

Вопросы по предыдущей лекции:

1. Напишите правостороннее конечно-разностное соотношение для первой производной.
2. Напишите левостороннее конечно-разностное соотношение для первой производной.
3. Напишите центральное конечно-разностное соотношение для первой производной.
4. Напишите конечно-разностное соотношение для второй производной.
5. Какие из этих 4-х конечно-разностных соотношений имеют 1-й порядок точности, а какие 2-й?
6. Напишите конечно-разностное соотношение для частной производной:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j}$$

Лекция 5

Устойчивость разностных схем

Понятия аппроксимации, устойчивости и сходимости разностных схем

$$L(f)=0 \quad (1) \quad f \text{ — точное решение ДУ (1)}$$

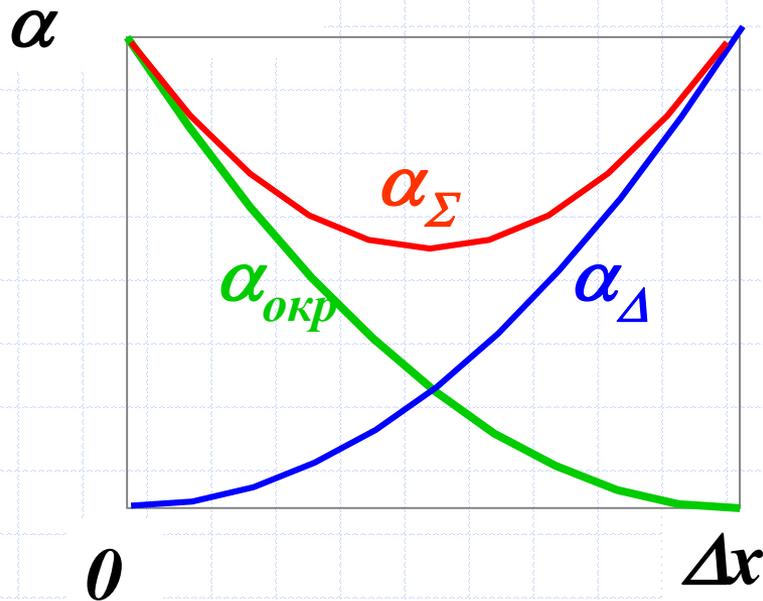
$$L_{\Delta}(f_{\Delta})=0 \quad (2) \quad f_{\Delta} \text{ — сеточная функция, или решение КРС (2)}$$

Ошибка аппроксимации (или невязка) КРС (2):

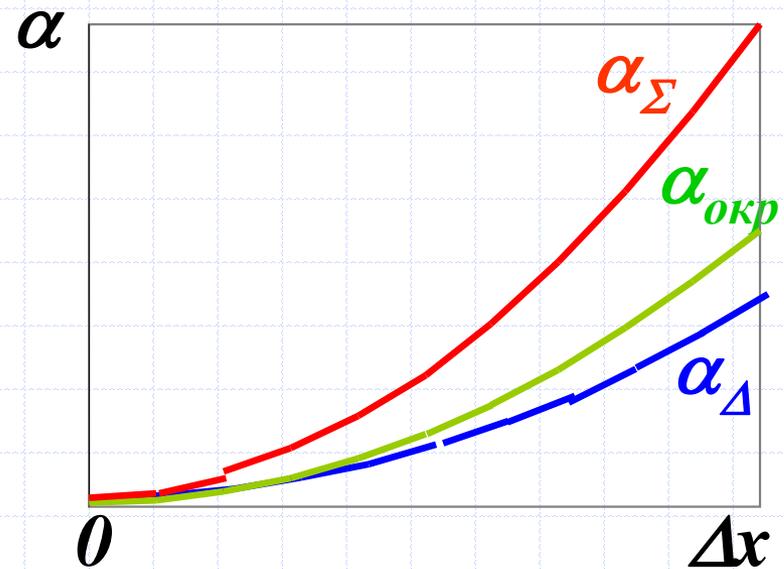
$$\alpha_{\Delta}=L_{\Delta}(f)$$

Схема называется **аппроксимирующей** на точном решении, если при $\Delta x \rightarrow 0$ $\alpha_{\Delta} \rightarrow 0$

Условие сходимости: при $\Delta x \rightarrow 0$ $f_{\Delta} \rightarrow f$



Аппроксимирующая, но
несходящаяся КРС



Аппроксимирующая и
сходящаяся КРС

Чтобы из свойства аппроксимации следовала сходимостъ,
необходимо и достаточно, чтобы КРС была
устойчивой относительно малых возмущений

Описание неустойчивости

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2} \quad * \Delta t$$

$$f_i^{n+1} - f_i^n = -\frac{u\Delta t}{2\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n)$$

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$$

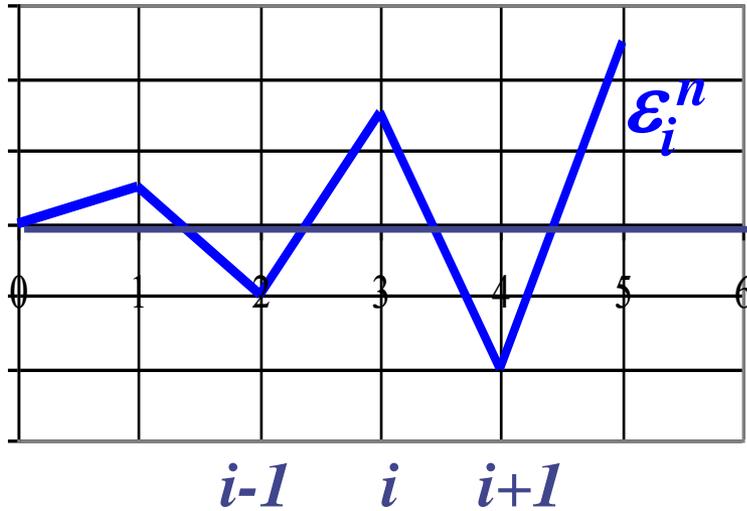
число Куранта
(3)

$$d = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$$

диффузионное
число
(4)

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + d (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n) \quad (5)$$

Условие устойчивости КРС:



$$|\varepsilon_i^{n+1}| \leq |\varepsilon_i^n|$$

ИЛИ:

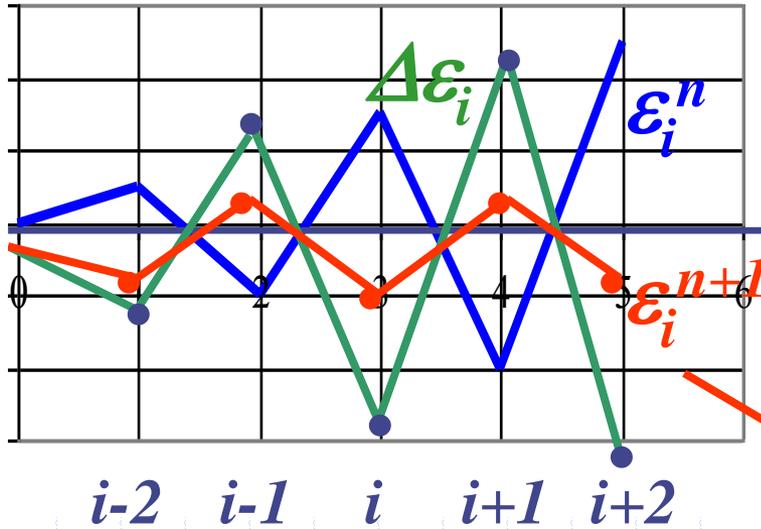
$$\frac{|\varepsilon_i^{n+1}|}{|\varepsilon_i^n|} \leq 1 \quad (6)$$

$$f_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1} = f_i^n + \varepsilon_i^n - \frac{C}{2} \left[(f_{i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n) - (f_{i-1}^n + \varepsilon_{i-1}^n) \right] + d \left[(f_{i+1}^n + \varepsilon_{i+1}^n) + (f_{i-1}^n + \varepsilon_{i-1}^n) - 2(f_i^n + \varepsilon_i^n) \right] \quad (7)$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + d (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n) \quad (5)$$

(7)-(5):

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n - \frac{C}{2} (\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) + d (\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n)$$

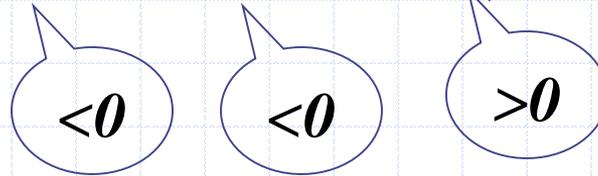


$$\Delta \varepsilon_i = \varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n$$

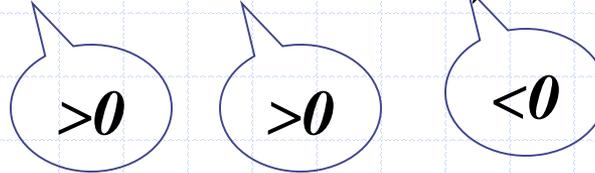
$$\Delta \varepsilon_i = -\frac{C}{2} (\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) + d(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n) \quad (8)$$

C=0:

$$\Delta \varepsilon_i = d(\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_{i-1}^n - 2\varepsilon_i^n) < 0$$



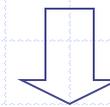
$$i-1: \Delta \varepsilon_{i-1} = d(\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-2}^n - 2\varepsilon_{i-1}^n) > 0$$



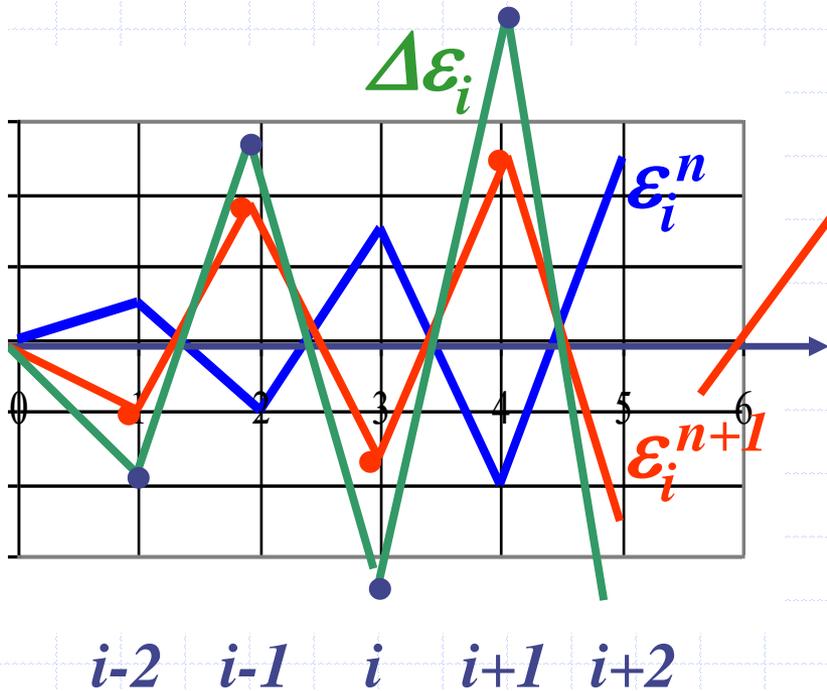
$$i+1: \Delta \varepsilon_{i+1} = d(\varepsilon_{i+2}^n + \varepsilon_i^n - 2\varepsilon_{i+1}^n) > 0$$

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n + \Delta \varepsilon_i$$

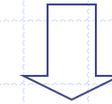
$$|\varepsilon_i^{n+1}| < |\varepsilon_i^n|$$



Устойчивая КРС

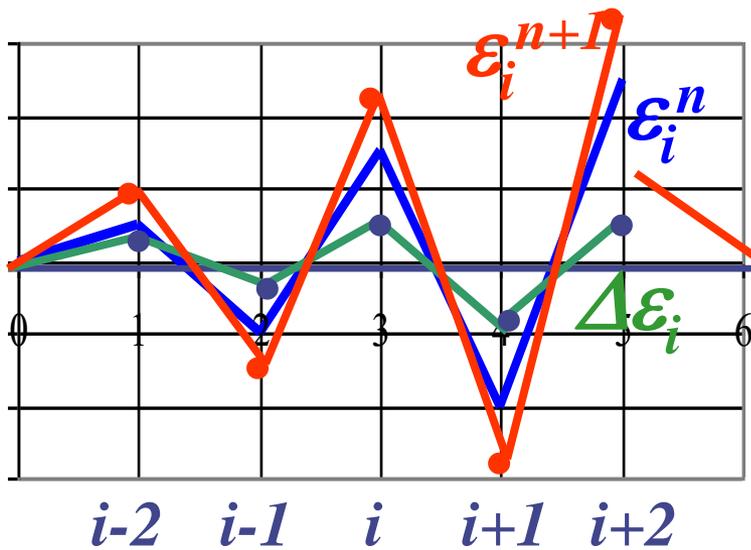


$$\left| \varepsilon_i^{n+1} \right| > \left| \varepsilon_i^n \right|$$



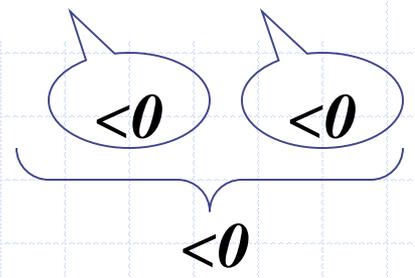
Неустойчивая КРС

**Уравнение (5) при $C=0$
является
условно устойчивым.**



$$\boxed{d=0} \quad (8):$$

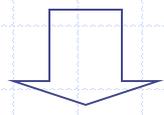
$$\Delta \varepsilon_i = -\frac{C}{2} (\varepsilon_{i+1}^n - \varepsilon_{i-1}^n) > 0$$



$$i-1: \Delta \varepsilon_{i-1} = -\frac{C}{2} (\varepsilon_i^n - \varepsilon_{i-2}^n) < 0$$

$$|\varepsilon_i^{n+1}| > |\varepsilon_i^n|$$

$$i+1: \Delta \varepsilon_{i+1} = -\frac{C}{2} (\varepsilon_{i+2}^n - \varepsilon_i^n) < 0$$



Неустойчивая КРС

Уравнение (5) при $d=0$ является **абсолютно неустойчивым.**

Вопросы:

1. Как находят ошибку аппроксимации?
2. Какая КРС называется аппроксимирующей?
3. Какая КРС называется сходящейся?
4. Из-за чего возникает неустойчивость?
5. Напишите число Куранта.
6. Напишите диффузионное число.
7. Напишите условие устойчивости КРС.