frac{1}{z-2}$ функциясы $Д^{+}$ аймағында, ал $\frac{1}{z}$ функциясы $Д^{-}$ аймағында аналитикалық және шексіздікте нөлге тең. (27) формула бойынша бірінші интеграл $z \in Д^{+}$ үшін $\frac{1}{z-2}$ –ге тең, ал $z \in Д^{-}$ –үшін нөлге тең. (28) формула бойынша екінші интеграл $z \in Д^{-}$ үшін $-\frac{1}{z}$ –ке тең де, ал $z \in Д^{+}$ үшін нөлге тең. Сонда

$$\Phi^{+}(z) = \frac{1}{z-2}\ , \qquad \Phi^{-}(z) = \frac{1}{z}$$