№1 дәріс

Квадратураланатын фигуралар. Қос инеграл, қасиеттері

Айталық F жазық фигура болсын. Жазық фигура деп жазықтықтағы шектелген нүктелер жиынын айтатыны белгілі. Осы жазық фигураның ішінде жатқан барлық көпбұрыштарды P деп, ал осы жазық фигура жатқан көпбұрыштарды Q-мен белгілейміз. Q сырттай сызылған, P-ны іштей сызылған фигуралар деп атайды. Іштей сызылған фигуралар ауданы жоғарғы жағынан, ал сырттай сызылған фигуралар аудандары төменгі жағынан шектелген. Сондықтан олардың дәл жоғарғы және дәл төменгі шекаралары бар:

$$S_* = S_*(F) = \sup_{P\subset F} P_{ауд}, \qquad S^* = S^*(F) = \inf_{Q\supset F} Q_{ауд}$$

S_*-ты F фигурасының ішкі, ал S^*-ты F фигурасының сыртқы ауданы деп атайды және $S_* \le S^*$.

Егер $S_* = S^*$, онда олардың жалпы мәні S-ты F фигурасының ауданы деп атайды, ал F-ті ауданы бар немесе квадратураланатын(квадратталатын) фигура атайды да ауданды μF белгілейді.

Негізгі қасиеттері:

1. Аддитивтік қасиет. Егер $F = F_1 \cup F_2$, болса және F_1, F_2, облыстарының ортақ ішкі нүктелері болмаса, онда $\mu F = \mu F_1 + \mu F_2$

2. Монотондық қасиет. Егер $F_1 \subset F_2$, онда $\mu F_1 \le \mu F_2$

3. инварианттылық қасиет. Егер $F_1 = F_2$, онда $\mu F_1 = \mu F_2$

Теорема. F жазық фигурасы квадратураланатын болуы үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $P \subset F$ және $Q \supset F$ көпбұрышты фигуралар табылып, олардың аудандарының

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$$

теңсіздігін қанағаттандыруы қажетті және жеткілікті. Қайсыбір жиынның, дербес жағдайда қисықтың ауданы ноль дейді, егер ол ауданы жеткілікті аз көпбұрышта жатса.

Теорема. F жазық фигура квадратуралануы үшін, оның шекарасының ауданы ноль болуы қажетті және жеткілікті.

Лемма. Кез келген түзуленетін қисықтың ауданы нольге тең.

$z = f(x, y)$ D облысында анықталған, ал $D-$ квадратураланатын және өзара қиылыспайтын D_k бөліктерден құралған болсын.

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta S_k \qquad (1)$$

Интегралдық қосынды түземіз, мұнда ΔS_k бөліктің ауданы, ал $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$ кез келген нүкте.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{d\to 0}\sigma$, мұндағы $d = \max D_k$, бар болса оны $f(x,y)$ функциясының D облысы бойынша алынған қос интегралы деп атайды. Оны $\iint\limits_D f(x,y)ds$ немесе

$S = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta S_k$, $s = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta S_k$, мұнда $M_k = \sup\limits_{D_k} f(x,y)$, $m_k = \inf\limits_{D_k} f(x,y)$

Теорема. D облысындағы шектелген $f(x,y)$ функциясы интегралданады сонда, тек сонда ғана, егер кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $S - s < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

1-теорема. Егер тұйық шектелген D облысында $f(x,y)$ функциясы үзіліссіз болса, онда ол интегралданады.

2-теорема. Егер $f(x,y)$ функциясы тұйық шектелген D облысының қайсыбір ауданы ноль болатын жиынан басқа нүктелерінде үзіліссіз болса, онда ол интегралданады.

Қасиеттер

1. $\iint\limits_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]ds = \iint\limits_D f_1(x,y) \pm \iint\limits_D f_2(x,y)ds$

2. $\iint\limits_D kf(x,y)ds = k\iint\limits_D f(x,y)ds, \quad k = const$

3. $\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds, \quad D = D_1 \cup D_2$

4. $\iint\limits_D f(x,y)ds \le \iint\limits_D \varphi(x,y)ds,$ егер $f(x,y) \le \varphi(x,y)$

5. $\left|\iint\limits_D f(x,y)ds\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|ds$

6. $mS \le \iint\limits_D f(x,y)ds \le MS, \quad m \le f(x) \le S, \quad S = \mu D$

7. $\iint\limits_D f(x,y)ds = f(\xi,h)\cdot S$ (орташ