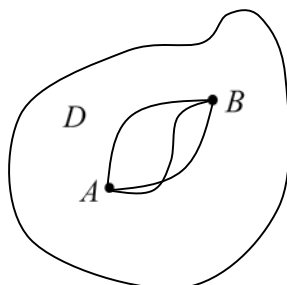


## №10-дәріс

### Қисық сызқты интегралдың интегралдау жолынан тәуелсіздігі

$D$  облысында  $P(x, y)$  және  $Q(x, y)$  функциялар анықталған, үзіліссіз болсын. Осы облыста жататын  $A$  және  $B$  нүктелерді алайық, оларды жалғастыратын кез келген кесінді-тегіс қисықтар бойынша интегралды қарастырсақ, онда жалпы айтқанда әр түрлі мәндер шығады. Кейбір жағдайда бір сан шығады, демек жолға тәуелсіз.



Сондықтан, мына сұрақты қоюға болады: қандай жағдайда қисық сызқты интегралдың мәні жолға тәуелсіз?

$$\text{Th1. } \int_L Pdx + Qdy \quad (1)$$

Интегралдың жолына тәуелсіз болу үшін, осы облыста жататын және өзін-өзі қимайтын кез-келген тұйық  $C$  контур бойынша интегралдың нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті.

**Th2.** Айталық бір байланысты шектелген  $D$  облысында  $P(x, y)$  және  $Q(x, y)$  функциялар,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  және  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  дербес туындыларымен анықталған, үзіліссіз болсын. Онда осы облыста жататын тұйық кесінді-тегіс  $C$  контур бойынша интеграл нөлге тең болу үшін, мына шарттың

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2)$$

орындалуы қажетті және жеткілікті.

**Салдар.** Қисық сызқты интегралдық интегралдау жолына тәуелсіз болуы үшін (2)-ші шартын орындалуы қажетті және жеткілікті.

(1)-ші интегралдың астындағы өрнек, яғни  $Pdx + Qdy$  екі айнымалы функцияның толық дифференциалының формасына ұқсайды:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (3)$$

**Th3.** Егер  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  функциялар бір байланысты, шектелген  $D$  облысында  $\frac{\partial P}{\partial y}$  және  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  дербес туындыларымен үзіліссіз болса, онда  $Pdx + Qdy$  өрнек толық дифференциал болу үшін (2)-ші шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті.

Бұл функция мына формулалармен анықталады:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + c \quad (4)$$

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y) dy + c \quad (5)$$

**Мысалдар:**

1.  $\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \left[ x - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right] dx + \left[ \frac{x^2}{(x-y)^2} - y \right] dy$  [1]
2.  $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left( 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left( \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy$  [ $\pi + 1$ ]
3.  $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy)$  [ $e^a \cos b - 1$ ]