

Курс
**«Алгоритмы, структуры данных и
программирование»**
(на примере языка C#)

**Введение
«Системы счисления»**

Лектор
Бурибаев Бахыт Бурибаевич
e-mail: b.buribaev@gmail.com
тел. 8 777 362 38 16

Системы счисления

eeeeeeeeeee

Ä	Ë	Ê	Ä	Ê	Ë	Å	Å	Ä
1	2	3	4	5	6	7	8	9

История системы счисления

В наше время современному человеку постоянно попадаются числа, цифры... они с нами везде. А 2 тысячи лет назад что знал человек о цифрах? А 5 тысяч лет назад? Вопрос не простой, но очень интересный. Историки доказали, что и 5 тысяч лет тому назад люди могли записывать числа, могли производить над ними арифметические действия. Но записывали они числа по другим принципам, нежели мы в настоящее время.

Появление дробных чисел было связано с необходимостью производить измерения. Но так как единица измерения не всегда укладывалось целое число раз в измеряемой величине, то возникла практическая потребность ввести более «мелкие» числа, чем натуральные. При изложении материала под числом мы будем понимать его величину, а не его символическую запись. Сегодня человечество для записи чисел использует в основном десятичную систему счисления.

Система счисления

непозиционная

От положения знака в изображении числа не зависит величина, которую он обозначает.

позиционная

Величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от ее позиции.

Римская система счисления

- В непозиционных системах счисления от положения цифры в записи числа не зависит величина, которую она обозначает.
- Примером является римская система. В римской системе в качестве цифр используется латинские буквы:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

• Число 32 в римской системе счисления имеет вид:

$$\text{XXXII} = (\text{X}+\text{X}+\text{X})+(\text{I}+\text{I}) = 30+2$$

• Число 444, имеющее в десятичной записи 3 одинаковые цифры, в римской системе счисления будет записано в виде:

$$\text{CDXLIV} = (\text{D}-\text{C})+(\text{L}-\text{X})+(\text{V}-\text{I}) = 400+40+4.$$

• Число 1974 в римской системе счисления имеет вид

$$\text{MCMLXXIV} = \text{M}+(\text{M}-\text{C})+\text{L}+(\text{X}+\text{X})+(\text{V}-\text{I}) = 1000+900+50+20+4.$$

Леонардо Пизанский Фибоначчи (1170-1250)

Он был итальянским математиком.
Благодаря его книге «*Liber Abaci*»
Европа узнала индо-арабскую
систему чисел, которая позднее
вытеснила римские числа.

Позиционная система счисления

Позиционную систему счисления называют традиционной, если ее базис образует члены геометрической прогрессии, а значения цифр есть целые неотрицательные числа. Базис – последовательность чисел каждой из которых задает вес соответствующего разряда.

Знаменатель P геометрической прогрессии, члены которой образуют базис традиционной системы счисления, называется **основанием** этой системы счисления. Традиционные системы счисления с основанием P иначе называют **P -ичными**.

Десятичная система счисления

Основные определения

- Система счисления или **нумерация** - это способ записи чисел.
- Символы, при помощи которых записываются числа, называются **цифрами**, а их совокупность - **алфавитом** системы счисления. Количество цифр, составляющих алфавит, называется **его размерностью**.
- Система счисления называется **позиционной**, если количественный эквивалент цифры зависит от ее положения в записи числа.
- В привычной нам десятичной системе значения числа образуется следующим образом: значение цифр умножаются на «вес» соответствующих разрядов и все полученные значения складываются.

Например, $5047 = 5 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1$.

Такой способ образования значения числа называется **аддитивно-мультипликативным**.

Развернутая форма записи числа

$$A_q = \pm \left(a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \dots + a_0q^0 + a_{-1}q^{-1} + a_{-2}q^{-2} + \dots + a_{-m}q^{-m} \right).$$

Где A -само число, q -основание системы счисления, a -цифры данной системы счисления, n -число разрядов целой части числа, m -число разрядов дробной части числа.

Пример:

$$32478_{10} = 3 \times 10000 + 2 \times 1000 + 4 \times 100 + 7 \times 10 + 8 =$$
$$= 3 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0.$$

единицы

десятки

сотни

тысячи

"Алфавит" различных систем счисления

Система счисления	Основание	Размерность алфавита	Цифры
Двоичная	2	2	0, 1
Восьмеричная	8	8	0,1,2,3,4,5,6,7
Десятичная	10	10	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
Шестнадцатеричная	16	16	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Двоично-шестнадцатеричная таблица

16	2	16	2
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

Двоично - восьмеричная таблица

8	2
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Перевод десятичных чисел в другие

Двоичная

$$\begin{array}{r} 15 \\ - 14 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ | \\ 7 \\ - 6 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ | \\ 3 \\ - 2 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$15_{10} = 1111_2$$

Восьмеричная

$$\begin{array}{r} 315 \\ - 24 \\ \hline 75 \\ - 72 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ | \\ 39 \\ - 32 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ | \\ 4 \\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$315_{10} = 473_8$$

Шестнадцатеричная

$$\begin{array}{r} 315 \\ - 16 \\ \hline 155 \\ - 144 \\ \hline 11 \\ (B) \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ | \\ 19 \\ - 16 \\ \hline 3 \\ 16 \\ | \\ 16 \\ | \\ 1 \end{array}$$

$$315_{10} = 13B_{16}$$

Перевод десятичной дроби

Двоичная

$$0,1875_{10} = 0,0011_2$$

0	1875
	$\times 2$
0	3750
	$\times 2$
0	7500
	$\times 2$
1	5000
	$\times 2$
1	0000

Шестнадцатеричная

$$0,1875_{10} = 0,3_{16}$$

0	1875
	$\times 16$
3	0000

Восьмеричная

$$0,1875_{10} = 0,14_8$$

0	1875
	$\times 8$
1	5000
	$\times 8$
4	0000

Двоичная арифметика

Таблица сложения

$$0+0=0$$

$$1+0=1$$

$$0+1=1$$

$$1+1=10$$

Таблица вычитания

$$0-0=0$$

$$1-0=1$$

$$1-1=0$$

$$10-1=1$$

Таблица умножения

$$0*0=0$$

$$1*0=0$$

$$1*1=1$$

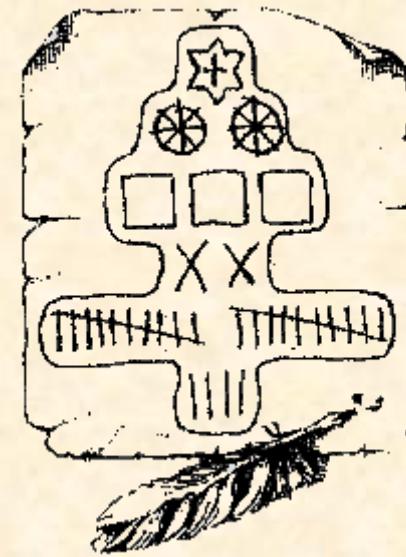
$$\begin{array}{r} 1001000 \\ 101101 \\ \hline 11011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011 \\ + 101101 \\ \hline 1001000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} *11001 \\ 10001 \\ \hline 11001 \\ + 00000 \\ 00000 \\ 00000 \\ 11001 \\ \hline 1101001 \end{array}$$

Задача

Ей было **1100** лет.
Она в **101** класс ходила.
В портфеле по **100** книг носила.
Все это правда, а не бред.
Когда пыля десятком ног.
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий,
Она ловила каждый звук
Своими **десятью** ушами,
И **10** загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И **10** темно-синих глаз
Оглядывали мир привычно.
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.



ОТВЕТ

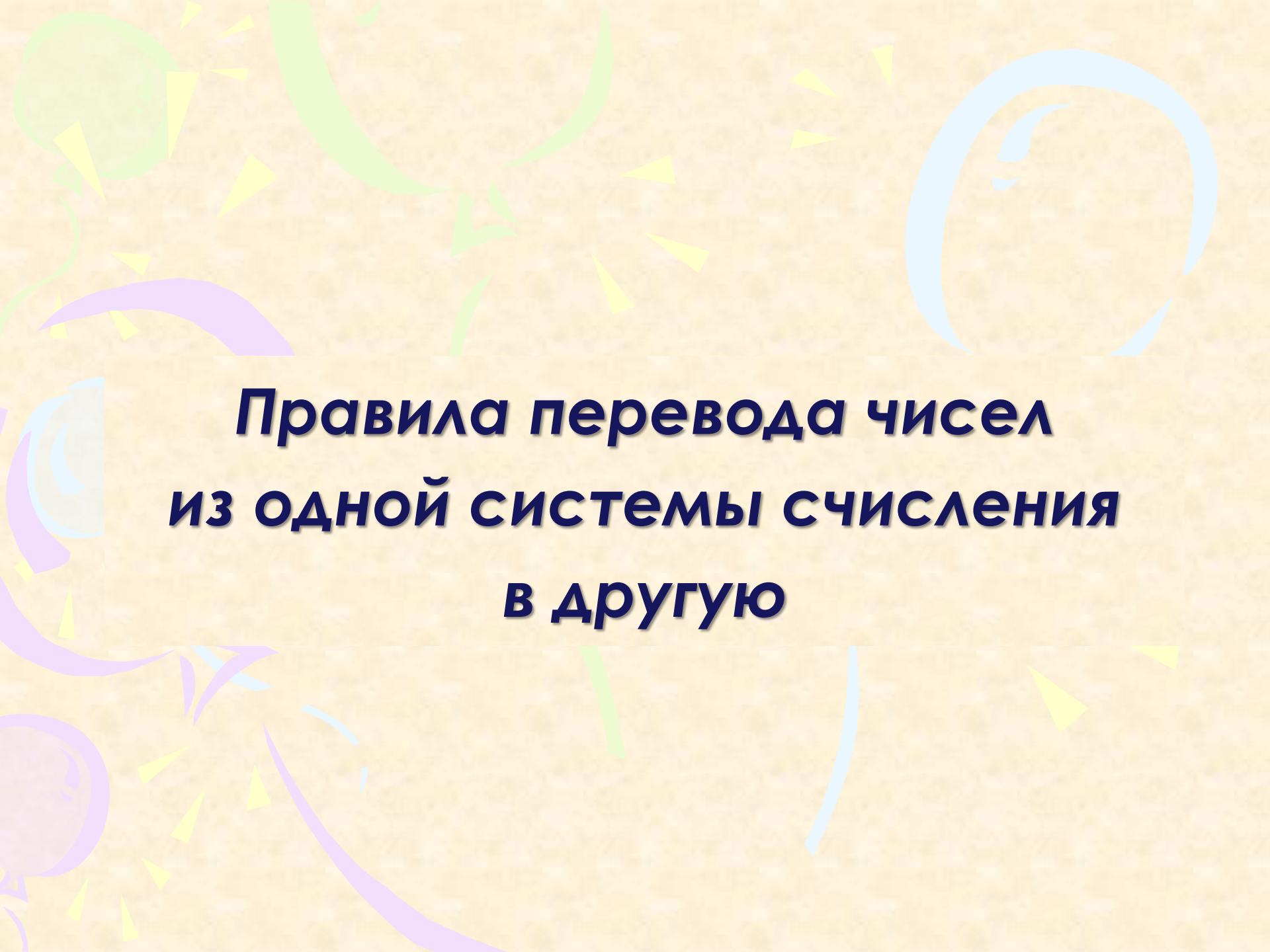
ОТВЕТ

Ей было **12** лет.
Она в **5** класс ходила.
В портфеле по **4** книг носила.
Все это правда, а не бред.
Когда пыля десятком ног.
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий,
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И **2** загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И **2** темно-синих глаз
Оглядывали мир привычно.
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.



Спасибо за
внимание!

(если не поняли, читаем дальше...)



Правила перевода чисел из одной системы счисления в другую

Правило 1. Перевод числа из любой системы в десятичную систему счисления

1. Представить число в развернутой форме
2. Найти значение выражения, используя правила десятичной системы счисления
3. Записать ответ в десятичной системе счисления

Например: $1035_6 =$

3 2 1 0

$$= 1 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0 =$$

$$= 216 + 0 + 18 + 5 = 239_{10}$$

Правило 2.1 Перевод числа из десятичной системы в любую систему счисления (для ЦЕЛОЙ ЧАСТИ)

Пример 1. $324_{10} \rightarrow X_8$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \underline{- 8} \\ 320 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \underline{- 8} \\ 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \underline{- 8} \\ 5 \end{array}$$

Diagram illustrating the division of 324 by 8 to find the quotient (4) and remainder (0). The quotient 4 is highlighted in red, and the remainder 0 is also highlighted in red.

Ответ: $324_{10} = 504_8$

Пример 2.

$2837_{10} \rightarrow X_{13}$

$$\begin{array}{r} 2837 \quad | \quad 13 \\ \hline 13 \\ \hline 2834 \quad | \quad 218 \quad | \quad 13 \\ \hline 208 \\ \hline 16 \quad | \quad 13 \\ \hline 13 \\ \hline 1 \end{array}$$

3 10 3

3

1

Ответ: $2837_{10} = 13A3_{13}$

Правило 2.2:

$A_{10} \rightarrow A_x$

(Для дробной части числа)

1. Умножить дробную часть исходного числа на основание новой системы счисления
2. Записать полученную целую и дробную части
3. Выполнять умножение до тех пор пока дробная часть не станет равной нулю или не будет достигнута требуемая степень точности
4. Выписать полученные целые части в прямой последовательности
5. Записать ответ в новой системе счисления

Правило 2.2 Перевод числа из десятичной с. с. системы в любую с. с. (для ДРОБНОЙ ЧАСТИ)

Например:

$0,36_{10} \rightarrow A_5$

$$\begin{array}{r} x \ 0,36 \\ \hline x \ 1,80 \\ \hline 4,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \ 0,80 \\ \hline 4,00 \end{array}$$

Ответ: $0,36_{10} = 0,14_5$

$n=10$	$n=2$	$n=8$	$n=16$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Правило 3.1. Перевод числа из восьмеричной системы в двоичную

Правило 3.1. Перевод числа из двоичной системы в восьмеричную

Например: $1\ 110\ 101_2 \rightarrow X_8$

$001\ 110\ 101_2$,
1 6 5

Ответ: $1\ 110\ 101_2 = 165_8$

$n=2$	$n=8$
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Правило 3.1. Перевод числа из двоичной системы в восьмеричную

1. Разбить двоичное число на триады (группы по 3 цифры), начиная от ,
2. Если в целой части в левой группе окажется меньше трех цифр, то дополнить ее нулями
3. Заменить триады на восьмеричные цифры по таблице
4. Записать ответ в восьмеричной системе счисления

Правило 3.2. Перевод числа из восьмеричной системы в двоичную

Например: $302_8 \rightarrow X_2$

3 0 2
↓ ↓ ↓
011 000 010

$n=2$	$n=8$
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Ответ: $302_8 = 11\ 000\ 010_2$

Правило 4.1 Перевод числа из двоичной системы в шестнадцатеричную

Правило 4.1 Перевод числа из двоичной системы в шестнадцатеричную

Н-р: 100 1110 1101₂ -> X₁₆

0100 1110 1101₂,
4 E D

Ответ: 100 1110 1101₂ = 4ED₁₆

$n=2$	$n=16$
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Правило 4.1 *Перевод числа из двоичной системы в шестнадцатиричную*

1. *Разбить двоичное число на тетрады (группы по 4 цифры), начиная от запятой ,*
2. *Если в целой части в левой группе окажется меньше 4-х цифр, то дополнить ее нулями*
3. *Заменить тетрады на шестнадцатирич. цифры по таблице*
4. *Записать ответ в шестнадцатиричной системе счисления*

Правило 4.2. Перевод числа из шестнадцатеричной системы в двоичную

Например: $302_{16} \rightarrow X_2$

3 0 2
↓ ↓ ↓
 $0011 \ 0000 \ 0010$

$n=2$	$n=16$
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Ответ: $302_{16} = 11 \ 0000 \ 0010_2$

$$1. \ 513_{10} = 1\ 000\ 000\ 001_2$$

$$43_{10} = 101\ 011_2$$

$$2. \ 0,4622_{10} = 0,011_2$$

$$0,31_{10} = 0,010_2$$

$$3. \ 807_{10} = 1447_8$$

$$93_{10} = 135_8$$

$$4. \ 266_{10} = 10A_{16}$$

$$1024_{10} = 400_{16}$$

$$5. \quad 0,43_{10} = 0,334_8$$

$$0,43_{10} = 0,334_8$$

$$\begin{array}{r}
 0 \mid 43 \\
 \times \quad 8 \\
 \hline
 344 \\
 \times \quad 8 \\
 \hline
 352 \\
 \times \quad 8 \\
 \hline
 416
 \end{array}$$

$$37,41_{10} = 45,321_8$$

$$37,41_{10} \rightarrow X_8$$

$$\begin{array}{r}
 37 \mid 8 \\
 32 \quad 4 \\
 \hline
 5
 \end{array}$$

$$37_{10} = 45_8$$

$$\begin{array}{r}
 0 \mid 41 \\
 \times \quad 8 \\
 \hline
 328 \\
 \times \quad 8 \\
 \hline
 248
 \end{array}$$

$$0,41_{10} = 0,321_8$$

Ergebnis: $45,321_8$

$$6. \ 43,78_{10} = 2B,C7A_{16}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ -322 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\boxed{2B_{16}}$$

$$\begin{array}{r} 0,78 \\ \times 16 \\ \hline 1468 \\ +78 \\ \hline 12,48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,48 \\ \times 16 \\ \hline 2188 \\ +48 \\ \hline 7,68 \end{array}$$

Ober:

$$\boxed{2B,C7A_{16}}$$

$$\begin{array}{r} 0,78 \\ \times 16 \\ \hline 12,48 \\ \times 16 \\ \hline 19,68 \\ \times 16 \\ \hline 10,88 \end{array}$$

$$\boxed{0,C7A_{16}}$$

$$\begin{array}{r} 0,63 \\ \times 16 \\ \hline 4,08 \\ +63 \\ \hline 10,88 \end{array}$$

$$7. \ 567_8 = 375_{10}$$

$$8. \ A45,12_{16} = 2\ 629,070_{10}$$

$$\begin{aligned} &= 10 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^{-1} + 2 \cdot 16^{-2} = \\ &= 2560 + 64 + 5 + \frac{1}{16} + \frac{2}{256} = \\ &= 2629 + \frac{18}{256} = 2629\frac{9}{128} \approx 2629,070_{10} \\ \text{Ober} &: 2629,070_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 90128 \\ - 8960070 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$9. \ 110,1_2 = 6,5_{10}$$

$$10. \ 101\ 001\ 111\ 001_2 = 5171_8$$

$$11. \ 1100100110100_2 = 1934_{16}$$

$$12. \ A38B_{16} = 1010\ 0011\ 1000\ 1011_2$$

$$13. \ 4531_8 = 100\ 101\ 011\ 001_2$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Н.Д. Угринович. Информатика и информационные технологии. - Москва- издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2005г.
2. Системы счисления и компьютерная арифметика. Учебное пособие. Е. В Андреева. Москва- издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2004г.
3. Информатика. Структурированный конспект базового курса информатики. И.Г. Семакин. Москва- издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2001г.
4. Задачник - практикум. И.Г. Семакин. Москва- издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2001г.
5. Математические основы информатики. Элективный курс: Учебное пособие. Е. В Андреева. Москва- издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2005г.