1. Коши тектес интеграл шегі мен ерекше интеграл байланысы. Сохоцкий формулалары

Айталық,

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau \tag{4}$$

болсын, мұндағы $\varphi(\tau)\in H^{\lambda}(L)$ және L контуры тұйық болсын. Егер контур тұйық болмаса, онда оны бойында $\varphi(\tau)=0$ болатын белгілі бір қисықпен тұйықтаймыз.

$\Phi(z)$ функциясының белгілі бір t нүктесінде шектік мәндерін зерттеу үшін 1 пунктте талданған

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau \tag{5}$$

функциясын қарастырамыз. z нүктесінің L контурының t нүктесіне ішкі жағынан ұмтылғандағы $\Phi(z),\psi(z)$ аналитикалық функцияларының шектік мәндерін сәйкес $\Phi^{+}(t)$, $\psi^{+}(t)$ арқылы, ал сырт жағынан ұмтылғандағы мәндерін $\Phi^{-}(t)$, $\psi^{-}(t)$ арқылы белгілейміз. (Тұйық емес контур үшін бұл сәйкес сол жақтық шектік мән және оң жақтық шектік мән болады) Шекке көшу бағытын көрсету үшін сәйкес $z\to t^{+}$ немесе $z\to t^{-}$ деп жазамыз.Олардың t нүктесіндегі мәндерін $\Phi(t),\psi(t)$ арқылы белгілейміз әрі $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ ерекше интегралын $\Phi(t)$ деп белгілейміз және оны бас мән мағынасында түсінетін боламыз.

Ал

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-z}=\begin{cases}2\pi i, z\in Д^{+},\\ 0, z\in Д^{-},\\ \pi i, z\in L\end{cases} \tag{6}$$

теңдіктерін пайдаланып

$$\psi^{+}(t)=\lim_{z\to t^{+}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-z}\right]=\Phi^{+}(t)-\varphi(t),$$

$$\psi^{-}(t)=\lim_{z\to t^{-}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-z}\right]=\Phi^{-}(t),$$

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}=\Phi(t)-\frac{1}{2}\varphi(t)$$

екенін аламыз.

Негізгі лемма бойынша $\psi(t)$ үзіліссіз, демек, жазылған теңдіктердің оң жақтары тең, яғни

$$\Phi^+(t) + \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t)\,. \tag{7}$$

Мұнан

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \end{aligned} \tag{8}$$

және ерекше интегралды бас мән мағынасында түсінетін боламыз. Бұл формулаларды **Сохоцкий формулалары** деп атайды. Сонымен біз мынадай нәтижеге келдік.

Теорема. Айталық L-тұйық немесе тұйық емес жатық контур, ал $\varphi(\tau)$ - Гельдер шартын қанағаттандыратын контур нүктелерінің функциясы болсын. Онда

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

Коши тектес интегралының контурға оң жағынан да немесе сол жағынан да жақындауда, оның ұштарынан басқа барлық нүктелерде $\Phi^+(t), \Phi^-(t)$ шектік мәндері бар және бұл шектік мәндер $\varphi(t)$ интеграл тығыздығы мен $\Phi(t)$ ерекше интеграл көмегімен (8) Сохоцкий формулалары арқылы өрнектеледі.

Ескерту. (8) формулаларды өзара қосып және шегеріп, практикада жиі қолданатын, оларда Сохоцкий формулалары деп аталатын

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \tag{9}$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \tag{10}$$

формулаларын аламыз.