**Lecture 4**

**Vector space.**

**Action on vectors.**

Directed line segment is called vector, denoted by , where A is the beginning of the vector, and B is the end of the vector (Sometimes denoted as = , , ***а***).

Length of the vector  is the length of the segment *АВ*.

A directed segment at which the beginning and the end coincide (*B = A*) is called *the* *zero vector*.

Two non-zero vectors *AB* and *CD* are *equal* if they lie on parallel lines, are directed to the same direction and have equal lengths, i.e. | *AB* | = |*CD* |.

Vectors lie on a straight line or in parallel lines is called collinear vectors.

Let two vectors  and  be given. Let’s connect the beginning of  with the end of . Then the directed segment  of which the beginning coincides with the beginning of  and the end – with the end of  is called the *sum* of  and . This definition is called *triangle rule*.

















Recall that the sum of vectors and  of which the beginnings coincide is depicted by the directed segment having the same beginning coinciding with the diagonal of parallelogram of which sides are the directed segments and (the *parallelogram rule*). Subtraction (*difference*) of vectors  and is defined as:

 -  =  + (-1) 







The *difference* *-* of these vectors is depicted by the vector coinciding with the second diagonal of the same parallelogram so that the beginning of this vector is at the end of the vector , and its end – at the end of the vector .

The *product* λ of a directed segment  on number λ is zero directed segment for λ = 0 and the directed segment for λ ≠ 0 such that its length is equal to | λ | ⋅ || and its direction coincides with the direction of  if λ > 0 and is opposite to the direction of  if λ < 0.

For example, = 2, = -1.







**Theorem.** The operations of addition and multiplication on real number on the set of vectors have the following properties:

1.  +  =  +  (commutativity)

2.  + (+) = ( +) + , λ(μ ) = (μλ) (associativity)

3. λ( +) = λ + λ, (λ + μ)=λ + μ (distributiveness)

for all vectors ,  and  and all real numbers λ and μ.

*Scalar product (the dot product)* of non-zero vectors  and  is the number that is equal to product of lengths of these vectors on cosine of the angle between them. In case when at least one of vectors is zero vector the scalar product is assumed to be equal zero. Scalar product is denoted by .

,

where φ is angle between  and , 0 ≤ϕ ≤ π

*Properties of scalar product*

*1.*  for ≠0 and ≠0 if  and  are mutually orthogonal.

2. 

3. 

4. 

5. For non-zero  and  

Consider the Cartesian coordinate system.  is beginning point and  is the endpoint of the vector . Then we can vector  writing by components:

A

y2

y1

0 x1 x2 x

B

 = 

In the plane vector can be written as  and in the space as .



*a*2 y

*a1*

x

z

*a3*

*a*1 x



*a2*

y

Length of the vector can be calculated as:



Let ,  and  real number, then:







**Vector product (the cross–product) of vectors and**

**its properties**

An ordered triple of non-coplanar vectors {,,}  
is *right* if after combining their beginnings the shortest turning from  to is visible from the end of vector  making in anticlockwise way.

The *vector product* of non-collinear vectors  and  is the vector  such that

1) ||=||||sinϕ where ϕ is the angle between vectors  and , 0< ϕ < π ;

2)  is orthogonal both to  and ;

3) The triple of vectors {,,} is right.

In case when  and are collinear, their vector product is assumed to be equal to zero-vector.

Vector product is denoted by x. From the definition we have the following:

1. |x| is equal to the area of parallelogram constructed on vectors  and .

2. Non-zero vectors  and  are collinear ⇔ their vector product is equal to zero.

*Properties of vector product*

1. x= -x

2. 

3. 

Let and . Then

x= 

The cross–product enables us to derive elegant formulae for the distance

from a point to a line, the area of a triangle and the distance between two skew lines.

**Mixed product**

The *mixed* (or *vector-scalar*) product of vectors ,  and  denoted by (,,) is called the number .

**Theorem**. The absolute value of the mixed product of vectors (,,) is equal to the volume of parallelepiped constructed on vectors ,  and . The sign of mixed product is positive if the triple of vectors ,  and  is right, and is negative if left.

Let ,  and . Then

(,,)=

**The dimension of the vector space and basis**

Let ***x, y, z, …, u*** be vectors of a linear space **R**.

A vector

***v=x+y+z+…+u***

belongs to this space, where-are real numbers. This vector ***v*** *is called* ***a linear combination*** of vectors ***x, y, z, … u***.

Suppose ***a linear combination*** of vectors ***x, y, z,…u*** is equal to zero vector **0**, i.e.

***x+y+z+…+u= 0.***  (1)

**Def.** If *(1)* is correct only if ***===…==****0* then ***х, y, z, …, u***called *linearly independent vectors*. If *(1)* is correct, provided if at least one of the vectors is non-zero, then ***х, y, z, …, u***are called *linearly dependent.*

It is easy to verify the correctness of the following statement: **If the vectors *x, y, z, …, u* are linearly dependent, one of the vectors is a linear expression to others. And vice versa, If one of the vectors *x, y, z, …, u* is expressed linearly by the others, they are linearly dependent.** Two non-collinear vectors on the plane is an example of linearly independent vectors. Indeed, for vectors on a plane and  equality (1)

****+****=0

is truly if only **==**0. If we assume that this is not true, say****,then =-****, and it means that vectors  , are collinear. Any three vectors on the plane are linearly dependent.

Properties of the vector space:

**1.** If among the vectors ***x, y, z, …, u*** there is zero vector, then this vectors are depended vectors. Indeed, say ***x=0*** . Then (1) is correct if

**=**1,==…==0.

**2.** **If several vectors of a *x, y, z, …, u* are linearly dependent, then they are linearly dependent*.*** Indeed, if we want the vectors **y, z, …, u** are linearly dependent, the equation **y+z+…+u=0** must be valid only if all the coefficients **,,…,** are simultaneously equal to zero.

**Consider the example**. Whether the vectors **x**=(3,2,-1), **y**=(2,-1,3), **z**=(1,3,-4) are linearly dependent?

**Decision**. Vectors **x, y, z** are linearly dependent if this **x+y+z= 0**

is true for inequality to zero at least one of the coefficients **,,**. Let us write as columns vectors **x, y, z**:

** ++= 0**

The problem can be rewritten in the following form:

****

This system consistence, i.e. it always has a solution. Solve the problem by Gauss and find all non-zero solutions:

**,** ,

Here C - any real number.

For the given vectors equation (1) is true if at least one of the numbers**,,** is nonzero. So, given vectors are linearly dependent.

Say, **,**  (С=1).

**Def.** *If there is a* ***n*** *linearly independent vectors in a vector space R and any (****n+1st****) linearly expressed through them, then the space is called the n-dimensional.* ***dim(R)=n*** or ***Rn*** - whichever way they write.

**Def.** *п* *linearly independent vectors of n-dimensional vector space is called a* ***basis****.*

Following statements are true:

***1. The determinant coordinates of basis vectors consisted matrix is not zero.***

***2.*** ***Any vector of space is expressed in terms of basis vectors, and the only way.***

If ****** - a basis, any **x**R expressed by them as follows:

***.***

It turns out, the number *х* is determined by ****** only way with numbers ******, which called **coefficients**.

**Example**. Are **x**=(1;3;0), **y**=(-1;2;1), **z**=(1;-1;2) basis? If so, write out **u**=(2;0;1) the terms of the basis vectors.

**Decision**. By the first assertion, if **x, y, z** are basis, then determinant consisting of the coordinates is not zero:



Consequently, these vectors form a basis.

By the second assertion,**u** is expressed in terms of basis vectors (**x,y,z**), and the only way:

***.***

**x, y, z**, **u** written in the form of columns, and remove the parentheses:

** ++= **

Obtain the following problem:

****

Solving this equation, we find the coordinates(**,,)** of the **u** in basis (**x, y, z)**. Consisting of system three equations with three unknowns can be solved in any way. We find the only right decision:

**, , .**

So, ***.***

**ЕСЕПТЕР МЕН ТАПСЫРМАЛАР**

1. ***а=(3, -1, 4)*** және ***b=(2, 3, 0)*** векторлары берілген. ***2a, -3b, 2a+b, a-3b*** векторлардың координаталарын табу керек.
2. ***А(2, 1)*** және ***В(3, 0)*** векторлары берілген. ***АВ*** векторын және ұзындығын табу керек.
3. ***а=(4,5)*** векторының ұшы А(1,3) нүктесімен беттеседі. А векторының басы болатын нүкте мен ұзындығын табу керек.
4. ***а=(2,-1,0)*** және ***b=(0,-2,1)*** векторлары берілген. Осы векторлардың скаляр көбейтіндісі мен арасындағы бұрышты табу керек.
5. Мынавектолар сызықты тәуелді ме?

a) ***а=(1,-4)***, ***b=(2,3);*** b) ***х=(2,3)***, ***у=(4,6);*** c) ***i=(1,0)***, ***j=(0,1);***

1. Мына вектолар сызықты тәуелді ме?
   1. ***а=(1,4,0)***, ***b=(0,2,3), c=(3,0,1);***
   2. ***а=(1,2,3)***, ***b=(5,-2,3), c=(3,6,9);***
   3. ***i=(1,0,0)***, ***j=(0,1,0), k=(0,0,1);***

7.  ***а,*** ***b, с***  векторлары берілген. ***а,*** ***b***  векторлары базис құра ма? Егер құрса ***с*** векторының (***а,*** ***b)***  базисте жіктелу коэффициенттерін тап:

а) ***а=(3,1)***, ***b=(2,-1), c=(4,1);***

в) ***а=(-1,2)***, ***b=(2,-4), c=(3,5);***

с) ***а=(1,1)***, ***b=(0,-1), c=(5,3);***

8.  ***а,*** ***b, с*** және ***d***  векторлары берілген. ***a, b, c***  векторлары базис құра ма? Егер құрса ***d*** векторының (***а,b,c)***  базисте жіктелу коэффициенттерін тап:

а) ***а=(1,3,0)***, ***b=(2,-1,1), c=(0,-1,2), d=(6,12,-1);***

в) ***а=(0,-1,2)***, ***b=(0,2,-4), c=(6,3,5); d=(6,2,-7);***

с) ***а=(1,-2,0)***, ***b=(-1,1,3), c=(1,0,4), d=(6,-1,7);***

9. ****** базисінде  ***а=******,*** ***b=******, c=***векторлары берілген. ***а,*** ***b,c***  векторлары базис құратынын дәлелдеу керек; ***d=*** векторының (***а,b,c)***  базисте жіктелу коэффициенттерін тап

10. *x’=3x+4y, y’=x-5y*  теңдеулерімен берілген А сызықты түрлендіруді матрицалық түрде жаз.

11*. А* сызықты түрлендіруі ****** базисінде  матрицасымен берілген.  векторына жасалған ***y= Ах*** сызықты түрлендіруін табу керек.

1. *А* сызықты түрлендіруі ****** базисінде  матрицасымен берілген.  векторына жасалған ***y= Ах*** сызықты түрлендіруін табу керек.
2. *x’=x-3y, y’=-3x+y*  теңдеулерімен берілген *А* сызықты түрлендірудің сипаттамалық саны мен өзіндік векторын анықтау керек.
3. Мынадай матрицалармен берілген *А* сызықты түрлендірудің сипаттамалық саны мен өзіндік векторын анықтау керек:

а) ; б) .

15. Квадраттық форманың матрицасын жазу керек:

а) 

б)

в) 

16.  квадраттық формасынан *** *** сызықтық түрлендіру арқылы алынған квадраттық форманы анықтау керек.

17.  квадраттық формасынан *** *** сызықтық түрлендіру арқылы алынған квадраттық форманы анықтау керек.

18. Мына квадрат формалардың оң(теріс) анықталғандығын тексер:

а) 

б)

в) .

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. ***а=(1,-1,0)*** және ***b=(-2,3,0)*** векторлары берілген. ***-3a, 5b, a-5b*** векторлардың координаталарын табу керек.
2. ***а=(3,-5)*** векторының басы А(1,3) нүктесімен беттеседі. А векторының ұшы болатын нүкте мен ұзындығын табу керек.
3. ***а=(1,-2,0)*** және ***b=(5,0,-1)*** векторлары берілген. Осы векторлардың скаляр көбейтіндісі мен арасындағы бұрышты табу керек.
4. Мынавектолар сызықты тәуелді ме?

a) ***а=(-3,4)***, ***b=(2,0);*** b) ***х=(1,5)***, ***у=(-1,-5);***

1. Мына вектолар сызықты тәуелді ме?
   * 1. ***а=(0,5,1)***, ***b=(1,-2,3), c=(5,0,-1);***

***2) а=(5,2,-3)***, ***b=(2,-2,3), c=(-4,4,-12);***

24.  ***а,*** ***b, с***  векторлары берілген. ***а,*** ***b***  векторлары базис құра ма? Егер құрса ***с*** векторының (***а,*** ***b)***  базисте жіктелу коэффициенттерін тап:

а) ***а=(-1,1)***, ***b=(2,1), c=(-3,1);***

б) ***а=(0,2)***, ***b=(0,7), c=(8,5);***

25.  ***а=(2, -1, 5)***, ***b=(3, 2, 1), c=(1, 1, 0),*** векторлары базис құра ма? Егер құрса ***d=(5, 6, -3)*** векторының (***а, b, c)***  базисте жіктелу коэффициенттерін тап.

26.  ****** базисінде  ***а=******,*** ***b=******, c=***векторлары берілген. ***а,*** ***b,c***  векторлары базис құратынын дәлелдеу керек; ***d=*** векторының (***а,b,c)***  базисте жіктелу коэффициенттерін тап

27. *А* сызықты түрлендіруі ****** базисінде  матрицасымен берілген.  векторына жасалған ***y= Ах*** сызықты түрлендіруін табу керек.

* 1. *А* сызықты түрлендіруі ****** базисінде  матрицасымен берілген.  векторына жасалған ***y= Ах*** сызықты түрлендіруін табу керек.
  2. Мынадай матрицалармен берілген *А* сызықты түрлендірудің сипаттамалық саны мен өзіндік векторын анықтау керек:

а) ; б) ; в).

30. Квадраттық форманың матрицасын жазу керек:

а) 

б)

31.  квадраттық формасынан *** *** сызықтық түрлендіру арқылы алынған квадраттық форманы анықтау керек.

32. Мына квадрат формалардың оң(теріс) анықталғандығын тексер:

а) 

б)