№4-5 дәріс
Кубталатын фигуралар. Үштік интеграл

Кеңістікте кез келген дене деп қайсыбір шектелген нүктелер жиынын айтады.

Көп жақты фигураның көлемі деп теріс емес, монотондылық, аддитивтік, инварианттылық қасиеттер орындалатын шаманы айтады. Кеңістіктегі берілген F денесі жатқан Q көпжақты фигураның көлемі төменгі жағынан (мәселен нольмен) шектелген, ал осы денеде жатқан ρ көпжақты фигураның көлемі жоғары жағынан шектелген. Сондықтан $V_* = V_*(F) = \sup P, \quad V^* = V^*(F) = \inf Q$. Егер $V_*(F) = V^*(F)$, онда F фигураның көлемі бар немесе, F кубталады дейді, оның жалпы мәнін F фигурасының көлемі деп оны $V(F)$ белгілейді.

Теорема 1. F денесі кубталатын болуы үшін, $\forall \varepsilon > 0$ санына сәйкес $P \subset F$, $Q \supset F$ көпжақты фигуралар табылып, $V(Q) - V(P) < \varepsilon$ теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Қайсыбір жиынның көлемі ноль дейді, егер ол көлемі жеткілікті аз көпжақты фигураның ішінде жатса, F денесінің кубталуы үшін оның шекарасының көлемі ноль болуы қажетті және жеткілікті. Айталық кубталатын F денесінде шектелген $f(x, y, z)$ функциясы берілсін.

Үштік интегралдың анықтау схемасы:

1. F облысты n бөлікке бөлеміз: $F_1, F_2, ..., F_n$ көлемдерінде осы әріптермен белгілейміз.

2. әр дербес облыста $P_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1,2,...,n$ нүктелерді аламыз да осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептейміз.

3. $f(x, y, z)$ функция үшін интегралыдық қосындыны құрастырамыз:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \cdot V_k \qquad (1)$$

Әрине қосынды нүктелердің таңдауына және облысты бөлу амалына тәуелді.

Анықтама. Егер $d \to 0$ да және облысты n бөлікке бөлу, P_k нүктелерді таңдау амалына тәуелсіз, σ интегралдық қосындының шегі бар болса, онда осы шек $f(x, y, z)$ функциясының F облыс бойынша алынған үштік интегралы деп аталады. Оны былай белгілейміз:

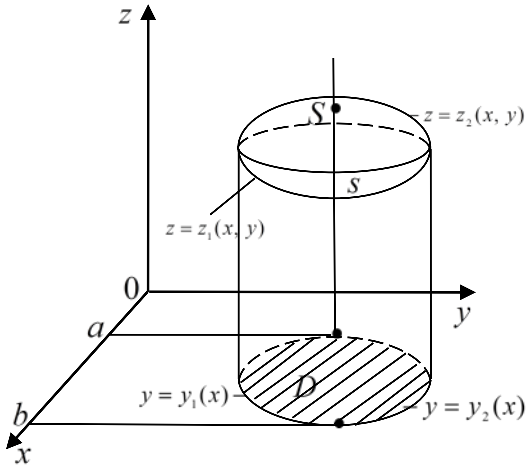
$$\iiint_F f(x, y, z) dF \quad \text{немесе} \quad \iiint_F f(x, y, z) dxdydz$$

Теорема 2. Егер F облысында $f(x, y, z)$ үзіліссіз болса, онда бұл функцияның үштік интегралы бар.

Үштік интегралдың қасиеттері қос интегралдың қасиеттеріндей, жеке мына екі қасиетін атауға болады:

1. $\iiint_V dV = V$, демек функция бірге тең болса, онда үштік интеграл облыстың көлеміне тең.

2. Егер $f(x,y,z)$ берілген облыста үзіліссіз болса, онда $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V$ (орта мән туралы теорема).



Теорема 3. Егер V облыс суретте көрсетілгендей және $f(x,y,z)$ үзіліссіз болса, онда

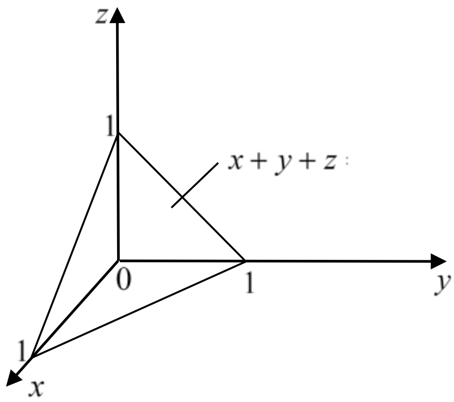
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iint\limits_D \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]d\delta \qquad (2)$$

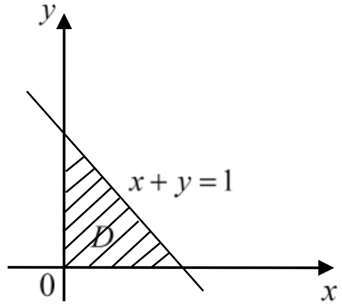
$D-$облыстың түріне байланысты (2) формуланы, мысалы, былай жазуға болады:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (3)$$

Есептеу әрқашан ***оңнан солға*** қарай жүргізіледі.

Мысладар: $V: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$ жазықтармен шектелге тетраэдр.





$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz$$

2) Интегралды есептеңіз: $I = \iiint\limits_V 48xyzdV$, егер мұнда: $V:\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ − шардың бірінші координаталар бұрышында жататын бөлігі

$$I = \iint\limits_D \left[\int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} 48xyzdz \right] d\delta = 24 \iint\limits_D xy\left(R^2 - x^2 - y^2\right)dxdy = R^6 .$$